Übungsblatt 7

Abgabe von $*$–Aufgaben am 4.12.2003 in der Übung.

Aufgabe 56: (Die Ableitung von exp, sin und cos. 0 Bonuspunkte)

a) Zeige $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{e^h-1}{h}=1$. Folgere hieraus $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{e^{z+h}-e^z}{h}=e^z\ \forall z\in\mathbb{C}$.

b) Zeige $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sin(h)}{h}=1$. Folgere hieraus $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sin(z+h)-\sin(z)}{h}=\cos(z)\ \forall z\in\mathbb{C}$.

c) Zeige $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1-\cos(h)}{h}=0$. Folgere hieraus $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\cos(z+h)-\cos(z)}{h}=-\sin(z)\ \forall z\in\mathbb{C}$.

Anleitung: Additionstheoreme.

Musterlösung:

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}&=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\cdot\Big(h+\frac{h^2}{2!}+\frac{h^3}{3!}+\cdots\Big)=\lim_{h\to 0}\Big(1+\frac{h}{2!}+\frac{h^2}{3!}+\cdots\Big)\\&=1+\lim_{h\to 0}\Big(\frac{h}{2!}+\frac{h^2}{3!}+\cdots\Big)=1+\lim_{h\to 0}h\cdot\Big(\underbrace{\frac{1}{2!}+\frac{h}{3!}+\cdots}_{f(h)}\Big).\end{aligned}$$

Die verbleibende Reihe $f(h)$ konvergiert nach den Rechenregeln (ihr Wert ist $\frac{1}{h}\cdot(\frac{e^h-1}{h}-1)$). Sie ist beschränkt in h: für $|h|\le 1$ folgt z.B.

$$|f(h)|\le\frac{1}{2!}+\frac{|h|}{3!}+\cdots<1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots=e$$

Damit folgt:

$$\frac{e^h-1}{h}=1+O(h)\quad\Rightarrow\quad\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=1.$$

(Dieser Grenzwert ist die Ableitung der exp-Funktion am Nullpunkt.) Mit der Funktionalgleichung $e^{z+h}=e^z\cdot e^h$ folgt

$$\lim_{h\to 0}\frac{e^{z+h}-e^z}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{e^z\cdot e^h-e^z}{h}=e^z\cdot\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=e^z.$$

Dieser Grenzwert liefert die Ableitung der exp-Funktion an jedem beliebigen Punkt $z\in\mathbb{C}$.

b)

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{\sin(h)}{h}&=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\cdot\Big(h-\frac{h^3}{3!}+\frac{h^5}{5!}+\cdots\Big)=\lim_{h\to 0}\Big(1-\frac{h^2}{3!}+\frac{h^4}{5!}+\cdots\Big)\\&=1-\lim_{h\to 0}\Big(\frac{h^2}{3!}-\frac{h^4}{5!}+\cdots\Big)=1-\lim_{h\to 0}h^2\cdot\Big(\underbrace{\frac{1}{3!}-\frac{h^2}{5!}+\cdots}_{f(h)}\Big).\end{aligned}$$

Die verbleibende Reihe $f(h)$ konvergiert nach den Rechenregeln (ihr Wert ist $\frac{1}{h^2}\cdot(\frac{\sin(h)}{h}-1)$). Sie ist beschränkt in h: für $|h|\le 1$ folgt z.B.

$$|f(h)|\le\frac{1}{3!}+\frac{|h|^2}{5!}+\cdots\le\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}+\cdots<1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\cdots=e$$

Damit folgt:

$$\frac{\sin(h)}{h} = 1 + O(h^2) \quad \Rightarrow \quad \lim_{h\to 0} \frac{\sin(h)}{h} = 1.$$

Analog (für c):

$$\lim_{h\to 0} \frac{1-\cos(h)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \cdot \left(\frac{h^2}{2!} - \frac{h^4}{4!} + \cdots\right) = \lim_{h\to 0} \left(\frac{h}{2!} - \frac{h^3}{4!} + \cdots\right) = \lim_{h\to 0} h \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{2!} - \frac{h^2}{4!} + \cdots\right)}_{f(h)},$$

wo die verbleibende Reihe $f(h)$ wiederum beschränkt ist (mit den selben Argumenten wie oben gilt $|f(h)| \leq e$ für $|h| < 1$). Es folgt:

$$\frac{1-\cos(h)}{h} = O(h) \quad \Rightarrow \quad \lim_{h\to 0} \frac{1-\cos(h)}{h} = 0.$$

