Ü b u n g s b l a t t 6a

Hier ist etwas Zusatzmaterial zu speziellen Funktionen. Zusammen mit Blatt 6 ist dies mehr Material als man sich sinnvollerweise innerhalb einer Woche anschauen sollte. Meine Empfehlung: man konzentriere sich auf Blatt 6 und benutze dieses Zusatzmaterial optional –je nach Ehrgeiz– zur weiteren Übung jetzt oder später (z.B. für die Prüfungsvorbereitung). Es wird hierzu wie für alle Übungsaufgaben Musterlösungen geben.

Aufgabe 17a: (Spezielle Funktionen: tan und arctan. Mühselige technische Puzzelei.)

a) Wir führen die Tangens-Funktion $\tan(x) = \sin(x)/\cos(x)$ ein. Sie ist für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{\pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\cdot\pi}{2}, \pm\frac{5\cdot\pi}{2}, \dots\}$ definiert (an diesen Stellen gilt $\cos(x) \neq 0$). Zeige, dass sie die Symmetrie $\tan(-x) = -\tan(x)$ und die Periode π hat: $\tan(x+\pi) = \tan(x)$. Zeige, dass das Additionstheorem

$$\tan(x+y) = \frac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x)\cdot\tan(y)}$$

für alle x, y mit $x, y, x+y \notin \{\pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\cdot\pi}{2}, \pm\frac{5\cdot\pi}{2}, \dots\}$ gilt.

b) Zeige, dass für alle x, y im Intervall $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ gilt:

$$\tan(x)\cdot\tan(y) \begin{cases} = 1 & \text{für} \quad x+y = \pm\frac{\pi}{2}, \\ > 1 & \text{für} \quad x+y > \frac{\pi}{2} \text{ oder } x+y < -\frac{\pi}{2}, \\ > 1 & \text{für} \quad (x<0 \text{ und } x+y<\frac{\pi}{2}) \text{ oder } (x>0 \text{ und } x+y>-\frac{\pi}{2}), \\ < 1 & \text{für} \quad (x\geq 0 \text{ und } x+y<\frac{\pi}{2}) \text{ oder } (x\leq 0 \text{ und } x+y>-\frac{\pi}{2}). \end{cases}$$

Verwende hierzu ohne Beweis, dass $\tan(y)$ auf dem "Basisintervall" $y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ streng monoton steigt. Achtung: hier sind viele Fallunterscheidungen durchzuführen.

c) Schränkt man $\tan(x)$ auf das Basisinterval $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ein, so ist der Tangens wegen der strengen Monotonie dort invertierbar. Die (wiederum streng monoton steigende) Umkehrfunktion wird als Arcus Tangens bezeichnet:

$$\arctan : \mathbb{R} \mapsto \Big(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\Big).$$

Visualisiere MuPADs `arctan` mit MuPADs `plotfunc2d`. Bestimme $\arctan(0)$, $\arctan(\pm 1)$ und $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \arctan(x)$.

d) Zeige, dass die Identität

$$\arctan(X) + \arctan(Y) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{X+Y}{1-X\cdot Y}\right) & \text{für} \quad X\cdot Y < 1, \\ \arctan\left(\frac{X+Y}{1-X\cdot Y}\right) + \pi & \text{für} \quad X\cdot Y > 1,\ X>0,\ Y>0, \\ \arctan\left(\frac{X+Y}{1-X\cdot Y}\right) - \pi & \text{für} \quad X\cdot Y > 1,\ X<0,\ Y<0 \end{cases}$$

für alle $X, Y \in \mathbb{R}$ mit $X\cdot Y \neq 1$ gilt. Welche Identität gilt für $Y = \frac{1}{X}$?

Anleitung: benutze b).

Musterlösung:

a)

$$\tan(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\sin(x)}{\cos(x)} = -\tan(x),$$

$$\tan(x+\pi) = \frac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} = \frac{\sin(x)\cdot\cos(\pi)+\cos(x)\cdot\sin(\pi)}{\cos(x)\cdot\cos(\pi)-\sin(x)\cdot\sin(\pi)} = \frac{-\sin(x)}{-\cos(x)} = \tan(x),$$

$$\tan(x+y) = \frac{\sin(x+y)}{\cos(x+y)} = \frac{\sin(x)\cdot\cos(y)+\cos(x)\cdot\sin(y)}{\cos(x)\cdot\cos(y)-\sin(x)\cdot\sin(y)}$$

$$= \frac{\cos(y)\cdot\cos(x)\cdot\left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}+\frac{\sin(y)}{\cos(y)}\right)}{\cos(x)\cdot\cos(y)\cdot\left(1-\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\cdot\frac{\sin(y)}{\cos(y)}\right)} = \frac{\tan(x)+\tan(y)}{1-\tan(x)\cdot\tan(y)}.$$

b) Viele Fallunterscheidungen:

