(Zusatz-)Übungsblatt 4a

Hier ist eine zusätzliche Sammlung von Aufgaben zu Folgen und Grenzwerten. Zusammen mit Blatt 4 ist dies deutlich mehr Material als man sich sinnvollerweise innerhalb einer Woche anschauen sollte. Meine Empfehlung: man konzentriere sich auf Blatt 4 und benutze dieses Zusatzmaterial optional –je nach Ehrgeiz– zur weiteren Übung jetzt oder später (z.B. für die Prüfungsvorbereitung). Es wird hierzu wie für alle Übungsaufgaben Musterlösungen geben.

Aufgabe 9a: (Von Schnecken und Bäumen. Modellierungsaufgabe.)

Eine Schnecke beginnt, einen 1 Meter hohen Baum hochzukriechen, wobei sie jeden Tag die Strecke $\epsilon \in (0,1)$ schafft. In der Nacht ruht sie, während der Baum um einen Meter wächst (kurioserweise wächst dieser Baum nur nachts). Die Schnecke wird dabei ihrer Position entsprechend mittransportiert. Wird die Schnecke jemals die Baumspitze erreichen? Wie alt wird sie sein, wenn sie täglich nur 10 cm zurücklegt?

Musterlösung:
Am Morgen des ersten Tages befindet sich die Schnecke auf der Höhe $m_1 = 0$, am Abend des ersten Tages auf der Höhe $a_1 = \epsilon$. Am Morgen des zweiten Tages wacht sie in der Höhe $m_2 = \frac{2}{1} \cdot a_1$ auf (sie ist durch das Wachstums des Baums mittransportiert worden) und erreicht am Abend die Höhe $a_2 = m_2 + \epsilon$. Usw.
Sie erreiche am Abend des n-ten Tages die Höhe a_n. Am Morgen des $(n+1)$-ten Tages wacht sie in der Höhe $m_{n+1} = \frac{n+1}{n} \cdot a_n$ auf (der Baum ist von n auf $n+1$ Meter gewachsen und hat sie dabei um einen entsprechenden Bruchteil mitgenommen). Abends hat sie die Höhe $a_{n+1} = m_{n+1} + \epsilon$ erreicht:

$$m_{n+1} = \frac{n+1}{n} \cdot a_n, \quad a_{n+1} = m_{n+1} + \epsilon.$$

Die jeweils abends erreichte Höhe (a_n) ist damit durch die Rekursion

$$a_{n+1} = \frac{n+1}{n} \cdot a_n + \epsilon, \quad a_1 = \epsilon$$

gegeben, also

$$\frac{a_{n+1}}{n+1} = \frac{a_n}{n} + \frac{\epsilon}{n+1}, \quad a_1 = \epsilon.$$

Betrachtet man $b_n := a_n/n$, so ist die Folge (b_n) durch die Rekursion

$$b_{n+1} = b_n + \frac{\epsilon}{n+1}, \quad b_1 = \epsilon$$

gegeben:

$$\begin{aligned} b_{n+1} = b_n + \frac{\epsilon}{n+1} &= b_{n-1} + \frac{\epsilon}{n} + \frac{\epsilon}{n+1} = b_{n-2} + \frac{\epsilon}{n-1} + \frac{\epsilon}{n} + \frac{\epsilon}{n+1} \\ &= \cdots = b_1 + \frac{\epsilon}{2} + \cdots + \frac{\epsilon}{n-1} + \frac{\epsilon}{n} + \frac{\epsilon}{n+1} = \epsilon \cdot \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k}. \end{aligned}$$

Da der Baum am n-ten Tag die Höhe n hat, erreicht die Schnecke die Baumspitze an dem Tag, für den zum ersten Mal $b_n \geq 1$ gilt. Da $\sum_k \frac{1}{k}$ uneigentlich gegen ∞ konvergiert, wird sie irgendwann einmal die Baumspitze erreichen!

