Übungsblatt 5

Abgabe von $*$–Aufgaben am 20.11.2003 in der Übung.

Aufgabe 34*: (Stetigkeit. Einfacher Beweis. 10 Bonuspunkte)
Beweise formal, dass die Betragsfunktion $z \in \mathbb{C} \to |z|$ überall auf $\mathbb{C}$ stetig ist.
Anleitung: „umgekehrte Dreiecksungleichung" $|\,|z_1| - |z_2|\,| \leq |z_1 - z_2|$.

Musterlösung:
Sei (z_n) eine gegen einen Punkt $z^* \in \mathbb{C}$ konvergierende Folge. Zu jedem $\epsilon > 0$ erfüllen alle bis auf endlich viele Folgenglieder $|z_n - z^*| \leq \epsilon$. Mit der umgekehrten Dreiecksungleichung folgt

$$\Big||z_n| - |z^*|\Big| \leq |z_n - z^*| \leq \epsilon.$$

Damit konvergiert die Folge $|z_n|$ gegen $|z^*|$. Also:

$$\lim_{n\to\infty} |z_n| = \Big|\lim_{n\to\infty} z_n\Big|,$$

d.h., die Betragsfunktion ist am (beliebigen) Punkt z^* stetig.

Aufgabe 35*: (Stetigkeit, 10 Bonuspunkte)

Zeige, dass folgende Funktion am Nullpunkt stetig ist: $f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{(x^2)} - 1 - x^2}{x^3} & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$

Musterlösung:
Mit

$$e^{(x^2)} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \cdots$$

folgt

$$e^{(x^2)} - 1 - x^2 = \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \cdots = x^4 \cdot \underbrace{\Big(\frac{1}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \cdots\Big)}_{g(x)},$$

wobei die verbleibende Reihe $g(x)$ für jedes x konvergiert und sicherlich $0 \leq |g(x)| \leq e^{|x|^2}$ erfüllt. Für $x \neq 0$ gilt damit

$$f(x) = \frac{x^4 \cdot g(x)}{x^3} = x \cdot g(x).$$

Der Grenzwert $f(x_n)$ jeder Nullfolge (x_n) existiert und ist 0, denn $g(x_n)$ ist sicherlich beschränkt. Mit

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 0 = f(0)$$

für jede Nullfolge x_n ist f am Nullpunkt stetig. Diese Argumentation funktioniert unabhängig davon, ob man f über $\mathbb{R}$ oder über $\mathbb{C}$ betrachtet.

Aufgabe 36*: (Stetigkeit, Rechenregeln, 10 Bonuspunkte)

Seien f und g am Punkt $x \in \mathbb{R}$ stetige reelle Funktionen. Zeige, dass die Funktionen

$$M(x) = \max(f(x), g(x)) \quad \text{und} \quad m(x) = \min(f(x), g(x))$$

am Punkt x stetig sind.
Anleitung: $M(x) = \frac{1}{2} \cdot (f(x) + g(x) + |f(x) - g(x)|)$, $m(x) = \frac{1}{2} \cdot (f(x) + g(x) - |f(x) - g(x)|)$.

Musterlösung:
Nach den Rechenregeln ist $h(x) = f(x) - g(x)$ am Punkt x stetig. Nach Aufgabe 34 ist die Betragsfunktion stetig und damit auch die Komposition $|h(x)|$. Mit den Rechenregeln folgt daraus sofort die Stetigkeit des Maximums M und des Minimums m.

Aufgabe 37*: (Funktionsgrenzwert, 10 Bonuspunkte)

Betrachte die reelle Funktion $f(x) = \frac{|x|}{x}$ für $x \neq 0$. Bestimme den links- und rechtsseitigen Grenzwert $\lim\limits_{x \to 0 \pm 0} f(x)$. Läßt sich f im Punkt $x = 0$ stetig ergänzen?

Musterlösung:
Es gilt

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x > 0, \\ -1 & \text{für } x < 0. \end{cases}$$

Der links-/rechtsseitige Grenzwert für $x \to 0$ ist damit offensichtlich

$$\lim_{x \to 0+0} f(x) = 1, \quad \lim_{x \to 0-0} f(x) = -1.$$

Die Funktion wäre genau dann stetig ergänzbar, wenn diese Grenzwerte existieren und übereinstimmen.

