Übungsblatt 6

Abgabe von ∗–Aufgaben am 27.11.2003 in der Übung.

Aufgabe 47*: (O-Kalkül, spezielle Funktionen. 10 + 10 + 10 Bonuspunkte)
Zeige:

$$a)\quad \frac{\sin(x^2)}{x\cdot\cos(x^3)} = O(x) \text{ im Limes } x \to 0,$$
$$b)\quad \frac{e^x\cdot(1-\cos(x^2))}{x^4} = O(1) \text{ im Limes } x \to 0,$$
$$c)\quad \frac{\sin(x)}{x} = O\Big(\frac{1}{x}\Big) \text{ im Limes } x \to \infty.$$

Musterlösung:
a) Es ist zu zeigen, dass

$$\frac{\sin(x^2)/(x\cdot\cos(x^3))}{x} = \frac{\sin(x^2)}{x^2\cdot\cos(x^3)}$$

auf einer Umgebung von $x=0$ beschränkt ist. Es gilt

$$\sin(x^2) = (x^2) - \frac{(x^2)^3}{3!} + \frac{(x^2)^5}{5!} + \cdots = x^2\cdot\Big(\underbrace{1 - \frac{x^4}{3!} + \frac{x^8}{5!} - \cdots}_{f(x)}\Big).$$

Die konvergierende Reihe $f(x)$ ist auf einer Umgebung von $x=0$ beschränkt. Z.B. gilt für $|x|\le 1$

$$|f(x)| = \Big|1 - \frac{x^4}{3!} + \frac{x^8}{5!} - \cdots\Big| \le 1 + \frac{|x|^4}{3!} + \frac{|x|^8}{5!} + \cdots \le 1 + \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} + \cdots$$
$$\le 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \cdots = e.$$

Damit ist

$$\frac{\sin(x^2)}{x^2\cdot\cos(x^3)} = \frac{f(x)}{\cos(x^3)}$$

auf einer Umgebung von $x=0$ beschränkt (beachte, dass die stetige Funktion $\cos(x^3)$ in der Nähe von $x=0$ Werte in der Nähe der 1 annimmt).

b) Es ist zu zeigen, dass

$$\frac{e^x\cdot(1-\cos(x^2))}{x^4}$$

auf einer Umgebung von $x=0$ beschränkt ist. Es gilt

$$1-\cos(x^2) = 1 - \Big(1 - \frac{(x^2)^2}{2!} + \frac{(x^2)^4}{4!} + \cdots\Big) = x^4\cdot\Big(\underbrace{\frac{1}{2!} - \frac{x^4}{4!} + \cdots}_{f(x)}\Big).$$

Die konvergierende Reihe $f(x)$ ist auf einer Umgebung von $x=0$ beschränkt. Z.B. gilt für $|x|\le 1$

$$|f(x)| = \Big|\frac{1}{2!} - \frac{x^4}{4!} + \cdots\Big| \le \frac{1}{2!} + \frac{|x|^4}{4!} + \cdots \le \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} + \cdots \le 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots = e.$$

Damit ist

$$\frac{e^x \cdot (1 - \cos(x^2))}{x^4} = e^x \cdot f(x)$$

auf einer Umgebung von $x = 0$ beschränkt (beachte, dass die stetige Funktion e^x in der Nähe von $x = 0$ Werte in der Nähe der 1 annimmt).

c) Es ist zu zeigen, dass $\dfrac{\sin(x)/x}{1/x} = \sin(x)$ für alle hinreichend großen x beschränkt ist. In der Tat gilt $|\sin(x)| \leq 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 48*: (O-Kalkül, spezielle Funktionen. 10 Bonuspunkt)
Man begebe sich ins automatische Abgabe-Tool `bourbaki.upb.de/mfp1`. Diese Aufgabe wird dort als 'Miniprojekt 48' bezeichnet. Es wird gefragt, ob (mit gewissen Werten für α, β)

$$1 - \cos(x^\alpha) = O(x^\beta) \quad \text{im Limes } x \to 0$$

gilt. Liefere die Antwort `TRUE` oder `FALSE` im Web-Formular ab.
Es gibt nur einen Abgabeversuch! Abgaben bis Do, 27.11., 23::59::59 Uhr.
Relevante MuPAD-Funktionen zur Kontrolle: `taylor, series`.