Für $\epsilon = 0.1$ (Meter) ist die Bedingung

$$b_n = 0.1 \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geq 1 \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geq 10$$

zu erfüllen. Durch Ausprobieren mit MuPAD erhält man:

n	$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$	
10	2.9289...	
100	5.1873...	
1000	7.4854...	
2000	8.1783...	
4000	8.8713...	
8000	9.0945...	
10 000	9.7876...	
12 000	9.9699...	
12 366	9.999962...	
12 367	10.000043...	(geschafft!)

Die Schnecke ist dann etwa $12\,367/365 \approx 33.88$ Jahre alt, der Baum ist über 12 km hoch.

Aufgabe 10a: (Konvergenz von Reihen. Quotientenkriterium)

Betrachte die Reihe $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} F_k \cdot x^k$, wo F_k die in Aufgabe 7a auf Blatt 3a definierten Fibonacci–Zahlen sind. Man braucht zur Lösung dieser Aufgabe die Ergebnisse der Aufgabe 7a.

a) Für welche Werte von x konvergiert die obige Reihe?

   Anleitung: Quotientenkriterium. Verwende das Ergebnis von Aufgabe 7a.a).

b) Berechne $(1-x-x^2)\cdot f(x)$. Welche (rationale) Funktion wird auf dem Konvergenzbereich der Reihe durch $f(x)$ dargestellt?

Musterlösung:

a) Das Quotientenkriterium garantiert Konvergenz, wenn bis auf endlich viele Indizes

$$\frac{F_{k+1} \cdot |x|^{k+1}}{F_k \cdot |x|^k} = x_k \cdot |x|$$

durch einen Wert < 1 beschränkt ist. Hierbei konvergiert $x_k = F_{k+1}/F_k$ nach Aufgabe 7a.a) gegen den Grenzwert $x^* = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Für jedes x mit $x^* \cdot |x| < 1$ folgt für $\epsilon = \frac{1-x^* \cdot |x|}{2 \cdot |x|} > 0$:

$$x_k \cdot |x| \leq (x^* + \epsilon) \cdot |x| = \left(x^* + \frac{1 - x^* \cdot |x|}{2 \cdot |x|}\right) \cdot |x| = x^* \cdot |x| + \frac{1 - x^* \cdot |x|}{2} = \frac{1 + x^* \cdot |x|}{2}$$

für alle hinreichend großen Indizes. Diese Schranke ist kleiner als 1, womit das Quotientenkriterium erfüllt ist. Also: die Reihe konvergiert für alle x mit

$$|x| < \frac{1}{x^*} = \frac{2}{1+\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0.618\ldots .$$

b) Mit den Rechenregeln für Reihen und der rekursiven Definition $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ der Fibonacci-Zahlen folgt:

$$\begin{aligned}
&(1 - x - x^2) \cdot \Big(F_1 \cdot x + F_2 \cdot x^2 + F_3 \cdot x^3 + \dots \Big) \\
&= F_1 \cdot x + F_2 \cdot x^2 + F_3 \cdot x^3 + F_4 \cdot x^4 + \dots \\
&\qquad\quad - F_1 \cdot x^2 - F_2 \cdot x^3 - F_3 \cdot x^4 - \dots \\
&\qquad\qquad\qquad \underbrace{- F_1 \cdot x^3}_{0} \underbrace{- F_2 \cdot x^4}_{0} \underbrace{- \dots}_{0} \\
&= \; F_1 \cdot x + (F_2 - F_1) \cdot x^2 .
\end{aligned}$$

Mit $F_1 = F_2 = 1$ ergibt sich

$$(1 - x - x^2) \cdot \sum_{k=1}^{\infty} F_k \cdot x^k = x \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty} F_k \cdot x^k = \frac{x}{1 - x - x^2}$$

für alle x mit $|x| < \frac{2}{1+\sqrt{5}}$.

