Übungsblatt 9

Abgabe von $*$–Aufgaben am 18.12.2003 in der Übung.

Aufgabe 75: (Potenzreihen. 0 Bonuspunkte)

Bestimme alle komplexen Zahlen z, für die die Reihe $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k}$ konvergiert.

Anleitung: Der Konvergenzradius ist offensichtlich 1. Es geht i.W. um die Frage, für welche z auf dem Rand des Konvergenzkreises die Reihe konvergiert. Die Punkte auf dem komplexen Einheitskreis sind von der Form $z = e^{i\cdot x}$ mit $x \in [0, 2\cdot\pi)$. Zeige zunächst

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{e^{i\cdot k\cdot x}}{k\cdot(k+1)} = \Big(1 - e^{-i\cdot x}\Big)\cdot \sum_{k=1}^{N} \frac{(e^{i\cdot x})^k}{k} + 1 - \frac{e^{i\cdot N\cdot x}}{N+1}$$

(Partialbruchzerlegung von $\frac{1}{k\cdot(k+1)}$) und betrachte den Grenzwert für $N \to \infty$.

Musterlösung:

Über die Cauchy-Hadamard-Formel ergibt sich der Konvergenzradius

$$r = \frac{1}{\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{\frac{1}{k}}} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{k} = 1,$$

die Reihe konvergiert also absolut für $|z| < 1$ und divergiert für $|z| > 1$.

Es geht nun um die Punkte $z = e^{i\cdot x}$ mit $x \in [0, 2\cdot\pi)$ mit $|z| = 1$, die auf dem Rand des Konvergenzkreises liegen. Mit der Partialbruchzerlegung

$$\frac{1}{k\cdot(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

und $z^k = (e^{i\cdot x})^k = e^{i\cdot k\cdot x}$ erhält man

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{e^{i\cdot k\cdot x}}{k\cdot(k+1)} = \sum_{k=1}^{N} \frac{e^{i\cdot k\cdot x}}{k} - \sum_{k=1}^{N} \frac{e^{i\cdot k\cdot x}}{k+1}$$

$$= \sum_{k=1}^{N} \frac{e^{i\cdot k\cdot x}}{k} - \sum_{k=2}^{N+1} \frac{e^{i\cdot(k-1)\cdot x}}{k} = \sum_{k=1}^{N} \frac{e^{i\cdot k\cdot x}}{k} - \sum_{k=1}^{N} \frac{e^{i\cdot(k-1)\cdot x}}{k} + 1 - \frac{e^{i\cdot N\cdot x}}{N+1}$$

$$= \sum_{k=1}^{N} \frac{e^{i\cdot k\cdot x}}{k} - e^{-i\cdot x}\cdot \sum_{k=1}^{N} \frac{e^{i\cdot k\cdot x}}{k} + 1 - \frac{e^{i\cdot N\cdot x}}{N+1} = \Big(1 - e^{-i\cdot x}\Big)\cdot \sum_{k=1}^{N} \frac{(e^{i\cdot x})^k}{k} + 1 - \frac{e^{i\cdot N\cdot x}}{N+1}.$$

Wegen $|e^{i\cdot N\cdot x}| = 1$ folgt im Grenzwert $N \to \infty$:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{i\cdot k\cdot x}}{k\cdot(k+1)} = 1 + \Big(1 - e^{-i\cdot x}\Big)\cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{i\cdot k\cdot x}}{k}.$$

Für $e^{-i\cdot x}-1\neq 0$ ergibt sich also

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(e^{i\cdot x})^k}{k}=\frac{1}{1-e^{-i\cdot x}}\cdot\Big(-1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{i\cdot k\cdot x}}{k\cdot(k+1)}\Big).$$

Die Reihe auf der rechten Seite konvergiert, denn sie hat die konvergente Majorante $\sum_k \frac{1}{k\cdot(k+1)}$ (beachte $|e^{i\cdot k\cdot x}|=1$). Damit konvergiert auch die Reihe links.