Sei $y = \pm\frac{\pi}{2} - x$:

Aus den Additionstheoremen für den Sinus und Cosinus und den speziellen Werten $\sin(\pm\frac{\pi}{2}) = \pm 1$, $\cos(\pm\frac{\pi}{2}) = 0$ ergibt sich:

$$\tan(x)\cdot\tan(y) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \cdot \frac{\sin(\pm\frac{\pi}{2}-x)}{\cos(\pm\frac{\pi}{2}-x)} = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \cdot \frac{\sin(\pm\frac{\pi}{2})\cdot\cos(x)-\cos(\pm\frac{\pi}{2})\cdot\sin(x)}{\cos(\pm\frac{\pi}{2})\cdot\cos(x)+\sin(\pm\frac{\pi}{2})\cdot\sin(x)}$$

$$= \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \cdot \frac{\pm\cos(x)}{\pm\sin(x)} = 1.$$

Sei $x + y > \frac{\pi}{2}$:

Da $y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ vorausgesetzt wurde, impliziert $x + y > \frac{\pi}{2}$, dass $x > 0$ gelten muß. Damit gilt $\tan(x) > 0$. Mit $\tan(x)\cdot\tan(y) = 1$ für $y = \frac{\pi}{2} - x$ folgt aus der strengen Monotonie von $\tan(y)$ das Resultat $\tan(x)\cdot\tan(y) > 1$ für $y > \frac{\pi}{2} - x$.

Sei $x + y < -\frac{\pi}{2}$:

Analog impliziert $x + y < -\frac{\pi}{2}$, dass $x < 0$ gelten muß. Damit gilt $\tan(x) < 0$. Mit $\tan(x)\cdot\tan(y) = 1$ für $y = -\frac{\pi}{2} - x$ folgt aus der strengen Monotonie von $\tan(y)$ das Resultat $\tan(x)\cdot\tan(y) > 1$ für $y < -\frac{\pi}{2} - x$.

Sei $x < 0,\ x + y < \frac{\pi}{2}$:

Für $-\frac{\pi}{2} < x < 0$, also $\tan(x) < 0$, folgt aus $\tan(x)\cdot\tan(y) = 1$ für $y = \frac{\pi}{2} - x$ und der strengen Monotonie von $\tan(y)$ das Ergebnis $\tan(x)\cdot\tan(y) > 1$ für $y < \frac{\pi}{2} - x$.

Sei $x > 0,\ x + y > -\frac{\pi}{2}$:

Für $0 < x < \frac{\pi}{2}$, also $\tan(x) > 0$, folgt aus $\tan(x)\cdot\tan(y) = 1$ für $y = -\frac{\pi}{2} - x$ und der strengen Monotonie von $\tan(y)$ das Ergebnis $\tan(x)\cdot\tan(y) > 1$ für $y > -\frac{\pi}{2} - x$.

Sei $x \geq 0,\ x + y < \frac{\pi}{2}$:

Für $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$, also $\tan(x) \geq 0$, folgt aus $\tan(x)\cdot\tan(y) = 1$ für $y = \frac{\pi}{2} - x$ und der strengen Monotonie von $\tan(y)$ das Ergebnis $\tan(x)\cdot\tan(y) < 1$ für $y < \frac{\pi}{2} - x$.

Sei $x \leq 0,\ x + y > -\frac{\pi}{2}$:

Für $-\frac{\pi}{2} < x \leq 0$, also $\tan(x) \leq 0$, folgt aus $\tan(x)\cdot\tan(y) = 1$ für $y = -\frac{\pi}{2} - x$ und der strengen Monotonie von $\tan(y)$ das Ergebnis $\tan(x)\cdot\tan(y) < 1$ für $y > -\frac{\pi}{2} - x$.

c) Offensichtlich gilt $\arctan(0) = 0$, denn $\tan(0) = 0$. Für $x = \frac{\pi}{4}$ gilt nach Aufgabe 65.b)

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \quad\Rightarrow\quad \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 \quad\Rightarrow\quad \arctan(1) = \frac{\pi}{4}.$$

Mit $\arctan(-x) = -\arctan(x)$ folgt $\arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}$.