Mit den Additionstheoremen

$$\sin(z+h) = \sin(z)\cdot\cos(h) + \cos(z)\cdot\sin(h),$$
$$\cos(z+h) = \cos(z)\cdot\cos(h) - \sin(z)\cdot\sin(h)$$

folgt

$$\frac{\sin(z+h)-\sin(z)}{h} = \frac{\sin(z)\cdot\cos(h)+\cos(z)\cdot\sin(h)-\sin(z)}{h} = \sin(z)\cdot\frac{\cos(h)-1}{h} + \cos(z)\cdot\frac{\sin(h)}{h},$$
$$\frac{\cos(z+h)-\cos(z)}{h} = \frac{\cos(z)\cdot\cos(h)-\sin(z)\cdot\sin(h)-\cos(z)}{h} = \cos(z)\cdot\frac{\cos(h)-1}{h} - \sin(z)\cdot\frac{\sin(h)}{h}.$$

Die obigen Ergebnisse liefern

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin(z+h)-\sin(z)}{h} = \cos(z), \quad \lim_{h\to 0} \frac{\cos(z+h)-\cos(z)}{h} = -\sin(z).$$

Diese Grenzwerte liefern die Ableitung der Sinus- bzw. Cosinus-Funktion.

Aufgabe 57*: (Differentiation, 5 + 5 + 5 + 5 + 5 Bonuspunkte)

Berechne die Ableitung von

$$a)\ \frac{1+x^2}{2+x^2}, \quad b)\ \sin(x^2), \quad c)\ \cos(\pi - x^3), \quad d)\ \sin(x^2\cdot e^x), \quad e)\ \sin^2(x)+\cos^2(x).$$

Musterlösung:

a)

$$\frac{d}{dx}\ \frac{1+x^2}{2+x^2} = \frac{2\cdot x\cdot(2+x^2) - (1+x^2)\cdot 2\cdot x}{(2+x^2)^2} = \frac{2\cdot x}{(2+x^2)^2}.$$

b):

$$\frac{d}{dx}\ \sin(x^2) = \cos(x^2)\cdot 2\cdot x.$$

c)

$$\frac{d}{dx}\ \cos(\pi - x^3) = (-\sin(\pi - x^3))\cdot(-3\cdot x^2) = 3\cdot x^2\cdot\sin(x^3).$$

d)

$$\frac{d}{dx}\ \sin(x^2\cdot e^x) = \cos(x^2\cdot e^x)\cdot(2\cdot x\cdot e^x + x^2\cdot e^x) = (2\cdot x + x^2)\cdot e^x\cdot\cos(x^2\cdot e^x).$$

e)

$$\frac{d}{dx}\ (\sin^2(x)+\cos^2(x)) = 2\cdot\sin(x)\cdot\cos(x) + 2\cdot\cos(x)\cdot(-\sin(x)) = 0.$$

Dies ist verständlich, da $\frac{d}{dx}\ (\sin^2(x)+\cos^2(x)) = \frac{d}{dx}\ 1$.

Aufgabe 58*: (Differentiation. 10 Bonuspunkte)

Man begebe sich ins automatische Abgabe-Tool `bourbaki.upb.de/mfp1`. Diese Aufgabe wird dort als 'Miniprojekt 58' bezeichnet. Es wird dort nach der Ableitung eines Ausdrucks gefragt. Liefere die Ableitung im Web-Formular ab.
Es gibt drei Abgabeversuche! Abgaben bis Do, 4.12., 23::59::59 Uhr.
Relevante MuPAD-Funktionen zur Kontrolle: `diff`.

Musterlösung:
Die generierte Aufgabe lautet: Berechne die Ableitung von

$$f(x) = M_2 + e^{-(M_1+M_3)\cdot x^2} + M_4 \cdot \sin(x + M_5 \cdot e^{M_6 \cdot x}),$$

wobei $M_1, \ldots, M_7$ die üblichen Ziffern der Matrikelnummer sind.
Lösung:

```
>> f:= M2 + exp(-(M1 + M3)*x^2) + M4 * sin(x + M5*exp(M6*x)):
>> diff(f, x)

M4 cos(x + M5 exp(M6 x)) (M5 M6 exp(M6 x) + 1) -

                 2
   2 x exp(- x  (M1 + M3)) (M1 + M3)
```

Aufgabe 59: (Differentiation. O Bonuspunkte)

Sind die Funktionen

$$a) \quad f(x) = \begin{cases} x \cdot \sin(\frac{1}{x}) & \text{für} \quad x \neq 0, \\ 0 & \text{für} \quad x = 0 \end{cases}, \qquad b) \quad f(x) = \begin{cases} x^2 \cdot \sin(\frac{1}{x}) & \text{für} \quad x \neq 0, \\ 0 & \text{für} \quad x = 0 \end{cases}$$

am Nullpunkt differenzierbar?