Für $z=e^{i\cdot x}=1$ funktioniert dieses Argument nicht. In der Tat ergibt sich für $z=1$ die harmonische Reihe $\sum_k \frac{1}{k}$, die bekanntlich divergiert.
Damit konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^k}{k}$ für alle z mit $|z|\leq 1$ außer für $z=1$.

Aufgabe 76*: (Potenzreihen. 10 Bonuspunkte)
Die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k\cdot(z-z_0)^k$ habe den Konvergenzradius r. Zeige, dass die gliedweise abgeleitete Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} k\cdot a_k\cdot(z-z_0)^{k-1}$$

den selben Konvergenzradius r hat.

Musterlösung:
Wir zeigen: Die Reihe

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k\cdot(z-z_0)^k$$

konvergiert dann und genau dann absolut, wenn die Reihe

$$f'(z)=\sum_{k=0}^{\infty} k\cdot a_k\cdot(z-z_0)^{k-1}$$

absolut konvergiert.
Zeige: f **konvergiert absolut** $\Rightarrow$ f' **konvergiert absolut:** Die Reihe

$$\frac{f(z)}{z-z_0}=\sum_{k=0}^{\infty} a_k\cdot(z-z_0)^{k-1}$$

konvergiere. Dann gilt für jedes $\tilde{z}$ mit $|\tilde{z}-z_0|<|z-z_0|$

$$\sum_{k=0}^{\infty} k\cdot|a_k|\cdot|\tilde{z}-z_0|^{k-1}=\sum_{k=0}^{\infty}|a_k|\cdot|z-z_0|^{k-1}\cdot k\cdot\left|\frac{\tilde{z}-z_0}{z-z_0}\right|^{k-1}.$$

Da

$$\lim_{k\to\infty} k\cdot\underbrace{\left|\frac{\tilde{z}-z_0}{z-z_0}\right|}_{<1}^{k-1}=0$$

gilt, gilt

$$k \cdot \left| \frac{\tilde{z} - z_0}{z - z_0} \right|^{k-1} \leq 1$$

für alle hinreichend großen k. Damit ist

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \cdot |z - z_0|^{k-1}$$

eine konvergente Majorante für

$$\sum_{k=0}^{\infty} k \cdot |a_k| \cdot |\tilde{z} - z_0|^{k-1}.$$

Also: konvergiert die Reihe für $f(z)$ absolut, so konvergiert die Reihe für $f'(\tilde{z})$ für jedes $\tilde{z}$ mit $|\tilde{z} - z_0| \leq |z - z_0|$.
Sei r der Konvergenzradius der Reihe für $f(z)$. Für jedes $\tilde{z}$ mit $|\tilde{z} - z_0| < r$ gibt es ein z mit $|\tilde{z} - z_0| < |z - z_0| < r$. Für dieses z konvergiert die Reihe für $f(z)$ absolut und damit nach den obigen Überlegungen auch die Reihe für $f'(z)$. Also:

$$\text{Konvergenzradius für } f' \geq r = \text{Konvergenzradius für } f.$$

Zeige: f' **konvergiert absolut** $\Rightarrow$ f **konvergiert absolut:** Für jedes z, für das

$$f'(z) = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot a_k \cdot (z - z_0)^{k-1}$$

absolut konvergiert, ist $\sum_{k=0}^{\infty} k \cdot |a_k| \cdot |z - z_0|^k$ eine konvergente Majorante von

$$\frac{f(z)}{z - z_0} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (z - z_0)^{k-1}.$$

Also: für jedes z, für das die Reihe für f' absolut konvergiert, konvergiert auch die Reihe für f absolut, also

$$\text{Konvergenzradius für } f \geq \text{Konvergenzradius für } f'.$$

Insgesamt haben wir damit

$$\text{Konvergenzradius für } f' = \text{Konvergenzradius für } f.$$

Aufgabe 77: (Potenzreihen. Technischer Beweis. 0 Bonuspunkte)
Für die Folge (a_k) existiere

$$r = \lim_{k \to \infty} \frac{|a_k|}{|a_{k+1}|}.$$

Zeige, dass r der Konvergenzradius der Potenzreihe $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (z - z_0)^k$ ist.

