Übungsblatt 8

Abgabe von $*$–Aufgaben am 11.12.2003 in der Übung.

Aufgabe 66*: (Mittelwertsatz. 10 Bonuspunkte)
Zeige, dass $|\sin(x)| \leq |x|$ gilt für alle $x \in \mathbb{R}$.
Anleitung: Mittelwertsatz für $f(x) = \sin(x)$.

Musterlösung:
Der Mittelwertsetz

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} = f'(\xi)$$

für beliebiges x, y und ξ zwischen x und y liefert für $f = \sin$, $f' = \cos$, $y = 0$:

$$\frac{\sin(x) - \sin(0)}{x - 0} = \cos(\xi) \quad \Rightarrow \quad \sin(x) = \cos(\xi) \cdot x \quad \Rightarrow \quad |\sin(x)| = |\cos(\xi)| \cdot |x|.$$

Bekanntlich gilt $|\cos(\xi)| \leq 1$ für jedes beliebige ξ, also $|\sin(x)| \leq |x|$.

Aufgabe 67*: (Taylor-Reihen. 10 Bonuspunkte)
Bestimme die ersten 4 Koeffizienten $c_0, \ldots, c_3$ der Taylor-Entwicklungen

$$e^{\sin(x)} = c_0 + c_1 \cdot x + c_2 \cdot x^2 + c_3 \cdot x^3 + O(x^4)$$

und

$$e^{\sin(x)} = c_0 + c_1 \cdot \Big(x - \frac{\pi}{2}\Big) + c_2 \cdot \Big(x - \frac{\pi}{2}\Big)^2 + c_3 \cdot \Big(x - \frac{\pi}{2}\Big)^3 + O\Big(\Big(x - \frac{\pi}{2}\Big)^4\Big).$$

MuPAD-Funktion zur Kontrolle: `taylor`.

Musterlösung:
Es gilt

$$\begin{aligned}
&f^{(0)}(x) = e^{\sin(x)} && \Rightarrow \quad f^{(0)}(0) = e^{\sin(0)} = 1, \quad f^{(0)}(\tfrac{\pi}{2}) = e^{\sin(\pi/2)} = e,\\
&f^{(1)}(x) = \cos(x) \cdot e^{\sin(x)} && \Rightarrow \quad f^{(1)}(0) = 1, \quad f^{(1)}(\tfrac{\pi}{2}) = 0,\\
&f^{(2)}(x) = -\sin(x) \cdot e^{\sin(x)} + \cos^2(x) \cdot e^{\sin(x)} && \Rightarrow \quad f^{(2)}(0) = 1, \quad f^{(2)}(\tfrac{\pi}{2}) = -e,\\
&f^{(3)}(x) = -\cos(x) \cdot e^{\sin(x)} - 3 \cdot \cos(x) \cdot \sin(x) \cdot e^{\sin(x)} + \cos^3(x) \cdot e^{\sin(x)} && \\
& && \Rightarrow \quad f^{(3)}(0) = 0, \quad f^{(3)}(\tfrac{\pi}{2}) = 0.
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich der Beginn der Taylor–Entwicklung

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} \cdot (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} \cdot (x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!} \cdot (x - x_0)^3 + O((x - x_0)^4)$$

um den Punkt $x_0 = 0$ zu

$$e^{\sin(x)} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + O(x^4),$$

während sich bei Entwicklung um $x_0 = \pi/2$ ergibt:

$$e^{\sin(x)} = e - \frac{e}{2!} \cdot \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 + O\left(\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^4\right).$$

Probe mit MuPAD:

```
>> taylor(exp(sin(x)), x = 0)

                      2    4    5
                     x    x    x        6
              1 + x + -- - -- - -- + O(x )
                      2    8   15

>> taylor(exp(sin(x)), x = PI/2)

               /     PI \2          /     PI \4
        exp(1) | x - -- |    exp(1) | x - -- |
               \      2 /           \      2 /     / /     PI \6 \
 exp(1) - ----------------- + ----------------- + O| | x - -- |  |
                  2                  6             \ \      2 /  /
```

Aufgabe 68*: (Taylor-Reihen. 10 Bonuspunkte)
Betrachte $f(x) = 1/(1-x)$.
a) Bestimme eine Formel für $f^{(n)}(x)$.
b) Bestimme hiermit die Taylor–Reihe von f um den Nullpunkt.
c) Für welche x wird $f(x)$ durch die Taylor-Reihe dargestellt?

