(Zusatz-)Übungsblatt 5a

Hier ist eine zusätzliche Sammlung von Aufgaben zur Stetigkeit etc. Zusammen mit Blatt 5 ist dies deutlich mehr Material als man sich sinnvollerweise innerhalb einer Woche anschauen sollte. Meine Empfehlung: man konzentriere sich auf Blatt 5 und benutze dieses Zusatzmaterial optional –je nach Ehrgeiz– zur weiteren Übung jetzt oder später (z.B. für die Prüfungsvorbereitung). Es wird hierzu wie für alle Übungsaufgaben Musterlösungen geben.

Aufgabe 13a: (Stetigkeit)

An welchen Stellen $x \in \mathbb{R}$ ist die folgende (reelle) Funktion stetig: $f(x) = \lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{1+x^{2n}}$?

Musterlösung:
Beachte zunächst $x^{2n} = (x^2)^n$. Für $x \in (-1,1)$ gilt $x^2 \in [0,1)$ und damit $(x^2)^n \to 0$ für $n \to \infty$, also

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+x^{2n}} = 1.$$

Für $|x| > 1$ gilt $x^2 > 1$ und damit $(x^2)^n \to \infty$ für $n \to \infty$, also

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+x^{2n}} = 0.$$

Für $x = \pm 1$ gilt $(x^2)^n = 1$ für alle n, also

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+x^{2n}} = \frac{1}{2}.$$

Die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } |x| < 1, \\ \frac{1}{2} & \text{falls } |x| = 1, \\ 0 & \text{falls } |x| > 1 \end{cases}$$

ist damit überall außer an den Punkten $x = \pm 1$ stetig. An den Punkten $x = \pm 1$ gilt für die einseitigen Grenzwerte

$$\lim_{x\to 1+0} f(x) = 0 \neq \frac{1}{2} = f(1), \quad \lim_{x\to 1-0} f(x) = 1 \neq \frac{1}{2} = f(1),$$
$$\lim_{x\to -1+0} f(x) = 1 \neq \frac{1}{2} = f(-1), \quad \lim_{x\to -1-0} f(x) = 0 \neq \frac{1}{2} = f(-1).$$

Aufgabe 14a: (Stetigkeit)

An welchen Stellen $x \in \mathbb{R}$ ist die folgende (reelle) Funktion stetig?

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{falls } x \text{ rational ist,} \\ 1-x & \text{falls } x \text{ irrational ist.} \end{cases}$$

Anleitung: zu jeder reellen Zahl x gibt es eine Folge rationaler Zahlen sowie eine Folge irrationaler Zahlen, die gegen x konvergiert.

Musterlösung:
Sei $x \neq 1/2$. Hier ist f unstetig: Für eine gegen x konvergierende Folge (x_n) rationaler Zahlen gilt

$$\lim_{n\to} f(x_n) = \lim_{n\to} x_n = x.$$

Für eine gegen x konvergierende Folge (x_n) irrationaler Zahlen gilt

$$\lim_{n\to} f(x_n) = \lim_{n\to}(1 - x_n) = 1 - x.$$

Für $x \neq \frac{1}{2}$ stimmen diese Grenzwerte nicht überein. Wäre f an der Stelle x stetig, müssten jedoch die Grenzwerte für *jede* gegen x konvergente Folge übereinstimmen (genauer, mit $f(x)$ übereinstimmen).

Wir zeigen die Stetigkeit von f an der Stelle $x = \frac{1}{2}$. Sei dazu h_n eine beliebige Nullfolge (d.h., $x_n = \frac{1}{2} + h_n$ ist eine beliebige gegen $\frac{1}{2}$ konvergierende Folge). Ist h_n rational (und damit auch x_n), so folgt

$$f(x_n) - f\Big(\frac{1}{2}\Big) = f\Big(\frac{1}{2} + h_n\Big) - f\Big(\frac{1}{2}\Big) = \frac{1}{2} + h_n - \frac{1}{2} = h_n.$$

Ist h_n irrational (und damit auch x_n), so folgt

$$f(x_n) - f\Big(\frac{1}{2}\Big) = f\Big(\frac{1}{2} + h_n\Big) - f\Big(\frac{1}{2}\Big) = 1 - \Big(\frac{1}{2} + h_n\Big) - \frac{1}{2} = -h_n.$$

In jedem Fall gilt $f(x_n) = f\Big(\frac{1}{2}\Big) + \text{Nullfolge}$, also $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f\Big(\frac{1}{2}\Big)$.