Musterlösung:
Betrachte z mit $|z-z_0|<r$. Das Quotienkriterium liefert Konvergenz für

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \cdot |z-z_0|^k,$$

denn zu jedem $\epsilon > 0$ gilt

$$r-\epsilon \leq \frac{|a_k|}{|a_{k+1}|} \leq r+\epsilon$$

für hinreichend große k, also

$$\frac{|a_{k+1}| \cdot |z-z_0|^{k+1}}{|a_k| \cdot |z-z_0|^k} = \frac{|a_{k+1}| \cdot |z-z_0|}{|a_k|} < \frac{|z-z_0|}{|a_k|/|a_{k+1}|} \leq \frac{|z-z_0|}{r-\epsilon}.$$

Speziell für $\epsilon = (r-|z-z_0|)/2 > 0$ folgt

$$\frac{|a_{k+1}| \cdot |z-z_0|^{k+1}}{|a_k| \cdot |z-z_0|^k} < \frac{|z-z_0|}{r-\epsilon} = \frac{2}{1+\frac{r}{|z-z_0|}} < 1.$$

Damit ist das Quotientenkriterium erfüllt, d.h., die Reihe konvergiert absolut. Ergebnis:

$$\boxed{\text{Für jedes } z \text{ mit } |z-z_0|<r \text{ konvergiert die Reihe } \sum_k a_k \cdot (z-z_0)^k \text{ absolut.}}$$

Betrachte nun z mit $|z-z_0|>r$. Zu $\epsilon>0$ gibt es ein k_0 mit

$$r-\epsilon \leq \frac{|a_k|}{|a_{k+1}|} \leq r+\epsilon$$

für alle $k \geq k_0$, also

$$\frac{|a_k|}{r+\epsilon} \leq |a_{k+1}|.$$

Induktiv folgt

$$|a_{k_0+n}| \geq \frac{|a_{k_0+n-1}|}{r+\epsilon} \geq \frac{|a_{k_0+n-2}|}{(r+\epsilon)^2} \geq \cdots \geq \frac{|a_{k_0}|}{(r+\epsilon)^n}$$

für jedes $n \geq 0$. Damit ergibt sich

$$|a_{k_0+n}| \cdot |z-z_0|^{k_0+n} \geq \frac{|a_{k_0}|}{(r+\epsilon)^n} \cdot |z-z_0|^{k_0+n} = |a_{k_0}| \cdot |z-z_0|^{k_0} \cdot \Bigg(\underbrace{\frac{|z-z_0|}{r+\epsilon}}_{\geq 1}\Bigg)^n,$$

wobei

$$\frac{|z-z_0|}{r+\epsilon} \geq 1$$

gilt, wenn man ein hinreichend kleines ϵ betrachtet (z.B. $\epsilon = |z-z_0|-r$). Für $n \to \infty$ folgt, dass $|a_{k_0+n}| \cdot |z-z_0|^{k_0+n}$ keine Nullfolge bildet. Wenn $a_k \cdot (z-z_0)^k$ aber keine Nullfolge ist, kann $\sum_k a_k \cdot (z-z_0)^k$ nicht konvergieren. Ergebnis:

$$\boxed{\text{Für jedes } z \text{ mit } |z-z_0|>r \text{ divergiert die Reihe } \sum_k a_k \cdot (z-z_0)^k.}$$

Damit ist r der Konvergenzradius der Reihe $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (z-z_0)^k$.

Aufgabe 78*: (Potenzreihen. 10 Bonuspunkte)
Bestimme den Konvergenzradius der Reihe

$$f(x) = 1 + 2 \cdot x + x^2 + 2 \cdot x^3 + x^4 + 2 \cdot x^5 + x^6 + 2 \cdot x^7 + \dots .$$

Finde eine einfache Darstellung von $f(x)$.