Musterlösung:
a) Die ersten Ableitungen:

$$f^{(0)}(x) = \frac{1}{1-x},\ f^{(1)}(x) = \frac{1}{(1-x)^2},\ f^{(2)}(x) = \frac{2}{(1-x)^3},\ f^{(3)}(x) = \frac{2\cdot 3}{(1-x)^4},\ f^{(4)}(x) = \frac{2\cdot 3\cdot 4}{(1-x)^5}$$

legen die Vermutung

$$f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$$

nahe, welche durch Induktion leicht zu beweisen ist. Hier der Induktionsschritt:

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{d}{dx}\, f^{(n)}(x) = \frac{d}{dx}\, \frac{n!}{(1-x)^{n+1}} = -(n+1) \cdot \frac{n!}{(1-x)^{n+2}} \cdot (-1) = \frac{(n+1)!}{(1-x)^{n+2}}.$$

b) Mit $f^{(n)}(0) = n!/(1-0)^{n+1} = n!$ ergibt sich die Taylor–Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n.$$

c) Es ist bekannt, dass die geometrische Reihe für $|x| < 1$ gegen $\frac{1}{1-x}$ konvergiert und für $|x| \geq 1$ divergiert:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad \text{für } |x| < 1.$$

Aufgabe 69: (Taylor-Reihen. 0 Bonuspunkte)
Betrachte $f(x) = \arctan(x)$.
a) Bestimme die Taylor-Reihe von $f'(x)$.
b) Für welche x wird $f'(x)$ durch die Taylor-Reihe dargestellt?
c) Stelle eine Vermutung auf, wie die Taylor-Reihe von $f(x)$ aussieht.
Anleitung: a) Die Konstruktion über Ableitungen ist mühsam. Betrachte stattdessen eine geeignete geometrische Reihe. c) Integration von $f'(x)$ und der Taylor-Reihe von $f'(x)$. (Integration als Vorkenntnisse aus der Schule vorausgesetzt).

Musterlösung:
a) In Aufgabe 63.b) wurde

$$\frac{d}{dx} \arctan(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

hergeleitet. Mit $\epsilon = -x^2$ gilt

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-\epsilon} = \sum_{k=0}^{\infty} \epsilon^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-x^2)^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot x^{2 \cdot k} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots .$$

b) Dies ist die Taylor–Reihe um den Nullpunkt. Als geometrische Reihe konvergiert sie für $|-x^2| < 1$, also $|x| < 1$, gegen $f'(x) = 1/(1+x^2)$.
c) Integriert man die Gleichung

$$f'(x) = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots$$

formal links und rechts, so erhält man

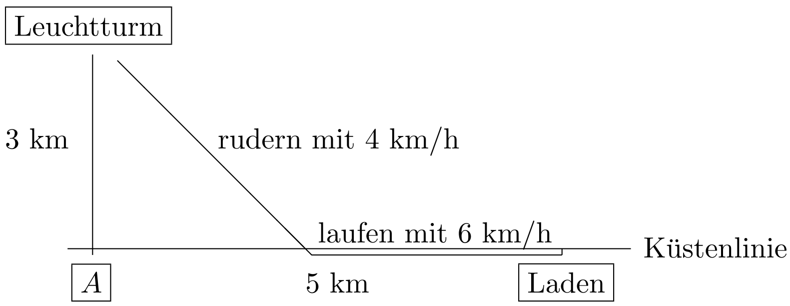
$$f(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} \pm \cdots + \text{Konstante}.$$

Die Konstante ergibt sich durch Einsetzen von $x = 0$ mit $f(0) = \arctan(0) = 0$ als 0. Dies ergibt als (vermutete) Taylor-Reihe

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} \pm \cdots .$$

Aufgabe 70*: (Extremwerte. 10 Bonuspunkte)

Ein Leuchtturm liegt 3 km vor der Küste, direkt gegenüber einem Punkt A der geraden Küstenlinie. Vom Punkt A aus liegt in 5 km Entfernung parallel zur Küstenlinie ein Laden. Der Leuchtturmwärter kann mit 4 km/h rudern und mit 6 km/h laufen. Welchen Punkt sollte er vom Leuchtturm aus startend ansteuern, um den Laden so schnell wie möglich zu erreichen?