Aufgabe 11a: (Die Exponentialreihe)

Es geht um die numerische Auswertung der Exponentialfunktion mittels Gleitpunktarithmetik.

a) (Technisch anspruchsvoll) Sei x eine reelle Gleitpunktzahl mit $|x| \leq \frac{1}{2}$. Wieviele Reihenglieder der Exponentialreihe $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$ müssen aufaddiert werden, damit $|e^x - S_n(x)| \leq \frac{|e^x|}{10^{16}}$ garantiert werden kann? (Diese Bedingung besagt, dass $S_n(x)$ die ersten 16 Dezimalstellen von e^x korrekt approximiert.)

b) Berechne mittels MuPAD einige Partialsummen der Exponentialreihe für $x = -123.456$ mit `DIGITS` $= 16$ und vergleiche mit dem von der Systemfunktion `exp` gelieferten Wert. Gelingt es, durch die Partialsummen eine Approximation dieses Wertes zu erreichen? Erklärung?

Relevante MuPAD Funktionen: `exp, _plus, $`.

c) Wie kann a) für $|x| > \frac{1}{2}$ verwendet werden? Benutze die Funktionalgleichung der Exponentialfunktion, um trotz des Desasters in b) über die Exponentialreihe zu einer Approximation von $e^{-123.456}$ zu gelangen, in der die führenden Dezimalstellen korrekt sind.

Musterlösung:

Aus der Reihendarstellung ist unmittelbar klar, dass e^x monoton wachsend in x ist.

a) Wegen der Monotonie gilt für reelles x mit $|x| \leq \frac{1}{2}$

$$0.6065 \approx e^{-\frac{1}{2}} \leq e^x .$$

Es gilt

$$|e^x - S_n(x)| = \Big| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \Big| = \Big| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \Big| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{|x|^k}{k!}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^k \cdot k!} = \frac{1}{2^{n+1}\cdot (n+1)!} + \frac{1}{2^{n+2}\cdot (n+2)!} + \cdots \\
&\leq \frac{1}{2^{n+1}\cdot (n+1)!} \cdot \Big(1 + \frac{1}{2\cdot (n+2)} + \frac{1}{4\cdot (n+2)\cdot (n+3)} + \cdots\Big) \\
&\leq \frac{1}{2^{n+1}\cdot (n+1)!} \cdot \Big(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots\Big) = \frac{2}{2^{n+1}\cdot (n+1)!} = \frac{1}{2^{n}\cdot (n+1)!}.
\end{aligned}
$$

Durch Ausprobieren findet man folgende Werte:

n	5	10	11	12	13	14
$\frac{1}{2^n \cdot (n+1)!}$	$4.3 \cdot 10^{-5}$	$2.4 \cdot 10^{-11}$	$1.0 \cdot 10^{-12}$	$3.9 \cdot 10^{-14}$	$1.4 \cdot 10^{-15}$	$4.7 \cdot 10^{-17}$

Damit reicht $n = 14$, um

$$|e^x - S_n(x)| \leq \frac{4.7}{10^{17}} \leq \frac{0.6065}{10^{16}} \leq \frac{e^x}{10^{16}}$$

garantieren zu können.
b) Numerisches Experiment:

```
>> DIGITS:= 16:
>> x:=-123.456:
>> _plus(x^k/k! $ k= 0..100)

                      8.368805809476164e50

>> _plus(x^k/k! $ k= 0..200)

                      9.692087156726235e42

>> _plus(x^k/k! $ k= 0..400)

                      -6.490160608451007e32

>> _plus(x^k/k! $ k= 0..800)

                      -6.490160608451007e32

>> _plus(x^k/k! $ k= 0..1600)

                      -6.490160608451007e32
```

Der wirkliche Wert ist:

```
>> exp(-123.456)

                      2.419582541264601e-54
```

Der Grund für dieses katastrophale Verhalten der numerischen Partialsummen ist „Auslöschung“: riesige Summanden mit wechselnden Vorzeichen sollen sich zuletzt fast vollständig aufheben und ein sehr kleines Endergebnis liefern. Hier sind einige der Summanden:

$$\frac{x^{123}}{123!} = -1.48441946501462... \cdot 10^{52}, \quad \frac{x^{124}}{124!} = 1.477907173168104... \cdot 10^{52}.$$