Aufgabe 15a: (Stetigkeit. Technisch sehr anspruchsvoll. Für Ehrgeizige.)
Die eindeutige „Normalform" einer rationalen Zahl $x \neq 0$ sei $x = \frac{m}{n}$ mit *teilerfremden* ganzen Zahlen m, n und $n > 0$. Zeige, dass die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{n} & \text{für } x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\} \text{ mit der Normalform } x = \dfrac{m}{n}, \\ 1 & \text{für } x = 0, \\ 0 & \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

in allen irrationalen Punkten stetig und in allen rationalen Punkten unstetig ist.
Anleitung: Verwende, dass es zu jeder irrationalen Zahl x eine Folge rationaler Zahlen gibt, die gegen x konvergiert. Die Zähler und Nenner dieser rationalen Zahlen werden immer größer. Ebenso gibt es zu jeder rationalen Zahl x eine Folge rationaler Zahlen, die gegen x konvergiert, wobei die Zähler und Nenner der Folgenglieder immer größer werden.

Musterlösung:
Offensichtlich gilt $f(-x) = -f(x)$, womit f genau dann am Punkt $-x$ stetig ist, wenn f am Punkt x stetig ist. Wir brauchen daher nur $x \geq 0$ zu diskutieren.
a) Sei $x > 0$ irrational und (x_j) eine beliebige gegen x konvergierende Folge rationaler Zahlen mit der Normalform $x_j = m_j/n_j$. Wir zeigen, dass die Folge der Nenner n_j nicht beschränkt sein kann. Wären sie beschränkt, sagen wir $n_j \leq N$ für alle j, so wären auch die Zähler beschränkt: Für alle (bis auf endlich viele) j gilt

$$0 < \frac{m_j}{n_j} \leq x + 1 \quad \Rightarrow \quad 0 < m_j \leq n_j \cdot (x+1) \leq N \cdot (x+1).$$

Es gibt aber nur endlich viele rationale Zahlen mit derartig beschränkten Zählern und Nennern. Sei

$$\delta_N = \min\left\{\left|\frac{m}{n} - x\right|;\ m,n \in \mathbb{N},\ m \le N\cdot(x+1),\ n \le N\right\}$$

der Fehler der besten Approxmation von x, die sich mit rationalen Zahlen mit Nennern $\le N$ erreichen läßt. Diese δ_N ist größer als 0, da x sonst rational sein müßte.
Sei nun $\epsilon > 0$ vorgegeben. Betrachte die Folgenglieder

$$X_\epsilon = \{x_j; |x_j - x| < \delta_{\frac{1}{\epsilon}}\},$$

deren Abstand zu x kleiner als $\delta_{\frac{1}{\epsilon}}$ ist. Wegen $x_j \to x$ für $j \to \infty$ liegen alle bis auf endlich viele Folgenglieder x_j in X_ϵ. Für alle $x_j = m_j/n_j \in X_\epsilon$ gilt $n_j > \frac{1}{\epsilon}$, denn für $n_j \le \frac{1}{\epsilon}$ würde $|x_j - x| \ge \delta_{\frac{1}{\epsilon}}$ folgen. Damit folgt

$$0 \le f(x_j) = \frac{1}{n_j} < \epsilon$$

für alle bis auf endlich viele j. Dies ist aber die Konvergenz der Folge $f(x_j)$ gegen 0. Damit haben wir

$$\lim_{j\to\infty} f(x_j) = 0 = f\Big(\lim_{j\to\infty} x_j\Big) = f(x)$$

für jede gegen x konvergierende Folge *rationaler* Zahlen gezeigt. Betrachtet man eine gegen x konvergierende Folge (x_j), die auch irrationale Zahlen enthält, so konvergiert weiterhin $f(x_j)$ gegen 0, denn für die irrationalen Folgenglieder x_j gilt sowieso $f(x_j) = 0$.

b) Für $x = 0$ betrachte die Nullfolge $x_n = \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, \ldots$ mit

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \ne f(0) = 1.$$

Damit ist $x = 0$ ein Unstetigkeitspunkt von f.