MuPAD-Funktionen zur Kontrolle: `diff, solve`.

Musterlösung:

Sei x der Abstand zwischen A und dem Küstenpunkt, der rudernd anzusteuern ist. Nach Pythagoras ist die zu rudernde Strecke $\sqrt{3^2 + x^2}$, die zum Rudern benötigte Zeit ist damit

$$t_1 = \frac{\sqrt{9 + x^2}}{4}.$$

Es verbleibt die Strecke $5 - x$ zu laufen, die dafür benötigte Zeit ist

$$t_2 = \frac{5 - x}{6}.$$

Damit ist das Minimum von

$$t(x) = t_1 + t_2 = \frac{\sqrt{9 + x^2}}{4} + \frac{5 - x}{6}$$

zu finden:

$$0 = \frac{dt}{dx} = \frac{2 \cdot x}{4 \cdot 2 \cdot \sqrt{9 + x^2}} - \frac{1}{6} \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{4 \cdot \sqrt{9 + x^2}} = \frac{1}{6} \quad \Rightarrow \quad 3 \cdot x = 2 \cdot \sqrt{9 + x^2}$$

$$\Rightarrow \quad 9 \cdot x^2 = 4 \cdot (9 + x^2) \quad \Rightarrow \quad 5 \cdot x^2 = 36 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{6}{\sqrt{5}} \approx 2.683.$$

Aufgabe 71*: (Extremwerte. 10 Bonuspunkte)

Man begebe sich ins automatische Abgabe-Tool `bourbaki.upb.de/mfp1`. Diese Aufgabe wird dort als 'Miniprojekt 71' bezeichnet. Es ist dort eine Extremwertaufgabe zu lösen. Liefere die Antwort im Web-Formular ab.

Es gibt drei Abgabeversuche! Abgaben bis Do, 11.12., 23::59::59 Uhr.

Relevante MuPAD-Funktionen zur Kontrolle: `diff, solve`.

Musterlösung:
Die generierte Aufgabe lautet: Betrachte einen Quader, bei dem die Seiten a, b der Grundfläche das Verhältnis $a/b = (M_1 + M_2)/(M_1 + M_3)$ aufweisen. Bestimme die Höhe c des Quaders, wenn das Volumen

$$a \cdot b \cdot c = (M_1 + M_4 + M_5 + M_6 + M_7)^3$$

vorgegeben ist und die Quaderoberfläche minimal werden soll. Hierbei sind $M_1, \ldots, M_7$ die üblichen Ziffern der Matrikelnummer.

Lösung: Sei

$$C_1 = \frac{M_1 + M_2}{M_1 + M_3}, \quad C_2 = (M_1 + M_4 + M_5 + M_6 + M_7)^3.$$

Die Oberfläche ist

$$F = 2 \cdot a \cdot b + 2 \cdot a \cdot c + 2 \cdot b \cdot c,$$

wobei

$$a = \frac{M_1 + M_2}{M_1 + M_3} \cdot b = C_1 \cdot b$$

und

$$a \cdot b \cdot c = C_1 \cdot b^2 \cdot c = C_2$$

gilt, also

$$b = \sqrt{\frac{C_2}{C_1 \cdot c}}, \quad a = \sqrt{\frac{C_1 \cdot C_2}{c}}.$$

Damit ergibt sich die Oberfläche als Funktion von c:

$$F(c) = 2 \cdot a(c) \cdot b(c) + 2 \cdot \Big(a(c) + b(c)\Big) \cdot c$$

$$= 2 \cdot \frac{C_2}{c} + 2 \cdot c \cdot \left(\sqrt{\frac{C_1 \cdot C_2}{c}} + \sqrt{\frac{C_2}{C_1 \cdot c}}\right) = 2 \cdot \frac{C_2}{c} + 2 \cdot \sqrt{c} \cdot \left(\sqrt{C_1 \cdot C_2} + \sqrt{\frac{C_2}{C_1}}\right).$$

Sei

$$C_3 = \sqrt{C_1 \cdot C_2} + \sqrt{\frac{C_2}{C_1}} = \sqrt{C_1 \cdot C_2} \cdot \left(1 + \frac{1}{C_1}\right).$$