Aufgabe 38*: (Funktionsgrenzwert, 10 Bonuspunkte)

Bestimme den Grenzwert $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^n - 1}{x^m - 1}$ für $m, n \in \mathbb{N}$. Anleitung: Aufgabe 12.

Musterlösung:
Nach Aufgabe 12 gilt

$$x^n - 1 = (x - 1) \cdot \left(1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1}\right), \quad x^m - 1 = (x - 1) \cdot \left(1 + x + x^2 + \cdots + x^{m-1}\right),$$

also

$$\frac{x^n - 1}{x^m - 1} = \frac{1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1}}{1 + x + x^2 + \cdots + x^{m-1}}.$$

Diese Darstellung ist stetig an der Stelle $x = 1$, so dass der Grenzwert direkt durch Einsetzen von $x = 1$ berechnet werden kann:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^n - 1}{x^m - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1}}{1 + x + x^2 + \cdots + x^{m-1}} = \frac{n}{m}.$$

Aufgabe 39*: (Funktionsgrenzwert. 10 Bonuspunkt)

Man begebe sich ins automatische Abgabe-Tool `bourbaki.upb.de/mfp1`. Diese Aufgabe wird dort als 'Miniprojekt 39' bezeichnet. Man erhält dort einen Ausdruck in x, dessen Grenzwert für $x \to 1$ bestimmt werden soll. Liefere ihn im Web-Formular ab.
Es sind maximal 3 Abgabeversuche möglich! Abgaben bis Do, 20.11., 23::59::59 Uhr.

Musterlösung:
Die generierte Aufgabe ist

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^{M_1+M_2} - x^{-M_4-M_5}}{x^{M_1+M_3} - x^{-M_4-M_5}},$$

wobei $M_1, \ldots, M_7$ die Ziffern der Matrikelnummer sind. Mit Aufgabe 38 gilt:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^{M_1+M_2} - x^{-M_4-M_5}}{x^{M_1+M_3} - x^{-M_4-M_5}} = \lim_{x\to 1} \frac{x^{M_1+M_2+M_4+M_5} - 1}{x^{M_1+M_3+M_4+M_5} - 1} = \frac{M_1+M_2+M_4+M_5}{M_1+M_3+M_4+M_5}.$$

Aufgabe 40*: (Funktionsgrenzwert, 10 Bonuspunkte)

Bestimme den Grenzwert $\lim_{x\to\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x})$.

Musterlösung:
Mit dem üblichen „Erweiterungsargument“ folgt

$$\lim_{x\to\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) = \lim_{x\to\infty} \frac{(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) \cdot (\sqrt{x+1} + \sqrt{x})}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = 0,$$

denn $\sqrt{x+1}$ und $\sqrt{x}$ wachsen unbeschränkt an für $x \to \infty$.

Aufgabe 41*: (Funktionsgrenzwert, 10 Bonuspunkte)

Existiert der Grenzwert $\lim_{x\to 2} \frac{x^2 - 10 \cdot x + 16}{|x-2| + |x^2-4|}$?

Musterlösung:
Nach Faktorisierung folgt

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2 - 10 \cdot x + 16}{|x-2| + |x^2-4|} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)\cdot(x-8)}{|x-2| + |x-2| \cdot |x+2|} = \lim_{x\to 2} \underbrace{\frac{x-2}{|x-2|}}_{f(x)} \cdot \underbrace{\frac{x-8}{1+|x+2|}}_{g(x)}.$$

Die Funktion $g(x)$ ist offensichtlich am Punkt $x = 2$ stetig, es gilt $g(2) \neq 0$. Wäre die Funktion $f(x) \cdot g(x)$ am Punkt $x = 2$ stetig ergänzbar, müsste $f(x) = (f(x) \cdot g(x))/g(x)$ am Punkt $x = 2$ stetig ergänzbar sein. Analog zu Aufgabe 38 läßt sich die Funktion f am Punkt $x = 2$ jedoch nicht stetig ergänzen. Damit kann der Grenzwert von $f(x) \cdot g(x)$ für $x \to 2$ nicht existieren.