Musterlösung:
Die Reihe ist $\sum_k a_k x^k$, wobei $a_k = 1$, wenn k gerade ist und $a_k = 2$, wenn k ungerade ist. Es gilt

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{1} = 1, \quad \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{2} = 1,$$

also

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = 1.$$

Über die Cauchy-Hadamard-Formel ist der Konvergenzradius der Reihe damit 1. Es gilt

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 + x^2 + x^4 + \dots \quad + \quad 2 \cdot x + 2 \cdot x^3 + 2 \cdot x^5 + \dots \\ &= 1 + x^2 + x^4 + \dots \quad + \quad 2 \cdot x \cdot \Big(1 + x^2 + x^4 + \dots\Big) \\ &= (1 + 2 \cdot x) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (x^2)^k = \frac{1 + 2 \cdot x}{1 - x^2}. \end{aligned}$$

Aufgabe 79*: (Potenzreihen. 10 Bonuspunkte)
Für eine Funktion $f(x)$ gelte $f(0) = 1$. Die Funktion f genüge der Differentialgleichung

$$f'(x) = \sqrt{1 - f(x)^2}.$$

Entwickle f in eine Taylor-Reihe um $x = 0$ (die Differentialgleichung braucht dafür nicht gelöst zu werden).

Musterlösung:
Die Aufgabe ist sehr unglücklich gestellt. Ich nehme sie daher aus dem Bonus-System 'raus, damit keine Nachteile entstehen:

Annahme: $f(x) \neq 1$**:** Aus der Differentialgleichung folgt über die Kettenregel

$$f''(x) = \frac{d}{dx} \sqrt{1 - f(x)^2} = -\frac{1}{2 \cdot \sqrt{1 - f(x)^2}} \cdot \frac{d}{dx} f(x)^2 = -\frac{1}{2 \cdot \sqrt{1 - f(x)^2}} \cdot 2 \cdot f(x) \cdot f'(x).$$

Setzt man $f'(x) = \sqrt{1 - f(x)^2}$ ein, erhält man

$$f''(x) = -f(x).$$

Induktiv ergibt sich mit $f(0) = 1$, $f'(0) = \sqrt{1 - f(0)^2} = 0$, $f''(0) = -f(0) = -1$, $f'''(0) = -f'(0) = 0$ etc:

$$f^{(k)}(0) = \begin{cases} (-1)^{k/2} & \text{für gerades } k, \\ 0 & \text{für ungerades } k. \end{cases}$$

Als Taylor-Reihe um $x = 0$ ergibt sich damit

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\, x^k = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \mp \cdots = \cos(x).$$

Einsetzen in die DGL zeigt ein Problem auf:

$$f'(x) = -\sin(x) \neq \sqrt{1 - f(x)^2} = |\sin(x)|$$

für x nahe bei 0. Wo liegt das Problem? Wir mussten in den obigen Überlegungen $f(x) \neq 1$ annehmen, aber haben $f(0) = 1$ benutzt!

In der Tat hat das Anfangswertproblem die Lösung $f(x) = 1\ \forall x$. Man zeichne das Vektorfeld $v(x, y) = (1, \sqrt{1 - y^2})$ in MuPAD mittels

```
>> plot(plot::VectorField2d([1, sqrt(1 - y^2)],
                            x =-PI..PI, y = -1..1,
                            Mesh = [31, 21]))
```

Das qualitative Verhalten der Lösung zu unterschiedlichen Anfangsbedingugen $y(0)$ ist hieraus leicht graphisch ablesbar. Die Lösung der DGL $y' = \sqrt{1 - y^2}$ (die Anfangsbedingung ignorierend) ist (z.B. per Separation):

$$f(x) = \sin(x + c)$$

mit einer beliebigen Konstanten c. Dies gilt aber nur stückweise in Bereichen mit $|f(x)| < 1$. Dort wo y die Werte ± 1 erreicht, müssen diese Lösungen aneinandergestückelt werden (y soll stetig sein). Dabei stellt sich jedoch heraus, dass y'' an diesen Punkten nicht diff'bar ist. Damit konnte der obige Ansatz, die Lösung per Taylor-Entwicklung darzustellen, gar nicht funktionieren.

Sorry für die verunglückte Aufgabe!