Bei diesen Zahlen müssten mehr als 106 der führenden Dezimalstellen genau sein, damit die 54-te Nachkommastelle des Endergebnisses (die erste führende Ziffer von $e^{-123.456}$) korrekt sein kann. Wir benutzen aber nur 16 Dezimalstellen Genauigkeit!
c) Die Idee ist, mit

$$e^x = \left(e^{\frac{x}{2^n}}\right)^{(2^n)}$$

die Exponentialreihe mit hinreichend grossem n für *kleine* Argumente $\frac{x}{2^n}$ auszuwerten. Das Ergebnis kann dann per „Repeated Squaring“ (Algorithmus zum schnellen Potenzieren) schnell zu e^x potenziert werden. Für $x = -123.456$ wähle $2^n = 256$, so dass $|\frac{x}{2^n}| = 0.48225 \leq \frac{1}{2}$ gilt. Nach a) kann $e^{x/2^n}$ durch die Partialsumme S_{14} der Exponentialreihe auf 16 Dezimalstellen genau approximiert werden;

$$e^{-123.456/256} \approx \sum_{k=0}^{14} \frac{(-123.456/256)^k}{k!} = 0.6173926942959764...$$

Damit ergibt sich

$$e^{-123.456} \approx (0.6173926942959764...)^{256} = 2.419582541264614 \cdot 10^{-54}.$$

Dieses Ergebnis ist korrekt bis auf die letzten beiden der angegebenen Ziffern (das Potenzieren verstärkt den Approximationsfehler durch S_{14} etwas).

Aufgabe 12.a: (Summation durch Partialbruchzerlegung)
In Rezept 3.32 und Beispiel 3.33 der Vorlesung wurde nur der Fall diskutiert, dass in

$$\sum_k \frac{c_0 + c_1 \cdot k + \cdots + c_p \cdot k^p}{d_0 + d_1 \cdot k + \cdots + d_q \cdot k^q}$$

das Nennerpolynom $d_0 + d_1 \cdot k + \cdots + d_q \cdot k^q$ nur einfache Nullstellen hat.

a) Benutze MuPADs `partfrac`, um die Partialbruchzerlegung von

$$\frac{1}{k^2 \cdot (k+1)^2}, \quad \frac{1}{(k+1)^3 \cdot (k+2)}, \quad \frac{1}{(k+1)^4 \cdot (k+2)^3 \cdot (k+3)^2}$$

zu bestimmen.

b) Betrachte den allgemeinen Fall

$$\sum_k \frac{c_0 + c_1 \cdot k + \cdots + c_p \cdot k^p}{(k-k_1)^{n_1} \cdot (k-k_2)^{n_2} \cdot \ldots \cdot (k-k_r)^{n_r}},$$

in dem das Nennerpolynom Nullstellen k_i der Vielfachheiten n_i hat. Es gelte $p \leq n_1 + \cdots + n_r - 2$. Stelle eine Vermutung auf, wie der allgemeine Ansatz für die Partialbruchzerlegung zu lauten hat.

c) Seien $M_1, \ldots, M_7$ die üblichen Ziffern der Matrikelnummer. Berechne die Partialbruchzerlegung von $\dfrac{k - M_1 - M_3 - M_5 - M_7}{k^3 \cdot (k+1)^2}$.

d) Gelingt es mit c), die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k - M_1 - M_3 - M_5 - M_7}{k^3 \cdot (k+1)^2}$$

explizit aufzusummieren? Siehe auch Beispiel 3.22 der Vorlesung.

Musterlösung:

a)

```
>> partfrac(1/k^2/(k+1)^2, k)

                    1   2     2          1
                   -- - - + ----- + --------
                    2   k   k + 1          2
                   k                (k + 1)

>> partfrac(1/(k+1)^3/(k+2)^2, k)

          3         2         3         1          1
        ----- - -------- - ----- + -------- - --------
        k + 1          2   k + 2          3          2
                (k + 1)            (k + 1)    (k + 2)

>> partfrac(1/(k+1)^4/(k+2)^3/(k + 3)^2, k)

      39           75          5         1          2
----------- - ---------- + ----- - -------- + -------- -
          2   16 (k + 1)   k + 2          3          2
16 (k + 1)                         (k + 1)    (k + 2)

       5            1            1            1
   ---------- + ---------- + -------- - -----------
   16 (k + 3)            4          3             2
                4 (k + 1)    (k + 2)    16 (k + 3)
```