Das Oberflächenminimum ergibt sich durch

$$0 = \frac{d}{dc}\, F(c) = -\frac{2 \cdot C_2}{c^2} + \frac{C_3}{\sqrt{c}} \quad \Rightarrow \quad c^{3/2} = \frac{2 \cdot C_2}{C_3} \quad \Rightarrow \quad c = \left(\frac{2 \cdot C_2}{C_3}\right)^{2/3},$$

also

$$c = \left(\frac{4 \cdot C_2^2}{C_3^2}\right)^{1/3} = \left(\frac{4 \cdot C_2^2}{C_1 \cdot C_2 \cdot \left(1 + \frac{1}{C_1}\right)^2}\right)^{1/3} = \left(\frac{4 \cdot C_2}{C_1 \cdot \left(1 + \frac{1}{C_1}\right)^2}\right)^{1/3} = \left(\frac{4 \cdot C_2}{C_1 + 2 + \frac{1}{C_1}}\right)^{1/3}$$

$$= \left(\frac{4 \cdot (M_1 + M_4 + M_5 + M_6 + M_7)^3}{\frac{M_1+M_2}{M_1+M_3} + 2 + \frac{M_1+M_3}{M_1+M_2}}\right)^{1/3} = (M_1+M_4+M_5+M_6+M_7) \cdot \left(\frac{4}{\frac{M_1+M_2}{M_1+M_3} + 2 + \frac{M_1+M_3}{M_1+M_2}}\right)^{1/3}.$$

Aufgabe 72*: (de l'Hospital. 10 Bonuspunkte)

Berechne mittels der de l'Hospitalschen Regel $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos(x)}{x^2}$.

Musterlösung:
Zweifache Anwendung von l'Hospital (solange eine $\frac{0}{0}$–Situation vorliegt):

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{d}{dx}(1-\cos(x))}{\frac{d}{dx}x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{2\cdot x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{d}{dx}\sin(x)}{\frac{d}{dx}2\cdot x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)}{2} = \frac{\cos(0)}{2} = \frac{1}{2}\ .$$

MuPAD:

```
>> limit((1 - cos(x))/x^2, x = 0)

                        1/2
```

Aufgabe 73*: (de l'Hospital. 10 Bonuspunkte)

Berechne den Grenzwert $\lim\limits_{x\to 0+0} x^x$.

Anleitung: $x^x = e^{x\cdot\ln(x)}$. Forme $x\cdot\ln(x)$ so um, dass sich für $x=0$ eine $\frac{\infty}{\infty}$–Situation ergibt.

Musterlösung:
Es wird zunächst $\lim\limits_{x\to 0+0} x\cdot\ln(x)$ per l'Hospital berechnet:

$$\lim_{x\to 0+0} x\cdot\ln(x) = \lim_{x\to 0+0}\frac{\ln(x)}{1/x}.$$

Dies ergibt für $x=0$ eine ∞/∞-Situation, d.h., wir können l'Hospital anwenden:

$$\lim_{x\to 0+0}\frac{\ln(x)}{1/x} = \lim_{x\to 0+0}\frac{\frac{d}{dx}\ \ln(x)}{\frac{d}{dx}\ 1/x} = \lim_{x\to 0+0}\frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0+0}(-x) = 0.$$

Es folgt

$$\lim_{x\to 0+0} x^x = \lim_{x\to 0+0} e^{x\cdot\ln(x)} = e^{\lim\limits_{x\to 0+0} x\cdot\ln(x)} = e^0 = 1.$$

Aufgabe 74*: (de l'Hospital. 10 Bonuspunkte)

Man begebe sich ins automatische Abgabe-Tool `bourbaki.upb.de/mfp1`. Diese Aufgabe wird dort als 'Miniprojekt 74' bezeichnet. Es ist dort per de l'Hospital ein Grenzwert zu bestimmen. Liefere den Grenzwert im Web-Formular ab.
Es gibt drei Abgabeversuche! Abgaben bis Do, 11.12., 23::59::59 Uhr.
Anleitung: siehe auch Aufgabe 73. Die Ableitung von arctan war in Aufgabe 63.b) zu bestimmen.
Relevante MuPAD-Funktionen zur Kontrolle: `limit`.