Musterlösung:
Die generierte Aufgabe ist: Seien $M_1, \ldots, M_7$ die üblichen Ziffern der Matrikelnummer. Gilt

$$1 - \cos(x^{M_2+M_3+M_4}) = O(x^{3\cdot M_4+4\cdot M_5-M_6}) \quad \text{im Limes } x \to 0 \text{ ?}$$

Sei $\alpha = M_2 + M_3 + M_4$, $\beta = 3 \cdot M_4 + 4 \cdot M_5 - M_6$. Es ist zu prüfen, ob

$$\frac{1-\cos(x^\alpha)}{x^\beta} = \frac{1}{x^\beta} \cdot \Big(1 - \Big(1 - \frac{(x^\alpha)^2}{2!} + \frac{(x^\alpha)^4}{4!} - \cdots\Big)\Big) = x^{2\alpha-\beta} \cdot \Big(\underbrace{\frac{1}{2!} - \frac{x^{2\,\alpha}}{4!} + \cdots}_{f(x)}\Big)$$

beschränkt ist. Die verbleibende Reihe $f(x)$ ist beschränkt (analog zu den Beweisen für Aufgabe 47). Damit ist der obige Ausdruck in einer Umgebung von $x = 0$ genau dann beschränkt, wenn $2\alpha \geq \beta$ gilt. Die Aussage ist damit `richtig` für

$$2 \cdot M_2 + 2 \cdot M_3 + 2 \cdot M_4 \geq 3 \cdot M_4 + 4 \cdot M_5 - M_6$$

also

$$2 \cdot M_2 + 2 \cdot M_3 - M_4 - 4 \cdot M_5 + M_6 \geq 0.$$

Aufgabe 49*: (O-Kalkül, spezielle Funktionen. 10 + 10 Bonuspunkte)
Zeige:

$$a) \quad x \cdot \ln(|x|) = o(1) \quad \text{im Limes } x \to 0, \qquad b) \quad \ln(x) = o(x) \quad \text{im Limes } x \to \infty.$$

Anleitung: Mit $x_0 = g(y_0)$ gilt offensichtlich $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{y\to y_0} f(g(y))$, wenn man die Existenz der Grenzwerte voraussetzt und $g(y)$ an der Stelle y_0 stetig ist. Weiterhin: Die Existenz des rechten Grenzwerts impliziert die Existenz des linken Grenzwerts, wenn zusätzlich g auf einer Umgebung von y_0 streng monoton ist. Das gilt auch für $x_0 = \pm\infty$ und/oder $y_0 = \pm\infty$. Benutze dies (ohne Beweis) und setze hier $x = e^{-y}$ bzw. $x = e^y$. Betrachte statt des Limes in x einen entsprechenden Limes in y.

Musterlösung:
a) Es ist zu zeigen, dass $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ für $f(x) = x \cdot \ln(|x|) = 0$ gilt. Wegen $f(-x) = -f(x)$ braucht nur $x > 0$ betrachtet zu werden, also reicht es,

$$\lim_{x\to 0+0} x \cdot \ln(x) = 0$$

zu zeigen. Wir setzen $x = e^{-y}$ und benutzen

$$\lim_{x\to 0+0} x \cdot \ln(x) = \lim_{y\to\infty} e^{-y} \cdot \ln(e^{-y}) = \lim_{y\to\infty} -\frac{y}{e^y}.$$

Für $y > 0$ gilt mit $e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2} + \cdots > \frac{y^2}{2}$:

$$\left| -\frac{y}{e^y} \right| < \frac{y}{y^2/2} = \frac{2}{y}.$$

Für jede gegen ∞ konvergierende Folge (y_n) ist damit $(-y_n/e^{y_n})$ eine Nullfolge, also

$$\lim_{y\to\infty} -\frac{y}{e^y} = 0.$$

b) Es ist zu zeigen, dass

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$$

gilt. Wir setzen $x = e^y$ und benutzen

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{x} = \lim_{y\to\infty} \frac{\ln(e^y)}{e^y} = \lim_{y\to\infty} \frac{y}{e^y}.$$

Wie in a) folgt

$$\lim_{y\to\infty} \frac{y}{e^y} = 0.$$

Aufgabe 50*: (Der natürliche Logarithmus. 10 Bonuspunkte)
Löse die Gleichung $2^x = 10 \cdot 3^{4\cdot x}$.