Aufgabe 80*: (Stammfunktionen. Partielle Integration. 5 + 5 + 5 + 5 + 5 Bonuspunkte)
Bestimme:

$$a) \int x^2 \cdot e^x\, dx, \quad b) \int x \cdot \sin(x)\, dx, \quad c) \int \sin(x) \cdot \cos(x) \cdot e^{\sin(x)}\, dx,$$

$$d) \int \sin(x) \cdot e^x\, dx, \quad e) \int \sin(x) \cdot \cos(x)\, dx.$$

Musterlösung:
a) Analog zu Beispiel 9.12 der Vorlesung:

$$\int \underbrace{x^2}_{f(x)} \cdot \underbrace{e^x}_{g'(x)}\,dx = \underbrace{x^2}_{f(x)} \cdot \underbrace{e^x}_{g(x)} - \int \underbrace{2\cdot x}_{f'(x)} \cdot \underbrace{e^x}_{g(x)}\,dx = x^2 \cdot e^x - 2 \cdot \int x \cdot e^x\,dx.$$

Erneute partielle Integration:

$$x^2 \cdot e^x - 2 \cdot \int \underbrace{x}_{f(x)} \cdot \underbrace{e^x}_{g'(x)}\,dx$$

$$= x^2 \cdot e^x - 2 \cdot \Big(\underbrace{x}_{f(x)} \cdot \underbrace{e^x}_{g(x)} - \int \underbrace{1}_{f'(x)} \cdot \underbrace{e^x}_{g(x)}\,dx \Big)$$

$$= x^2 \cdot e^x - 2 \cdot x \cdot e^x + 2 \cdot \int e^x\,dx = x^2 \cdot e^x - 2 \cdot x \cdot e^x + 2 \cdot e^x + c = (x^2 - 2\cdot x + 2)\cdot e^x + c.$$

Probe:

$$\frac{d}{dx}\Big((x^2 - 2\cdot x + 2)\cdot e^x + c\Big) = (2\cdot x - 2)\cdot e^x + (x^2 - 2\cdot x + 2)\cdot e^x = x^2 \cdot e^x \quad \text{(ok).}$$

b) Analog zu Beispiel 9.12 der Vorlesung:

$$\int \underbrace{x}_{f(x)} \cdot \underbrace{\sin(x)}_{g'(x)}\,dx = \underbrace{x}_{f(x)} \cdot \underbrace{(-\cos(x))}_{g(x)} - \int \underbrace{1}_{f'(x)} \cdot \underbrace{(-\cos(x))}_{g(x)}\,dx$$

$$= -x \cdot \cos(x) + \int \cos(x)\,dx = -x\cdot\cos(x) + \sin(x) + c.$$

Probe:

$$\frac{d}{dx}\Big(-x\cdot\cos(x) + \sin(x) + c\Big) = -\cos(x) + x\cdot\sin(x) + \cos(x) = x \cdot \sin(x) \quad \text{(ok).}$$

c)

$$\int \sin(x)\cdot\cos(x)\cdot e^{\sin(x)}\,dx = \int \underbrace{\sin(x)}_{f(x)} \cdot \underbrace{\cos(x)\cdot e^{\sin(x)}}_{g'(x)}\,dx.$$

Die entscheidende Beobachtung ist hier, dass wir die Stammfunktion des Faktors $g'(x)$ kennen (leicht raten können bzw. durch Substitution $y = \sin(x)$ systematisch bestimmen können): $g(x) = e^{\sin(x)}$:

$$\int \underbrace{\sin(x)}_{f(x)} \cdot \underbrace{\cos(x)\cdot e^{\sin(x)}}_{g'(x)}\,dx = \underbrace{\sin(x)}_{f(x)} \cdot \underbrace{e^{\sin(x)}}_{g(x)} - \int \underbrace{\cos(x)}_{f'(x)} \cdot \underbrace{e^{\sin(x)}}_{g(x)}\,dx.$$

Das verbleibende Integral hatten wir oben schon identifiziert:

$$\int \cos(x)\cdot e^{\sin(x)}\,dx = e^{\sin(x)} - c.$$

Macht zusammen:

$$\int \sin(x)\cdot\cos(x)\cdot e^{\sin(x)}\,dx = (\sin(x) - 1)\cdot e^{\sin(x)} + c.$$