Musterlösung:
a) Der Grenzwert des Differenzenquotienten am Nullpunkt

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h \cdot \sin(\frac{1}{h})}{h} = \lim_{h\to 0} \sin\left(\frac{1}{h}\right)$$

existiert nicht: für die Nullfolge $h_n = \frac{1}{n\cdot\pi}$ ergibt sich

$$\lim_{n\to\infty} \sin\left(\frac{1}{h_n}\right) = \lim_{n\to\infty} \sin(n \cdot \pi) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0,$$

während sich für die Nullfolge $h_n = \frac{1}{(2\cdot n + \frac{1}{2})\cdot\pi}$ ein anderer Grenzwert ergibt:

$$\lim_{n\to\infty} \sin\left(\frac{1}{h_n}\right) = \lim_{n\to\infty} \sin\left(\left(2 \cdot n + \frac{1}{2}\right) \cdot \pi\right) = \lim_{n\to\infty} 1 = 1.$$

b) Der Grenzwert des Differenzenquotienten am Nullpunkt

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2 \cdot \sin(\frac{1}{h})}{h} = \lim_{h\to 0} h \cdot \sin\left(\frac{1}{h}\right) = 0$$

existiert (denn $\sin(\frac{1}{h})$ ist beschränkt).

Aufgabe 60*: (Die Produktregel. 20 Bonuspunkte)
Seien $f(x)$ und $g(x)$ genügend oft differenzierbar. Beweise durch Induktion nach n:

$$\frac{d^n}{dx^n} f(x) \cdot g(x) \;=\; \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot f^{(n-k)}(x) \cdot g^{(k)}(x)$$

mit den durch

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}, \quad k = 1, \ldots, n$$

definierten Binomialkoeffizienten des Pascalschen Dreiecks.

Musterlösung:
Induktionsstart: Für $n = 0$ ist die Behauptung $f(x) \cdot g(x) = f(x) \cdot g(x)$ sicherlich richtig.
Induktionsschritt $n \to n + 1$: Es gelte

$$\frac{d^n}{dx^n} f(x) \cdot g(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot f^{(n-k)}(x) \cdot g^{(k)}(x).$$

Durch eine weitere Ableitung erhält man:

$$\begin{aligned}
\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} f(x) \cdot g(x) &= \frac{d}{dx} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot f^{(n-k)}(x) \cdot g^{(k)}(x) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot f^{(n+1-k)}(x) \cdot g^{(k)}(x) + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot f^{(n-k)}(x) \cdot g^{(k+1)}(x) \\
&= f^{(n+1)}(x) \cdot g(x) + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \cdot f^{(n+1-k)}(x) \cdot g^{(k)}(x) \\
&\qquad + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \cdot f^{(n-k)}(x) \cdot g^{(k+1)}(x) + f(x) \cdot g^{(n+1)}(x) \\
&= f^{(n+1)}(x) \cdot g(x) + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \cdot f^{(n+1-k)}(x) \cdot g^{(k)}(x) \\
&\qquad + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} \cdot f^{(n+1-k)}(x) \cdot g^{(k)}(x) + f(x) \cdot g^{(n+1)}(x) \\
&= f^{(n+1)}(x) \cdot g(x) + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right) \cdot f^{(n+1-k)}(x) \cdot g^{(k)}(x) + f(x) \cdot g^{(n+1)}(x) \\
&= f^{(n+1)}(x) \cdot g(x) + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} \cdot f^{(n+1-k)}(x) \cdot g^{(k)}(x) + f(x) \cdot g^{(n+1)}(x) \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \cdot f^{(n+1-k)}(x) \cdot g^{(k)}(x).
\end{aligned}$$

Aufgabe 61: (Implizite Differentiation. 0 Bonuspunkte)
Eine Funktion $y = f(x)$ ist als Lösung der Gleichung

$$y^3 + x^2 \cdot y = e^{(x^2)}$$

definiert. Offensichtlich gilt $f(0) = 1$. Bestimme $f'(0)$.
Anleitung: differenziere die Identität $f(x)^3 + x^2 \cdot f(x) = e^{(x^2)}$ nach x. Es ergibt sich eine Gleichung für $f'(x)$.