Musterlösung:

$$\begin{aligned} & 2^x = 10 \cdot 3^{4\cdot x} \quad \Leftrightarrow \quad \ln(2^x) = \ln(10 \cdot 3^{4\cdot x}) = \ln(10) + \ln(3^{4\cdot x}) \\ \Leftrightarrow \quad & x \cdot \ln(2) = \ln(10) + 4 \cdot x \cdot \ln(3) \quad \Leftrightarrow \quad x \cdot \ln(2) - 4 \cdot x \cdot \ln(3) = \ln(10) \\ & \Leftrightarrow \quad x \cdot (\ln(2) - 4 \cdot \ln(3)) = \ln(10) \\ \Leftrightarrow \quad & x = \frac{\ln(10)}{\ln(2) - 4 \cdot \ln(3)} = \frac{2.30258...}{0.6931... - 4 \cdot 1.0986...} \approx -0.6221... \; . \end{aligned}$$

Aufgabe 51: (Identitäten der trigonometrischen Funktionen. 0 Bonuspunkte)

a) Zeige für beliebiges $z \in \mathbb{C}$:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - z\right) = \cos(z), \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - z\right) = \sin(z).$$

b) Folgere $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

c) Zeige für beliebiges $x, y \in \mathbb{C}$:

$$\sin(x) \pm \sin(y) = 2 \cdot \cos\left(\frac{x \mp y}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{x \pm y}{2}\right).$$

Anleitung: Additionstheoreme.

d) Plotte die Funktion $f(x) = \sin(21 \cdot x) - \sin(20 \cdot x)$ (Überlagerung zweier Schwingungen mit ähnlichen Frequenzen) über dem Bereich von $x = 0$ bis $x = 8 \cdot \pi$. Erkläre mittels c) die beobachtete Form der Überlagerung.

Musterlösung:
a) Mit dem Additionstheorem $\sin(x + y) = \sin(x) \cdot \cos(y) + \cos(x) \cdot \sin(y)$ folgt

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - z\right) = \underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{1} \cdot \cos(z) + \underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{0} \cdot \sin(-z) = \cos(z).$$

Mit dem Additionstheorem $\cos(x + y) = \cos(x) \cdot \cos(y) - \sin(x) \cdot \sin(y)$ folgt

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - z\right) = \underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{0} \cdot \cos(-z) - \underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{1} \cdot \sin(-z) = -\sin(-z) = \sin(z).$$

b) Für $x = \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} - x$ folgt

$$\sin(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x).$$

Aus $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ folgt

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2 \cdot \sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 \quad \Rightarrow \quad \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Wegen $\cos(x) > 0$ auf $[0, \frac{\pi}{2})$ kommt nur das positive Vorzeichen in Frage.

c) Es gilt $2 \cdot X = (X + Y) + (X - Y)$, $2 \cdot Y = (X + Y) - (X - Y)$. Die Additionstheoreme liefern

$$\sin(2 \cdot X) \pm \sin(2 \cdot Y) = \sin((X + Y) + (X - Y)) \pm \sin((X + Y) - (X - Y))$$

$= \sin(X+Y)\cdot\cos(X-Y)+\cos(X+Y)\cdot\sin(X-Y)\pm\Big(\sin(X+Y)\cdot\cos(X-Y)-\cos(X+Y)\cdot\sin(X-Y)\Big).$

Für $+$ ergibt sich

$$\sin(2\cdot X)+\sin(2\cdot Y)=2\cdot\sin(X+Y)\cdot\cos(X-Y),$$

für $-$ ergibt sich

$$\sin(2\cdot X)-\sin(2\cdot Y)=2\cdot\cos(X+Y)\cdot\sin(X-Y).$$

Mit $x=2\cdot X$, $y=2\cdot Y$ ergibt sich die behauptete Identität.