Probe:

$$\frac{d}{dx}\Big((\sin(x)-1)\cdot e^{\sin(x)}+c\Big) = \cos(x)\cdot e^{\sin(x)} + (\sin(x)-1)\cdot\cos(x)\cdot e^{\sin(x)}$$
$$= \sin(x)\cdot\cos(x)\cdot e^{\sin(x)} \quad \text{(ok)}.$$

d)

$$\int \sin(x)\cdot e^x\,dx = \int \underbrace{\sin(x)}_{f(x)}\cdot\underbrace{e^x}_{g'(x)}\,dx = \underbrace{\sin(x)}_{f(x)}\cdot\underbrace{e^x}_{g(x)} - \int \underbrace{\cos(x)}_{f'(x)}\cdot\underbrace{e^x}_{g(x)}\,dx.$$

Das war bislang nicht sehr erfolgreich: $\int \sin(x)\cdot e^x\,dx$ wurde durch $\int \cos(x)\cdot e^x\,dx$ ausgedrückt. Eine zweite partielle Integration:

$$\int \cos(x)\cdot e^x\,dx = \int \underbrace{\cos(x)}_{f(x)}\cdot\underbrace{e^x}_{g'(x)}\,dx = \underbrace{\cos(x)}_{f(x)}\cdot\underbrace{e^x}_{g(x)} - \int \underbrace{(-\sin(x))}_{f'(x)}\cdot\underbrace{e^x}_{g(x)}\,dx$$
$$= \cos(x)\cdot e^x + \int \sin(x)\cdot e^x\,dx.$$

Dies liefert eine Gleichung für $\int \sin(x)\cdot e^x\,dx$:

$$\begin{aligned}
\textstyle\int \sin(x)\cdot e^x\,dx &= \sin(x)\cdot e^x - \textstyle\int \cos(x)\cdot e^x\,dx \\
&= \sin(x)\cdot e^x - \cos(x)\cdot e^x - \textstyle\int \sin(x)\cdot e^x\,dx \\
\Rightarrow\quad 2\cdot\textstyle\int \sin(x)\cdot e^x\,dx &= (\sin(x)-\cos(x))\cdot e^x + c_1 \\
\Rightarrow\quad \textstyle\int \sin(x)\cdot e^x\,dx &= \tfrac{1}{2}\cdot\Big(\sin(x)-\cos(x)\Big)\cdot e^x + c.
\end{aligned}$$

(Hierbei wurde $\frac{c_1}{2}$ in c umbenannt.) Probe: $\cdots$ (passt).

e)

$$\int \sin(x)\cdot\cos(x)\,dx = \int \underbrace{\sin(x)}_{f(x)}\cdot\underbrace{\cos(x)}_{g'(x)}\,dx = \underbrace{\sin(x)}_{f(x)}\cdot\underbrace{\sin(x)}_{g(x)} - \int \underbrace{\cos(x)}_{f'(x)}\cdot\underbrace{\sin(x)}_{g(x)}\,dx.$$

Das war bislang nicht sehr erfolgreich: $\int \sin(x)\cdot\cos(x)\,dx$ wurde durch $\int \cos(x)\cdot\sin(x)\,dx$ ausgedrückt. Das Ganze ist aber eine Gleichung für das gesuchte Integral $\int \sin(x)\cdot\cos(x)\,dx$:

$$\begin{aligned}
\textstyle\int \sin(x)\cdot\cos(x)\,dx &= \sin^2(x) - \textstyle\int \cos(x)\cdot\sin(x)\,dx \\
\Rightarrow\quad 2\cdot\textstyle\int \sin(x)\cdot\cos(x)\,dx &= \sin^2(x) + c_1 \\
\Rightarrow\quad \textstyle\int \sin(x)\cdot\cos(x)\,dx &= \frac{\sin(x)^2}{2} + c.
\end{aligned}$$

(Hierbei wurde $\frac{c_1}{2}$ in c umbenannt.) Probe: $\cdots$ (passt).