Aufgabe 42: (Zwischenwertsatz, 0 Bonuspunkte)

Zeige, dass jedes reelle Polynom ungeraden Grades mindestens eine reelle Nullstelle besitzt.

Musterlösung:

Wir zeigen, dass das Polynom für hinreichend große positive Argumente ein anderes Vorzeichen hat als für hinreichend große negative Argumente. Betrachte

$$p(x) = x^n + c_{n-1} \cdot x^{n-1} + \cdots + c_0 = x^n \cdot \left(1 + \frac{c_{n-1}}{x} + \cdots + \frac{c_0}{x^n}\right),$$

wo o.B.d.A. der führende Koeffizient auf 1 normiert wurde. Der Grenzwert der Summe für $x \to \pm\infty$ ist 1, also gilt

$$1 + \frac{c_{n-1}}{x} + \cdots + \frac{c_0}{x^n} \geq \frac{1}{2},$$

wenn nur $|x|$ groß genug ist, sagen wir, für $|x| \geq C > 0$. Für $x \geq C$ folgt $p(x) \geq \frac{x^n}{2} > 0$. Für $x \leq -C$ folgt $p(x) \leq \frac{x^n}{2} < 0$ für ungerades n. Der Zwischenwertsatz auf dem Intervall $[-C, C]$ liefert sofort die Existenz einer Nullstelle in diesem Intervall.

Aufgabe 43*: (Zwischenwertsatz, Intervallhalbierung. 10 Bonuspunkte)

Man begebe sich ins automatische Abgabe-Tool `bourbaki.upb.de/mfp1`. Diese Aufgabe wird dort als 'Miniprojekt 43' bezeichnet. Man erhält dort eine Zahl c, deren dritte Wurzel als Lösung der Gleichung $x^3 - c = 0$ per Bisektion approximiert werden soll. Liefere die Zwischenergebnisse der Bisektion im Web-Formular ab.
Es sind maximal 3 Abgabeversuche möglich! Abgaben bis Do, 20.11., 23::59::59 Uhr.

Musterlösung:

Die generierte Aufgabe ist, den Wert

$$\left(\frac{10 \cdot M_1 + M_2 + M_3}{39 \cdot M_1 + M_5 + M_6}\right)^{\frac{1}{3}}$$

mittels Bisektion des Intervalls $[0, 1]$ auf eine Genauigkeit von 10^{-2} zu approximieren. Hierbei sind $M_1, \ldots, M_7$ die Ziffern der Matrikelnummer.

Wende Bisektion auf die Lösung von

$$f(x) = x^3 - \frac{10 \cdot M_1 + M_2 + M_3}{39 \cdot M_1 + M_5 + M_6} = 0$$

an. Ein gültiges Startintervall ist

$$[a_0, b_0] = [0, 1],$$

denn $f(0) < 0$ und $f(1) \geq 0$ für alle Matrikelnummern. Z.B.:

$$f(x) = x^3 - \frac{13}{18},$$

$$
\begin{array}{lcllcl}
[a_0,b_0] & = & \Big[0,1\Big]; & b_0-a_0=1.0, & f\left(\frac{a_0+b_0}{2}\right) & = -0.597..., \\
[a_1,b_1] & = & \Big[\frac{1}{2},1\Big]; & b_1-a_1=0.5, & f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right) & = -0.300.., \\
[a_2,b_2] & = & \Big[\frac{3}{4},1\Big]; & b_2-a_2=0.25, & f\left(\frac{a_2+b_2}{2}\right) & = -0.052.., \\
[a_3,b_3] & = & \Big[\frac{7}{8},1\Big]; & b_3-a_3=0.125, & f\left(\frac{a_3+b_3}{2}\right) & = 0.101.., \\
[a_4,b_4] & = & \Big[\frac{7}{8},\frac{15}{16}\Big]; & b_4-a_4=0.0625, & f\left(\frac{a_4+b_4}{2}\right) & = 0.022.., \\
[a_5,b_5] & = & \Big[\frac{7}{8},\frac{29}{32}\Big]; & b_5-a_5=0.031.., & f\left(\frac{a_5+b_5}{2}\right) & = -0.015.., \\
[a_6,b_6] & = & \Big[\frac{57}{64},\frac{29}{32}\Big]; & b_6-a_6=0.015.., & f\left(\frac{a_6+b_6}{2}\right) & = 0.002.., \\
[a_7,b_7] & = & \Big[\frac{57}{64},\frac{115}{128}\Big]; & b_7-a_7=0.007.. & \text{(Genauigkeit erreicht).} &
\end{array}
$$