d) Mit

```
>> plotfunc2d(sin(21*x) - sin(20*x), x = 0..8*PI, Mesh = 1000)
```

beobachtet man eine sogenannte „Schwebung“: eine hochfrequente Schwingung (der 'Frequenz' 20.5), deren Amplitude langsam (mit der kleinen 'Frequenz' 0.5) variert. Mit c) ergibt sich in der Tat:

$$\sin(21\cdot x)-\sin(20\cdot x)=2\cdot\underbrace{\cos\left(\frac{41}{2}\cdot x\right)}_{\substack{\text{hochfrequente}\\ \text{Schwingung}}}\cdot\underbrace{\sin\left(\frac{1}{2}\cdot x\right)}_{\substack{\text{langsam}\\ \text{variierende}\\ \text{Amplitude}}}$$

Aufgabe 52: (Die Formel von de Moivre. 10 + 10 Bonuspunkte)

a) Zeige für beliebiges $z\in\mathbb{C}$, $n\in\mathbb{N}$:

$$\cos(n\cdot z)+i\cdot\sin(n\cdot z)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot i^k\cdot\cos(z)^{n-k}\cdot\sin(z)^k.$$

b) Schreibe $\cos(5\cdot x)$ und $\sin(5\cdot x)$ als Summe von Produkten von $\sin(x)$ und $\cos(x)$. (Zur Vereinfachung der Argumentation nehme $x\in\mathbb{R}$ an).

Musterlösung:
Mit $e^{i\cdot n\cdot z}=(e^{i\cdot z})^n=(\cos(z)+i\cdot\sin(z))^n$ folgt mit der Binomialformel

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot a^{n-k}\cdot b^k$$

die Identität

$$\cos(n\cdot z)+i\cdot\sin(n\cdot z)=\Big(\cos(z)+i\cdot\sin(z)\Big)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot i^k\cos(z)^{n-k}\cdot\sin(z)^k.$$

b) Der Realteil dieser Gleichung liefert für $n=5$:

$$\cos(5\cdot x)+i\cdot\sin(5\cdot x)=(\cos(x)+i\cdot\sin(x))^5$$

$$= \cos(x)^5 + 5 \cdot i \cdot \cos(x)^4 \cdot \sin(x) - 10 \cdot \cos(x)^3 \cdot \sin(x)^2 - 10 \cdot i \cdot \cos(x)^2 \cdot \sin(x)^3 \\ +5 \cdot \cos(x) \cdot \sin(x)^4 + i \cdot \sin(x)^5.$$

Für reelles x kann man $\cos(5 \cdot x)$ und $\sin(5 \cdot x)$ als Real- und Imaginärteil aus dieser Gleichung herausziehen

$$\cos(5 \cdot x) = \cos(x)^5 - 10 \cdot \cos(x)^3 \cdot \sin(x)^2 + 5 \cdot \cos(x) \cdot \sin(x)^4,$$

$$\sin(5 \cdot x) = \sin(x)^5 - 10 \cdot \cos(x)^2 \cdot \sin(x)^3 + 5 \cdot \cos(x)^4 \cdot \sin(x).$$

Aufgabe 53: (MuPAD und die trigonometrischen Funktionen. 0 Bonuspunkte)

a) Zeichne die Graphen von $\cos(x)$ und $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ in eine gemeinsame MuPAD-Graphik!

b) Lies die Hilfeseite der MuPAD-Funktion `expand`. „Expandiere“ `sin(PI/2 - x)`, `cos(2*x + PI)`, `sin(5*x)`.