c) Sei $x > 0$ rational mit der Normalform $x = m/n$. Verwendet man die Tatsache, dass man eine gegen x konvergierende Folge *irrationaler* Zahlen konstruieren kann, ist man sofort fertig: die Funktionswerte auf diesen irrationalen Zahlen sind 0, ihr Grenzwert ist 0 und stimmt damit nicht mit dem Funktionswert $f(x) = \frac{1}{n} \ne 0$ überein. Damit ist f an rationalen Punkten unstetig.
Will man nur mit rationalen Zahlen arbeiten, ist die Argumentation ein wenig komplizierter: Wir konstruieren eine gegen x konvergierende Folge *rationaler* Zahlen (x_j), deren Zähler und Nenner beliebig groß werden, so dass $f(x_j)$ gegen Null konvergiert. Wegen $f(x) = \frac{1}{n} \ne 0$ für rationales x folgt damit die Unstetigkeit an rationalen Punkten.
Betrachte zunächst

$$j_0 = m \cdot n + 1 > 1.$$

Die Zahl j_0 ist teilerfremd zu m (jede Division von j_0 durch einen Teiler von m hat den Rest 1). Die Zahl $j_0 + n = (m+1)\cdot n + 1$ ist teilerfremd zu n (jede Division von j_0 durch einen Teiler von n hat den Rest 1). Weiterhin sind $j_0 + n$ und j_0 teilerfremd, da n und j_0 teilerfremd sind. Damit ist

$$x_{j_0} = \frac{(j_0 + n)\cdot m}{j_0 \cdot n}$$

in Normalform. Mit den selben Argumenten sind auch

$$x_{j_0^2} = \frac{(j_0^2 + n)\cdot m}{j_0^2 \cdot n}, \quad x_{j_0^3} = \frac{(j_0^3 + n)\cdot m}{j_0^3 \cdot n}, \quad \ldots$$

in Normalform (denn j_0^2, j_0^3 etc. sind wieder teilerfremd zu m, da j_0 teilerfremd zu m ist. Analog sind j_0^2+n, j_0^3+n etc. teilerfremd zu n, da j_0 teilerfremd zu n ist.) Die Folge $(x_{j_0}, x_{j_0^2}, x_{j_0^3}, \dots)$ konvergiert gegen x:

$$\lim_{p\to\infty} \frac{j_0^p + n}{j_0^p} \cdot \frac{m}{n} = \lim_{p\to\infty} \left(1 + \frac{n}{j_0^p}\right) \cdot \frac{m}{n} = \frac{m}{n} = x.$$

Aber es gilt

$$\lim_{p\to\infty} f(x_{j_0^p}) = \lim_{p\to\infty} \frac{1}{j_0^p \cdot n} = 0 \neq f(x) = \frac{1}{n}.$$

Aufgabe 16a: (Zwischenwertsatz)

Zeige, dass zu jeweils gegebenem $x \in [-1,1]$ die Lösung y der Gleichung

$$y^5 + y^3 = x^4 + x^2$$

eindeutig eine Funktion $y(x)$ mit dem Wertebereich $y([-1,1]) = [0,1]$ definiert.
MuPAD-Funktion zur Visualisierung: `plot::implicit` in MuPAD 2.5, `plot::Implicit2d` in MuPAD 3.0.

Musterlösung:
Der Wertebereich der Abbildung $x \to x^4 + x^2$ für $x \in [-1,1]$ ist offensichtlich $[0,2]$ (das Minimum 0 wird bei $x = 0$ angenommen, das Maximum 2 an den Rändern $x = \pm 1$).

Wir haben also zu $c = x^4 + x^2 \in [0,2]$ die Lösung $y(c)$ der Gleichung

$$y^5 + y^3 = c$$

zu betrachten. Durch Einsetzen findet man die Lösung $y = 0$ für $c = 0$ und $y = 1$ für $c = 2$. Da die Funktion $F : y \to y^5 + y^3$ stetig ist und $F(0) = 0$, $F(1) = 2$ gilt, gibt es nach dem Zwischenwertsatz zu jedem $c \in [0,2]$ (mindestens) eine Lösung $y \in [0,1]$ von $F(y) = c$. Da $F(y)$ offensichtlich monoton in y ist, ist diese Lösung eindeutig, und es gibt eine Umkehrfunktion F^{-1}, die die Lösung $y = F^{-1}(c)$ von $F(y) = c$ darstellt. Die Lösung der Ausgangsgleichung $y^5 + y^3 = x^4 + x^2$ ist damit durch $y = F^{-1}(x^4 + x^2)$ gegeben.