Vergleich der Approximation mit dem angestrebten Wert:

```
>> float([57/64, 115/128])

                    [0.890625, 0.8984375]

>> float((13/18)^(1/3))

                         0.897202102
```

Aufgabe 44: (Zwischenwertsatz, 0 Bonuspunkte)

Sei T die Funktion, die jedem Punkt des Äquators die dort herrschende Temperatur zuordnet (diese Funktion sei stetig). Zeige, dass es mindestens einen Punkt auf dem Äquator gibt, an dem die gleiche Temperatur herrscht wie an seinem antipodalen (gegenüberliegenden) Punkt.

Musterlösung:
Sei x ein Punkt auf dem Äquator und $A(x)$ der antipodale Punkt (man stelle sich unter x z.B. den Längengrad vor). Die Funktion $A(x)$ ist stetig in x. Betrachte

$$f(x) = T(x) - T(A(x)).$$

Gilt an irgendeinem Punkt $f(p) > 0$, also $T(p) > T(A(p))$, so folgt $f(A(p)) = T(A(p)) - T(A(A(p)) = T(A(p)) - T(p) < 0$. Der Zwischenwertsatz auf dem Intervall $[p, A(p)]$ garantiert einen Punkt x mit $f(x) = 0$, also $T(x) = T(A(x))$.

Zusatz: eigentlich entspricht der Äquator nur dem Intervall $[0, 2\cdot\pi)$, wenn man sich x als den Längengrad vorstellt. In dieser Darstellung ist $A(x) = (x+\pi) \bmod 2\cdot\pi$ an der Stelle $x = \pi$ nicht stetig. Man kann sich leicht aus diesem technischen Dilemma winden, indem man sich die Temperatur als periodisch auf ganz $\mathbb{R}$ fortgesetzt vorstellt und $A(x) = x + \pi$ als Darstellung der Antipoden definiert. Nun ist alles stetig.

Aufgabe 45: (O-Kalkül für Funktionen. Einige Rechenregeln. 0 Bonuspunkte)
Zeige, dass für jedes $x_0 \in \mathbb{R}$ und $m, n \in \mathbb{Z}$ im Limes $x \to x_0$ gilt:

a) $O((x-x_0)^m) + O((x-x_0)^n) = O((x-x_0)^{\min(m,n)})$,

b) $O((x-x_0)^m) \cdot O((x-x_0)^n) = O((x-x_0)^{m+n})$,

c) $o((x-x_0)^m) \cdot O((x-x_0)^n) = o((x-x_0)^{m+n})$,

d) $o((x-x_0)^m) \cdot o((x-x_0)^n) = o((x-x_0)^{m+n})$.

Hiermit ist in a) gemeint: Wenn $f = O((x-x_0)^m)$ und $g = O((x-x_0)^n)$ gilt, dann folgt $f + g = O((x-x_0)^{\min(m,n)})$. Die Aussagen b) – d) sind entsprechend zu interpretieren.

Musterlösung:
Wir halten zunächst fest: es gilt stets

$$\boxed{O((x-x_0)^m) = O(|x-x_0|^m),}$$

denn $f = O((x-x_0)^m)$ und $f = O(|x-x_0|^m)$ bedeuten beide, dass $|f(x)|/|(x-x_0)^m|$ auf einer Umgebung von x_0 beschränkt ist.