Für $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ gilt $\lim\limits_{x\to\pm\pi/2\mp 0} \tan(x) = \pm\infty$. Durch Spiegelung des Graphen von $\tan(x)$ auf dem Basisintervall an der Winkelhalbierenden erkennt man sofort:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \arctan(x) = \pm\frac{\pi}{2}.$$

d) Setze $x = \arctan(X)$, $y = \arctan(Y)$ in die Identität aus a) ein:

$$\tan(x+y) = \frac{\tan(x)+\tan(y)}{1-\tan(x)\cdot\tan(y)} \quad \Rightarrow \quad \tan(x+y) = \frac{X+Y}{1-X\cdot Y}.$$

<u>Sei $X \cdot Y < 1$:</u>
Nach b) folgt $|x+y| < \frac{\pi}{2}$, wenn $\tan(x)\cdot\tan(y) = X\cdot Y < 1$ gilt, denn in b) wurde gezeigt, dass $\tan(x)\cdot\tan(y) \geq 1$ gilt für $|x+y| \geq \frac{\pi}{2}$. Damit liegt $x+y$ im Basisintervall und durch Anwenden von arctan folgt:

$$x+y = \arctan\left(\frac{X+Y}{1-X\cdot Y}\right) \quad \Rightarrow \quad \arctan(X)+\arctan(Y) = \arctan\left(\frac{X+Y}{1-X\cdot Y}\right).$$

<u>Sei $X\cdot Y > 1,\ X > 0,\ Y > 0$:</u>
Aus $X > 0, Y > 0$ folgt $x > 0, y > 0$. Mit b) folgt aus $X\cdot Y > 1$, dass $x+y > \frac{\pi}{2}$ gelten muss, denn in b) wurde gezeigt, dass $\tan(x)\cdot\tan(y) = X\cdot Y \leq 1$ für $x > 0$, $x+y \leq \frac{\pi}{2}$ gilt. Es folgt $x+y-\pi \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$ und damit

$$\arctan(\tan(x+y)) = \arctan(\tan(x+y-\pi)) = x+y-\pi,$$

da $x+y-\pi$ im Basisintervall liegt. Aus

$$\tan(x+y) = \frac{X+Y}{1-X\cdot Y}$$

folgt damit

$$x+y = \arctan(X)+\arctan(Y) = \arctan\left(\frac{X+Y}{1-X\cdot Y}\right) + \pi.$$

<u>Sei $X\cdot Y > 1,\ X < 0,\ Y < 0$:</u>
Aus $X < 0, Y < 0$ folgt $x < 0, y < 0$. Mit b) folgt aus $X\cdot Y > 1$, dass $x+y < -\frac{\pi}{2}$ gelten muss, denn in b) wurde gezeigt, dass $\tan(x)\cdot\tan(y) = X\cdot Y \leq 1$ für $x < 0$, $x+y \geq -\frac{\pi}{2}$ gilt. Es folgt $x+y+\pi \in (0, \frac{\pi}{2})$ und damit

$$\arctan(\tan(x+y)) = \arctan(\tan(x+y+\pi)) = x+y+\pi,$$

da $x+y+\pi$ im Basisintervall liegt. Aus

$$\tan(x+y) = \frac{X+Y}{1-X\cdot Y}$$

folgt damit

$$x+y = \arctan(X)+\arctan(Y) = \arctan\left(\frac{X+Y}{1-X\cdot Y}\right) - \pi.$$

<u>Sei $X\cdot Y = 1,\ X > 0,\ Y > 0$:</u>
Aus $X > 0, Y > 0$ folgt $x > 0, y > 0$. Nach b) kann für $X\cdot Y = 1$ nur $x+y = \pm\frac{\pi}{2}$ gelten, wobei nur das positive Vorzeichen in Frage kommt. Also

$$x+y = \arctan(X)+\arctan\left(\frac{1}{X}\right) = \frac{\pi}{2} \quad \text{für} \quad X > 0.$$

<u>Sei $X\cdot Y = 1,\ X < 0,\ Y < 0$:</u>

Aus $X < 0, Y < 0$ folgt $x < 0, y < 0$. Nach b) kann für $X \cdot Y = 1$ nur $x + y = \pm\frac{\pi}{2}$ gelten, wobei nur das negative Vorzeichen in Frage kommt. Also

$$x + y = \arctan(X) + \arctan\left(\frac{1}{X}\right) = -\frac{\pi}{2} \quad \text{für} \quad X < 0.$$

Die letzten beiden Fälle lassen sich zusammenfassen zu

$$\arctan(X) + \arctan\left(\frac{1}{X}\right) = \operatorname{sign}(X) \cdot \frac{\pi}{2} \quad \text{für} \quad X \neq 0.$$