Musterlösung:
Die generierte Aufgabe lautet: Berechne den Grenzwert

$$\lim_{x\to 0+0}\left(\sin((M_1+M_2)\cdot x)^{(M_1+M_3)\cdot x}+\frac{\arctan((M_1+M_4)\cdot x^2)}{(M_1+M_5)\cdot x^2\cdot(1+M_6+x)}\right).$$

Hierbei sind M_1, ..., M_7 die üblichen Ziffern der Matrikelnummer.

Lösung: Der Grenzwert des ersten Summanden ergibt sich analog zu Aufgabe 73:

$$\lim_{x\to 0+0}\sin((M_1+M_2)\cdot x)^{(M_1+M_3)\cdot x}=\lim_{x\to 0+0}e^{(M_1+M_3)\cdot x\cdot\ln(\sin((M_1+M_2)\cdot x))}.$$

Hierbei gilt nach l'Hospital:

$$\lim_{x\to 0+0}x\cdot\ln(\sin((M_1+M_2)\cdot x))=\lim_{x\to 0+0}\frac{\ln(\sin((M_1+M_2)\cdot x))}{1/x}$$

$$=\lim_{x\to 0+0}\frac{\frac{d}{dx}\ \ln(\sin((M_1+M_2)\cdot x))}{\frac{d}{dx}\ 1/x}=\lim_{x\to 0+0}\frac{\frac{(M_1+M_2)\cdot\cos((M_1+M_2)\cdot x)}{\sin((M_1+M_2)\cdot x)}}{-1/x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0+0}\Big(-\cos((M_1+M_2)\cdot x)\cdot\frac{(M_1+M_2)\cdot x}{\sin((M_1+M_2)\cdot x)}\cdot x\Big)$$

$$=-\Big(\lim_{x\to 0+0}\cos((M_1+M_2)\cdot x)\Big)\cdot\Big(\lim_{x\to 0+0}\frac{(M_1+M_2)\cdot x}{\sin((M_1+M_2)\cdot x)}\Big)\cdot\Big(\lim_{x\to 0+0}x\Big)=-1\cdot 1\cdot 0=0,$$

also

$$\lim_{x\to 0+0}\sin((M_1+M_2)\cdot x)^{(M_1+M_3)\cdot x}=e^{\lim\limits_{x\to 0+0}(M_1+M_3)\cdot x\cdot\ln(\sin((M_1+M_2)\cdot x))}=e^0=1.$$

Der Grenzwert des zweiten Summanden ergibt sich per l'Hospital (beachte $\frac{d}{dx}\ \arctan(x)=\frac{1}{1+x^2}$):

$$\lim_{x\to 0+0}\frac{\arctan((M_1+M_4)\cdot x^2}{(M_1+M_5)\cdot x^2\cdot(1+M_6+x)}=\lim_{x\to 0+0}\frac{\frac{d}{dx}\ \arctan((M_1+M_4)\cdot x^2)}{\frac{d}{dx}\Big((M_1+M_5)\cdot x^2\cdot(1+M_6+x)\Big)}$$

$$=\lim_{x\to 0+0}\frac{\frac{2\cdot(M_1+M_4)\cdot x}{1+(M_1+M_4)^2\cdot x^4}}{2\cdot(M_1+M_5)\cdot(1+M_6)\cdot x+3\cdot(M_1+M_5)\cdot x^2}$$

$$= \lim_{x \to 0+0} \frac{2 \cdot (M_1 + M_4)}{(1 + (M_1 + M_4)^2 \cdot x^4) \cdot \Big(2 \cdot (M_1 + M_5) \cdot (1 + M_6) + 3 \cdot (M_1 + M_5) \cdot x\Big)}$$

$$= \frac{M_1 + M_4}{(M_1 + M_5) \cdot (1 + M_6)}.$$

Endergebnis:

$$\lim_{x \to 0+0} \left(\sin((M_1 + M_2) \cdot x)^{(M_1 + M_3) \cdot x} + \frac{\arctan((M_1 + M_4) \cdot x^2)}{(M_1 + M_5) \cdot x^2 \cdot (1 + M_6 + x)} \right) = 1 + \frac{M_1 + M_4}{(M_1 + M_5) \cdot (1 + M_6)}.$$