Musterlösung:
Für $x = 0$ ist $y = f(0)$ durch die Gleichung $y^3 + 0 \cdot y = e^0 = 1$ definiert, woraus $y = f(0) = 1$ folgt. Durch Differentiation der definierenden Gleichung erhält man:

$$f(x)^3 + x^2 \cdot f(x) = e^{(x^2)} \quad \Rightarrow \quad 3 \cdot f(x)^2 \cdot f'(x) + 2 \cdot x \cdot f(x) + x^2 \cdot f'(x) = 2 \cdot x \cdot e^{(x^2)}.$$

Mit $x = 0$, $f(0) = 1$ ergibt sich

$$3 \cdot f(0)^2 \cdot f'(0) + 2 \cdot 0 \cdot f(0) + 0^2 \cdot f'(0) = 2 \cdot 0 \cdot e^{(0^2)} \quad \Rightarrow \quad 3 \cdot f'(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad f'(0) = 0.$$

Aufgabe 62*: (Implizite Differentiation. 10 Bonuspunkte)
Man begebe sich ins automatische Abgabe-Tool `bourbaki.upb.de/mfp1`. Diese Aufgabe wird dort als 'Miniprojekt 62' bezeichnet. Es wird dort nach der Ableitung einer implizit definierten Funktion gefragt. Liefere den Wert der Funktion und ihre Ableitung im Web-Formular ab.
Es gibt drei Abgabeversuche! Abgaben bis Do, 4.12., 23::59::59 Uhr.
Anleitung: siehe Aufgabe 61.

Musterlösung:
Die generierte Aufgabe ist: Betrachte die durch die Gleichung

$$e^{(M_1+M_2)\cdot(y-M_3)} + M_1 - 1 + M_4 \cdot y = (M_1 + M_3 \cdot M_4) \cdot e^{x-M_5}$$

definierte Funktion $y = f(x)$. Berechne $f(M_5)$ und $f'(M_5)$.
Hierbei sind $M_1, \ldots, M_7$ die üblichen Ziffern der Matrikelnummer.

Für $x = M_5$ ist $y = f(M_5)$ durch die Gleichung

$$e^{(M_1+M_2)\cdot(y-M_3)} + M_1 - 1 + M_4 \cdot y = M_1 + M_3 \cdot M_4 \quad \Rightarrow \quad e^{(M_1+M_2)\cdot(y-M_3)} - 1 = M_4 \cdot (M_3 - y)$$

gegeben. Die Lösung ist $\boxed{y = f(M_5) = M_3}$. Durch Ableitung von

$$e^{(M_1+M_2)\cdot(f(x)-M_3)} + M_1 - 1 + M_4 \cdot f(x) = (M_1 + M_3 \cdot M_4) \cdot e^{x-M_5}$$

erhält man

$$(M_1 + M_2) \cdot f'(x) \cdot e^{(M_1+M_2)\cdot(f(x)-M_3)} + M_4 \cdot f'(x) = (M_1 + M_3 \cdot M_4) \cdot e^{x-M_5}.$$

Mit $x = M_5$, $f(x) = f(M_5) = M_3$ ergibt sich die Gleichung

$$(M_1 + M_2) \cdot f'(M_5) + M_4 \cdot f'(M_5) = M_1 + M_3 \cdot M_4 \quad \Rightarrow \quad \boxed{f'(M_5) = \frac{M_1 + M_3 \cdot M_4}{M_1 + M_2 + M_4}.}$$

Aufgabe 63: (Differentiation von Umkehrfunktionen. 0 Bonuspunkte)
In Definition 5.23 des Skripts wurde $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ sowie die Umkehrfunktion $\arctan(x)$ eingeführt.
a) Zeige: $\frac{d}{dx}\tan(x) = 1 + \tan^2(x)$.
b) Berechne die Ableitung von $\arctan(x)$.
c) Berechne die Ableitung von $\arctan(x) + \arctan(1/x)$. Erklärung?