Musterlösung:
a) In der Graphik

```
>> plotfunc2d(sin(PI/2 - x), cos(x), x = -5..5)
```

ist nur eine Funktion sichtbar. Erklärung: nach Aufgabe 51a) stimmen die beiden Funktionen überein!

b)

```
>> expand(sin(PI/2 - x))
                                cos(x)
>> expand(cos(2*x + PI))
                                  2          2
                           sin(x)   - cos(x)
>> expand(sin(5*x))

              4                    2       3          5
        5 cos(x)  sin(x) - 10 cos(x)  sin(x)  + sin(x)
```

Aufgabe 54: (Polarkoordinaten. 0 Bonuspunkte)
Bestimme die Polarkoordinaten (r, φ) der folgenden komplexen Zahlen:

$$1, \quad i, \quad -1, \quad -i, \quad 1+i, \quad -1+i, \quad -1-i, \quad 1-i.$$

Der Polarwinkel einer komplexen Zahl z wird auch „das Argument“ von z genannt. Die MuPAD-Funktion dazu: `abs` (= Absolutbetrag = Radius), `arg` (= Argument = Polarwinkel).

Musterlösung:
a) $|1| = 1$, Polarwinkel$(1) = 0$.
b) $|i| = 1$, Polarwinkel$(i) = \frac{\pi}{2}$.
c) $|-1| = 1$, Polarwinkel$(-1) = \pi$.
d) $|-i| = 1$, Polarwinkel$(-i) = \frac{3\cdot\pi}{2}$.
e) $|1+i| = \sqrt{2}$, Polarwinkel$(1+i) = \frac{\pi}{4}$. Kontrolle (beachte $\sin(\pi/4) = \cos(\pi/4) = 1/\sqrt{2}$):

$$r \cdot e^{i\cdot\varphi} = \sqrt{2} \cdot (\cos(\pi/4) + i \cdot \sin(\pi/4)) = 1 + i.$$

f) $|i-1| = \sqrt{2}$, Polarwinkel$(i-1) = \frac{3\cdot\pi}{4}$. Kontrolle (beachte $\sin(3\cdot\pi/4) = -\cos(3\cdot\pi/4) = 1/\sqrt{2}$):

$$r \cdot e^{i\cdot\varphi} = \sqrt{2} \cdot (\cos(3\cdot\pi/4) + i \cdot \sin(3\cdot\pi/4)) = -1 + i.$$

g) $|-1-i| = \sqrt{2}$, Polarwinkel$(-1-i) = \frac{5\cdot\pi}{4}$. Kontrolle (beachte $\sin(5\cdot\pi/4) = \cos(5\cdot\pi/4) = -1/\sqrt{2}$):

$$r \cdot e^{i\cdot\varphi} = \sqrt{2} \cdot (\cos(5\cdot\pi/4) + i \cdot \sin(5\cdot\pi/4)) = -1 - i.$$

h) $|1-i| = \sqrt{2}$, Polarwinkel$(1-i) = \frac{7\cdot\pi}{4}$. Kontrolle (beachte $-\sin(7\cdot\pi/4) = \cos(7\cdot\pi/4) = 1/\sqrt{2}$):

$$r \cdot e^{i\cdot\varphi} = \sqrt{2} \cdot (\cos(7\cdot\pi/4) + i \cdot \sin(7\cdot\pi/4)) = 1 - i.$$

Aufgabe 55*: (Komplexe Wurzeln. 10 Bonuspunkt)
Man begebe sich ins automatische Abgabe-Tool `bourbaki.upb.de/mfp1`. Diese Aufgabe wird dort als 'Miniprojekt 55' bezeichnet. Man erhält dort eine komplexe Zahl, deren fünfte Wurzeln bestimmt werden sollen. Liefere eine der Wurzeln im Web-Formular ab.
Es sind maximal 3 Abgabeversuche möglich! Abgaben bis Do, 27.11., 23::59::59 Uhr.
Relevante MuPAD-Funktionen zur Kontrolle: `abs, arg, arctan, numeric::polyroots`.

Musterlösung:
Die generierte Aufgabe lautet:
Seien $M_1, \ldots, M_7$ die üblichen Ziffern der Matrikelnummer. Bestimme alle fünften Wurzeln der Zahl

$$a = i^{M_1+M_6+M_7} \cdot \Big(\frac{M_2+M_3}{M_1+M_4+M_5} + i \cdot \frac{M_2+M_3}{M_1+M_4+M_5} \Big),$$

also alle Lösungen z_0, z_1, z_2 etc. von $z^5 = a$. Abzugeben ist die dritte Lösung z_2 (in der Nummerierung wie in Bemerkung 5.21 der Vorlesung). Sie ist über ihren Betrag und ihren Polarwinkel $\in [0, 2\cdot\pi)$ anzugeben. Für π ist das MuPAD-Symbol `PI` zu verwenden.