Aufgabe 81*: (Stammfunktionen. Substitution. 5 + 5 + 5 + 5 + 5 Bonuspunkte)
Berechne

$$a) \quad \int e^{2\cdot x+3}\ dx, \quad b) \quad \int \cos(x)\cdot e^{2\cdot\sin(x)+3}\ dx, \quad c) \quad \int \frac{\cos(x)}{\sin(x)}\cdot\ln(\sin(x))\ dx,$$

$$d) \quad \int \frac{\sin(\ln(2\cdot x+3))}{2\cdot x+3}\ dx, \quad e) \quad \int x\cdot\sin(x^2)\cdot\sin(\cos(x^2))\ dx.$$

Musterlösung:
a) Substituiere $y = 2\cdot x+3$ ($\Rightarrow dy = 2\cdot dx$):

$$\int e^{2\cdot x+3}\ dx = \int e^y\ \frac{dy}{2} = \frac{e^y}{2} + c = \frac{e^{2\cdot x+3}}{2} + c.$$

b) Substituiere $y = 2\cdot\sin(x)+3$ ($\Rightarrow dy = 2\cdot\cos(x)\cdot dx$):

$$\int \cos(x)\cdot e^{2\cdot\sin(x)+3}\ dx = \int e^y\ \frac{dy}{2} = \frac{e^y}{2} + c = \frac{e^{2\cdot\sin(x)+3}}{2} + c.$$

c) Substituiere $y = \sin(x)$, also $dy = \cos(x)\cdot dx$:

$$\int \frac{\cos(x)}{\sin(x)}\cdot\ln(\sin(x))\ dx = \int \frac{\ln(y)}{y}\ dy.$$

Nächste Substitution $z = \ln(y)$, also $dz = dy/y$:

$$\int \frac{\ln(y)}{y}\ dy = \int z\ dz = \frac{z^2}{2} + c = \frac{\ln(y)^2}{2} + c.$$

Macht zusammen

$$\int \frac{\cos(x)}{\sin(x)}\cdot\ln(\sin(x))\ dx = \frac{\ln(\sin(x))^2}{2} + c.$$

Beide Schritte können zusammengefasst werden, indem man gleich $z = \ln(\sin(x))$ substituiert. Mit $dz/dx = \cos(x)/\sin(x)$:

$$\int \frac{\cos(x)}{\sin(x)}\cdot\ln(\sin(x))\ dx = \int z\ dz = \frac{z^2}{2} + c = \frac{\ln(\sin(x))^2}{2} + c.$$

d) Substituiere $y = \ln(2\cdot x+3)$ ($\Rightarrow dy = \frac{2}{2\cdot x+3}\ dx$):

$$\int \frac{\sin(\ln(2\cdot x+3))}{2\cdot x+3}\ dx = \int \sin(y)\ \frac{dy}{2} = -\frac{\cos(y)}{2} = -\frac{1}{2}\cdot\cos(\ln(2\cdot x+3)) + c.$$

e) Substituiere $y = \cos(x^2)$ ($\Rightarrow dy = -2\cdot x\cdot\sin(x^2)\cdot dx$):

$$\int x\cdot\sin(x^2)\cdot\sin(\cos(x^2))\ dx = \int \sin(y)\ \frac{dy}{-2} = -\frac{1}{2}\cdot(-\cos(y)) + c = \frac{1}{2}\cdot\cos(\cos(x^2)) + c.$$

Aufgabe 82*: (Integration. 10 Bonuspunkt)
Man begebe sich ins automatische Abgabe-Tool `bourbaki.upb.de/mfp1`. Diese Aufgabe wird dort als 'Miniprojekt 82' bezeichnet. Es ist dort eine Stammfunktion zu finden. Liefere die Stammfunktion im Web-Formular ab. Anleitung: Siehe auch Aufgabe 81.c.
Es gibt drei Abgabeversuche! Abgaben bis Do, 18.12., 23::59::59 Uhr.
Relevante MuPAD-Funktionen zur Kontrolle: `int`. Einige MuPAD-Versionen liefern für das Integral eine komplexe Darstellung, die bei der Abgabe nicht akzeptiert wird. Es ist eine reelle Darstellung gefragt!