b) Allgemeiner Ansatz für $p \leq n_1 + n_2 + \cdots + n_r - 2$:

$$\begin{aligned}
&\frac{c_0 + c_1 \cdot k + \cdots + c_p \cdot k^p}{(k-k_1)^{n_1} \cdot (k-k_2)^{n_2} \cdot \cdots \cdot (k-k_r)^{n_r}}, \\
&= \frac{e_{11}}{k-k_1} + \frac{e_{12}}{(k-k_1)^2} + \cdots + \frac{e_{1n_1}}{(k-k_1)^{n_1}} \\
&+ \frac{e_{21}}{k-k_2} + \frac{e_{22}}{(k-k_2)^2} + \cdots + \frac{e_{2n_2}}{(k-k_2)^{n_2}} \\
&+ \cdots \\
&+ \frac{e_{r1}}{k-k_r} + \frac{e_{r2}}{(k-k_r)^2} + \cdots + \frac{e_{rn_r}}{(k-k_r)^{n_r}}.
\end{aligned}$$

c) Wir betrachten $M_1 + M_3 + M_5 + M_7 = 2$. Ansatz

$$\frac{k-2}{k^3 \cdot (k+1)^2} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k^2} + \frac{c}{k^3} + \frac{d}{k+1} + \frac{e}{(k+1)^2}$$

$$= \frac{a \cdot k^2 \cdot (k+1)^2 + b \cdot k \cdot (k+1)^2 + c \cdot (k+1)^2 + d \cdot k^3 \cdot (k+1) + e \cdot k^3}{k^3 \cdot (k+1)^3}$$
$$= \frac{(a+d) \cdot k^4 + (2 \cdot a + b + d + e) \cdot k^3 + (a + 2 \cdot b + c) \cdot k^2 + (b + 2 \cdot c) \cdot k + c}{k^3 \cdot (k+1)^3}.$$

Es folgen die Gleichungen

$$a + d = 0, \quad 2 \cdot a + b + d + e = 0, \quad a + 2 \cdot b + c = 0, \quad b + 2 \cdot c = 1, \quad c = -2$$

mit der Lösung

$$a = -8, \quad b = 5, \quad c = -2, \quad d = 8, \quad e = 3,$$

also

$$\frac{k-2}{k^3 \cdot (k+1)^2} = -\frac{8}{k} + \frac{5}{k^2} - \frac{2}{k^3} + \frac{8}{k+1} + \frac{3}{(k+1)^2}.$$

Probe mit MuPAD:

```
>> partfrac((k - 2)/k^3/(k + 1)^2, k)

          5   8     2      8          3
          -- - - - -- + ----- + --------
           2   k    3   k + 1          2
          k        k             (k + 1)
```

d) Summation:

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} \Big(-\frac{8}{k} + \frac{5}{k^2} - \frac{2}{k^3} + \frac{8}{k+1} + \frac{3}{(k+1)^2} \Big)$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} \Big(-\frac{8}{k} + \frac{8}{k+1} \Big) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{5}{k^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{(k+1)^2} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k^3}$$

Nur die erste Summe ist eine Teleskopsumme:

$$S = -\frac{8}{1} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{5}{k^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{k^2} - \frac{3}{1} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k^3} = -11 + 8 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} - 2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3}.$$

Das Endergebnis enthält die Summen $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ und $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3}$. Mit MuPAD:

```
>> sum(1/k^2, k = 1 .. infinity)

                                 2
                               PI
                               ---
                                6

>> sum(1/k^3, k = 1 .. infinity)

                             zeta(3)

>> sum((k - 2)/k^3/(k + 1)^2, k = 1.. infinity)

                         2
                     4 PI
                     ----- - 2 zeta(3) - 11
                       3
```