Sei $f = O((x-x_0)^m)$, also: auf einer Umgebung von x_0 ist $\left|\frac{f(x)}{(x-x_0)^m}\right|$ beschränkt. Damit ist gemeint: es gibt eine Umgebung U_f von x_0 und eine Schranke $M_f > 0$ mit

$$|f(x)| \leq M_f \cdot |x-x_0|^m$$

für alle $x \in U_f$. Analog bedeutet $g = O((x-x_0)^n)$, dass es eine Umgebung U_g von x_0 und eine Schranke $M_g > 0$ gibt, sodass

$$|g(x)| \leq M_g \cdot |x-x_0|^n$$

für alle $x \in U_g$ gilt.

a) Es gelte o.B.d.A. $|x-x_0| \leq 1$. Für beliebige Exponenten $m \leq n$ gilt dann

$$|x-x_0|^n \leq |x-x_0|^m,$$

also

$$\begin{aligned}|f(x)+g(x)| &\leq |f(x)| + |g(x)| \leq M_f \cdot |x-x_0|^m + M_g \cdot |x-x_0|^n \\ &\leq M_f \cdot |x-x_0|^m + M_g \cdot |x-x_0|^m = (M_f + M_g) \cdot |x-x_0|^m,\end{aligned}$$

also

$$f + g = O(|x-x_0|^m),$$

wobei wegen der Voraussetzung $m \leq n$ gilt: $m = \min(m,n)$.

b) Für alle x aus dem Schnitt $U_f \cap U_g$ der Umgebungen folgt

$$|f(x) \cdot g(x)| \leq M_f \cdot M_g \cdot |x-x_0|^m \cdot |x-x_0|^n = M_f \cdot M_g \cdot |x-x_0|^{m+n},$$

also $f \cdot g = O((x-x_0)^{m+n})$.

c) Sei $f \in o((x-x_0)^m)$, also $\lim_{x\to x_0} f(x)/(x-x_0)^m = 0$. Mit $g \in O((x-x_0)^m)$ folgt

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)\cdot g(x)}{(x-x_0)^{m+n}} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{(x-x_0)^m} \cdot \frac{g(x)}{(x-x_0)^n} = 0,$$

denn $g(x)/(x-x_0)^n$ ist beschränkt. Also: $f \cdot g = O((x-x_0)^{n+m})$.

d) Mit $g = o((x-x_0)^n) \Rightarrow g = O((x-x_0)^n)$ folgt d) unmittelbar aus c).

Aufgabe 46*: (O-Kalkül für Funktionen, 10 Bonuspunkte)
Berechne

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - \frac{1}{1-x} + O(x^3)}{x^2 + o(x^2)}.$$

Musterlösung:
Mit

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = 1 + x + \frac{x^2}{2} + O(x^3),$$
$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = 1 + x + x^2 + O(x^3)$$

ergibt sich

$$\frac{e^x - \frac{1}{1-x} + O(x^3)}{x^2 + o(x^3)} = \frac{1 + x + \frac{x^2}{2} + O(x^3) - \Big(1 + x + x^2 + O(x^3)\Big) + O(x^3)}{x^2 + o(x^2)}$$
$$= \frac{-\frac{x^2}{2} + O(x^3) + O(x^3) + O(x^3)}{x^2 \cdot (1 + \frac{o(x^2)}{x^2})} = \frac{-\frac{x^2}{2} + O(x^3)}{x^2 \cdot (1 + \frac{o(x^2)}{x^2})}$$
$$= \frac{x^2 \cdot (-\frac{1}{2} + \frac{O(x^3)}{x^2})}{x^2 \cdot (1 + \frac{o(x^2)}{x^2})} = \frac{-\frac{1}{2} + x \cdot \frac{O(x^3)}{x^3}}{1 + \frac{o(x^2)}{x^2}}.$$

Im Limes $x \to 0$ folgt:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - \frac{1}{1-x} + O(x^3)}{x^2 + O(x^2)} = \frac{-\dfrac{1}{2} + \lim\limits_{x\to 0}\Big(x \cdot \dfrac{O(x^3)}{x^3}\Big)}{1 + \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{o(x^2)}{x^2}} = -\frac{1}{2}.$$