Musterlösung:
a)

$$\frac{d}{dx}\,\frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \frac{\cos^2(x) - \sin(x)\cdot(-\sin(x))}{\cos^2(x)} = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}.$$

b) Sei $f = \tan$, $f^{-1} = \arctan$, $x = \tan(y)$, $y = \arctan(x)$. Es gilt

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{1 + \tan^2(y)} = \frac{1}{1 + \tan^2(\arctan(x))} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

c)

$$\frac{d}{dx}\Big(\arctan(x) + \arctan(1/x)\Big) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+(1/x)^2}\cdot\Big(-\frac{1}{x^2}\Big) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2+1} = 0.$$

Dies wird verständlich wegen der in Aufgabe 17a.d) auf Blatt 6a herzuleitenden Identität

$$\arctan(x) + \arctan(1/x) = \operatorname{sign}(x)\cdot\frac{\pi}{2}.$$

Aufgabe 64*: (Differentiation von Umkehrfunktionen. 20 Bonuspunkte)
Man begebe sich ins automatische Abgabe-Tool `bourbaki.upb.de/mfp1`. Diese Aufgabe wird dort als 'Miniprojekt 64' bezeichnet. Es wird dort nach Ableitungswerten einer Umkehrfunktion gefragt. Liefere die Ableitungen im Web-Formular ab.
Es gibt drei Abgabeversuche! Abgaben bis Do, 4.12., 23::59::59 Uhr.

Musterlösung:
Die generierte Aufgabe ist: Finde eine Formel, um die zweite Ableitung der Umkehrfunktion f^{-1} einer invertierbaren Funktion f an einer Stelle x durch Ableitungen von f an der Stelle $y = f^{-1}(x)$ auszudrücken. Berechne $(f^{-1})''(M_2 + M_3)$ für

$$f(y) = M_1\cdot y + M_2 + M_3\cdot e^{M_4\cdot y}.$$

Hierbei sind M_1, …, M_7 die üblichen Ziffern der Matrikelnummer (wobei einige der Ziffern intern umdefiniert werden).

Ableiten der Identität

$$(f^{-1})(f(y)) = y$$

nach y liefert über die Kettenregel

$$(f^{-1})'(f(y))\cdot f'(y) = 1.$$

Erneutes Ableiten liefert

$$(f^{-1})''(f(y)) \cdot f'(y) \cdot f'(y) + (f^{-1})'(f(y)) \cdot f''(y) = 0.$$

Mit $(f^{-1})'(f(y)) = 1/f'(y)$ folgt

$$(f^{-1})''(f(y)) = -\frac{(f^{-1})'(f(y)) \cdot f''(y)}{f'(y)^2} = -\frac{f''(y)}{f'(y)^3}.$$

Sei $g = f^{-1}$, $x = f(y)$, $y = g(x)$:

$$g''(x) = -\frac{f''(g(x))}{f'(g(x))^3}.$$

Für

$$f(y) = M_1 \cdot y + M_2 + M_3 \cdot e^{M_4 \cdot y},$$
$$f'(y) = M_1 + M_3 \cdot M_4 \cdot e^{M_4 \cdot y},$$
$$f''(y) = M_3 \cdot M_4^2 \cdot e^{M_4 \cdot y}$$

ergibt sich

$$g''(x) = -\frac{M_3 \cdot M_4^2 \cdot e^{M_4 \cdot g(x)}}{\left(M_1 + M_3 \cdot M_4 \cdot e^{M_4 \cdot g(x)}\right)^3}.$$

Mit $f(0) = M_2 + M_3 \;\Rightarrow\; g(M_2 + M_3) = 0$ folgt

$$g''(M_2 + M_3) = -\frac{M_3 \cdot M_4^2}{(M_1 + M_3 \cdot M_4)^3}.$$

Abzugeben waren:

$$g(M_2 + M_3) = 0, \quad g'(M_2 + M_3) = \frac{1}{M_1 + M_3 \cdot M_4}, \quad g''(M_2 + M_3) = -\frac{M_3 \cdot M_4^2}{(M_1 + M_3 \cdot M_4)^3}.$$

Aufgabe 65*: (Mittelwertsatz. 10 Bonuspunkte)

Sei $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion, die $f'(x) = 0$ für alle $x \in [a, b]$ erfüllt. Zeige, dass f konstant ist.

Musterlösung:

Der Mittelwertsatz auf einem Intervall $[a, x] \subset [a, b]$ besagt

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(\xi) = 0$$

(mit irgendeinem Zwischenwert ξ). Es folgt $f(x) = f(a)$ für jedes $x \in [a, b]$.