Lösung: Es gilt

$$|a| = \sqrt{\Big(\frac{M_2+M_3}{M_1+M_4+M_5}\Big)^2 + \Big(\frac{M_2+M_3}{M_1+M_4+M_5}\Big)^2} = \sqrt{2} \cdot \frac{M_2+M_3}{M_1+M_4+M_5}.$$

Der Polarwinkel von

$$\frac{M_2+M_3}{M_1+M_4+M_5} + i \cdot \frac{M_2+M_3}{M_1+M_4+M_5}$$

ist $\psi_1 = \pi/4$. Die Zahl $i^{M_1+M_6+M_7}$ hat den Betrag 1 und den Polarwinkel $\psi_2 = (M_1 + M_6 + M_7) \cdot \frac{\pi}{2}$. Es folgt die Polardarstellung $i^{M_1+M_6+M_7} \cdot \left(\frac{M_2+M_3}{M_1+M_4+M_5} + i \cdot \frac{M_2+M_3}{M_1+M_4+M_5} \right) = |a| \cdot e^{i \cdot (\psi_1 + \psi_2)}$ mit

$$\psi_1 + \psi_2 = \frac{\pi}{4} + (M_1 + M_6 + M_7) \cdot \frac{\pi}{2} = \Big(1 + 2 \cdot (M_1 + M_6 + M_7)\Big) \cdot \frac{\pi}{4}$$

wobei für die richtige Nummerierung der Wurzeln **dieser Polarwinkel** durch Addition eines geeigneten Vielfachen von $2\,\pi$ **auf das Basisinterval** $[0, 2\,\pi)$ **zu reduzieren ist**:

$$\psi_1 + \psi_2 = \Big(1 + 2 \cdot (M_1 + M_6 + M_7)\Big) \cdot \frac{\pi}{4} + \text{Vielfaches von } 2 \cdot \pi.$$

Die Wurzeln sind dann

$$z_k = |a|^{\frac{1}{5}} \cdot e^{i \cdot \frac{\psi_1 + \psi_2}{5} + i \cdot \frac{k \cdot 2 \cdot \pi}{5}}, \quad k = 0, 1, \ldots, 4.$$

Z.B. für die Matrikelnummer 3456780:

$$|a| = \frac{9 \cdot \sqrt{2}}{16} = \sqrt{\frac{81}{128}}, \quad \psi_1 + \psi_2 = \frac{23 \cdot \pi}{4} \mathrel{\widehat{=}} \frac{7 \cdot \pi}{4} \quad (+\,4 \cdot \pi).$$

Die fünf fünften Wurzeln sind:

$$\begin{aligned}
z_0 &= \left(\frac{9 \cdot \sqrt{2}}{16}\right)^{1/5} \cdot \left(\cos\left(\frac{7 \cdot \pi}{20}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{7 \cdot \pi}{20}\right)\right), \\
z_1 &= \left(\frac{9 \cdot \sqrt{2}}{16}\right)^{1/5} \cdot \left(\cos\left(\frac{3 \cdot \pi}{4}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{3 \cdot \pi}{4}\right)\right), \\
z_2 &= \left(\frac{9 \cdot \sqrt{2}}{16}\right)^{1/5} \cdot \left(\cos\left(\frac{23 \cdot \pi}{20}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{23 \cdot \pi}{20}\right)\right), \\
z_3 &= \left(\frac{9 \cdot \sqrt{2}}{16}\right)^{1/5} \cdot \left(\cos\left(\frac{31 \cdot \pi}{20}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{31 \cdot \pi}{20}\right)\right), \\
z_4 &= \left(\frac{9 \cdot \sqrt{2}}{16}\right)^{1/5} \cdot \left(\cos\left(\frac{39 \cdot \pi}{20}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{39 \cdot \pi}{20}\right)\right).
\end{aligned}$$