Musterlösung:
Die generierte Aufgabe ist: Bestimme

$$\int \frac{\cos\Big((M_1+M_2)\cdot x\Big)}{\sin\Big((M_1+M_2)\cdot x\Big)}\cdot \ln\Big((M_1+M_3)\cdot\sin\Big((M_1+M_2)\cdot x\Big)\Big)\,dx + \int \frac{M_4\cdot e^{M_5\cdot\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx.$$

Hierbei sind $M_1, \ldots, M_7$ über die Matrikelnummer generiert.
Substituiere $y = \sin((M_1+M_2)\cdot x)$ im ersten Integral, also $dy = (M_1+M_2)\cdot\cos((M_1+M_2)\cdot x)\cdot dx$:

$$\int \frac{\cos\Big((M_1+M_2)\cdot x\Big)}{\sin\Big((M_1+M_2)\cdot x\Big)}\cdot \ln\Big((M_1+M_3)\cdot\sin\Big((M_1+M_2)\cdot x\Big)\Big)\,dx$$

$$= \int \frac{\ln\Big((M_1+M_3)\cdot y\Big)}{(M_1+M_2)\cdot y}\,dy.$$

Mit $z = \ln((M_1+M_3)\cdot y)$, also

$$\frac{dz}{dy} = \frac{M_1+M_3}{(M_1+M_3)\cdot y} \quad\Rightarrow\quad dz = \frac{dy}{y},$$

folgt

$$\int \frac{\ln((M_1+M_3)\cdot y)}{(M_1+M_2)\cdot y}\,dy = \int \frac{z}{M_1+M_2}\,dz = \frac{z^2}{2\cdot(M_1+M_2)} + c_1$$

$$= \frac{\ln\Big((M_1+M_3)\cdot y\Big)^2}{2\cdot(M_1+M_2)} + c_1 = \frac{\ln\Big((M_1+M_3)\cdot\sin(M_1+M_2)\cdot x)\Big)^2}{2\cdot(M_1+M_2)} + c_1.$$

Substituiere im zweiten Integral $y = M_5\cdot\sqrt{x}$, also $dy = M_5\cdot dx/(2\cdot\sqrt{x})$, also

$$\int \frac{M_4\cdot e^{M_5\cdot\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx = \int M_4\cdot e^y\cdot\frac{2}{M_5}\,dy = \frac{2\cdot M_4}{M_5}\cdot\int e^y dy$$

$$= \frac{2\cdot M_4}{M_5}\cdot e^y + c_2 = \frac{2\cdot M_4}{M_5}\cdot e^{M_5\cdot\sqrt{x}} + c_2$$

für $M_5 \neq 0$ bzw.

$$\int \frac{M_4 \cdot e^{M_5 \cdot \sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \; dx = \int \frac{M_4}{\sqrt{x}} \; dx = 2 \cdot M_4 \cdot \sqrt{x} + c_2$$

für $M_5 = 0$. **Endergebnis:**

$$\int \frac{\cos\Big((M_1 + M_2) \cdot x\Big)}{\sin\Big((M_1 + M_2) \cdot x\Big)} \cdot \ln\Big((M_1 + M_3) \cdot \sin\Big((M_1 + M_2) \cdot x\Big)\Big) \; dx + \int \frac{M_4 \cdot e^{M_5 \cdot \sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \; dx$$

$$= \frac{\ln\Big((M_1 + M_3) \cdot \sin(M_1 + M_2) \cdot x)\Big)^2}{2 \cdot (M_1 + M_2)} + \frac{2 \cdot M_4}{M_5} \cdot e^{M_5 \cdot \sqrt{x}} + c$$

für $M_5 \neq 0$ bzw.

$$= \frac{\ln\Big((M_1 + M_3) \cdot \sin(M_1 + M_2) \cdot x)\Big)^2}{2 \cdot (M_1 + M_2)} + 2 \cdot M_4 \cdot \sqrt{x} + c$$

für $M_5 = 0$.
