Übungsblatt 4

Abgabe von $*$–Aufgaben am 13.11.2003 in der Übung.

Aufgabe 26*: (Geometrische Reihe. 10 Bonuspunkte)
Man begebe sich ins automatische Abgabe-Tool `bourbaki.upb.de/mfp1`. Diese Aufgabe wird dort als 'Miniprojekt 26' bezeichnet. Man erhält dort eine Reihe, deren Wert mittels diverser geometrischer Reihen bestimmt werden kann. Liefere den Reihenwert im Web-Formular ab. Es sind maximal 3 Abgabeversuche möglich! Abgaben bis Do, 13.11., 23::59::59 Uhr.
MuPAD-Funktionen zur Kontrolle: `sum`.

Musterlösung:
Die generierte Summe ist

$$\sum_{k=M_6}^{\infty} \Big(\frac{M_1 + M_3}{2 \cdot M_1 + 3 \cdot M_3 + M_4}\Big)^{(M_1-2)\cdot k},$$

wobei $M_1, \ldots, M_7$ die Ziffern der Matrikelnummer sind. Setze

$$c := \Big(\frac{M_1 + M_3}{2 \cdot M_1 + 3 \cdot M_3 + M_4}\Big)^{(M_1-2)} \in (0, 1).$$

Gefragt ist

$$\sum_{k=M_6}^{\infty} c^k = \sum_{k=0}^{\infty} c^k - \sum_{k=0}^{M_6-1} c^k = \frac{1}{1-c} - \frac{1-c^{M_6}}{1-c} = \frac{c^{M_6}}{1-c}.$$

Mit MuPAD für spezielle Werte von M_1, M_3, M_4, M_6:

```
>> M1:= 3: M3:= 5: M4:= 6: M6:= 8:
>> sum(((M1 + M3)/(2*M1 + 3*M3 + M4))^((M1 - 2)*k), k = M6..infinity)

                    16777216/198746710857
```

Aufgabe 27: (Reihen, p-adische Darstellung. 0 Bonuspunkte)
Sei $p \in \{2, 3, 4, \ldots\}$. Mit der sogenannten „$p$-adischen Darstellung“

$$b_k\, b_{k-1}\, \ldots\, b_1\, b_0\, .\, b_{-1}\, b_{-2}\, b_{-3}\, \ldots$$

ist die Zahl $\sum_{j \le k} b_j \cdot p^j$ gemeint, wobei $b_j \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$ die „Ziffern zur Basis p“ genannt werden. (Für $p = 10$ sind dies die wohlbekannten Dezimalziffern, für $p = 2$ die Binärziffern (Bits) $b_j \in \{0, 1\}$.)
Berechne die rationale Zahl, die im Binärsystem durch die periodische Entwicklung

$$1011\,.\,1100\,\overline{10} \quad (= 1011\,.\,1100\,10\,10\,10\,10\ldots)$$

gegeben ist.

Musterlösung:

$$\begin{aligned}
&1011\,.\,1100\,10\,10\,10\,10\;\ldots\\
=\;& 1\cdot 2^3+0\cdot 2^2+1\cdot 2^1+1\cdot 2^0+1\cdot 2^{-1}+1\cdot 2^{-2}+0\cdot 2^{-3}+0\cdot 2^{-4}\\
&+1\cdot 2^{-5}+0\cdot 2^{-6}+1\cdot 2^{-7}+0\cdot 2^{-8}+1\cdot 2^{-9}+0\cdot 2^{-10}+\cdots\\
=\;& 2^3+2^1+2^0+2^{-1}+2^{-2}+\left(2^{-5}+2^{-7}+2^{-9}+\cdots\right)\\
=\;& 8+2+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2^5}\cdot\left(1+2^{-2}+2^{-4}+\cdots\right)\\
=\;& 8+2+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2^5}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^k\\
=\;& \frac{47}{4}+\frac{1}{32}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{4}}\\
=\;& \frac{47}{4}+\frac{1}{32}\cdot\frac{4}{3}\\
=\;& \frac{283}{24}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 28*: (Periodische Dezimaldarstellung. 10 Bonuspunkte)

Man begebe sich ins automatische Abgabe-Tool `bourbaki.upb.de/mfp1`. Diese Aufgabe wird dort als 'Miniprojekt 28' bezeichnet. Man erhält dort eine periodische Dezimalzahl, die als rationale Zahl „Nenner/Zähler“ dargestellt werden soll. Liefere diese Darstellung im Web-Formular ab.
Es sind maximal 3 Abgabeversuche möglich! Abgaben bis Do, 13.11., 23::59::59 Uhr.
MuPAD-Funktionen zur Kontrolle: `sum`.
Anleitung: Aufgabe 27, Basis $p = 10$.

Musterlösung:
Die generierte periodische Dezimalzahl ist

$$M_1\,M_2\,.\,M_3\,M_4\,\overline{M_6\,M_7}\quad (= M_1\,M_2\,.\,M_3\,M_4\;M_6\,M_7\;M_6\,M_7\;M_6\,M_7\;\ldots),$$

wobei $M_1,\ldots,M_7$ die Ziffern der Matrikelnummer sind. Hierdurch wird folgende rationale Zahl dargestellt:

$$\begin{aligned}
&M_1\,M_2\,.\,M_3\,M_4\,\overline{M_6\,M_7}\\
&= M_1\cdot p^1+M_2\cdot p^0+\frac{M_3}{p}+\frac{M_4}{p^2}+M_6\cdot\left(\frac{1}{p^3}+\frac{1}{p^5}+\frac{1}{p^7}+\cdots\right)+M_7\cdot\left(\frac{1}{p^4}+\frac{1}{p^6}+\frac{1}{p^8}+\cdots\right)\\
&= M_1\cdot p+M_2+\frac{M_3}{p}+\frac{M_4}{p^2}+M_6\cdot\frac{1}{p^3}\cdot\left(1+\frac{1}{p^2}+\frac{1}{p^4}+\cdots\right)+M_7\cdot\frac{1}{p^4}\cdot\left(1+\frac{1}{p^2}+\frac{1}{p^4}+\cdots\right)\\
&= M_1\cdot p+M_2+\frac{M_3}{p}+\frac{M_4}{p^2}+\left(\frac{M_6}{p^3}+\frac{M_7}{p^4}\right)\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{p^2}\right)^k\\
&= M_1\cdot p+M_2+\frac{M_3}{p}+\frac{M_4}{p^2}+\left(\frac{M_6}{p^3}+\frac{M_7}{p^4}\right)\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{p^2}}\\
&= M_1\cdot p+M_2+\frac{M_3}{p}+\frac{M_4}{p^2}+\left(\frac{M_6}{p^3}+\frac{M_7}{p^4}\right)\cdot\frac{p^2}{p^2-1}.
\end{aligned}$$

Z.B. für die Matrikelnummer 3456780:

$$34.56\,\overline{80} = 3 \cdot 10 + 4 + \frac{5}{10} + \frac{6}{10^2} + \Big(\frac{8}{10^3} + \frac{0}{10^4}\Big) \cdot \frac{10^2}{10^2 - 1} = \frac{85556}{2475}.$$

Probe:

```
>> DIGITS:= 50:
>> float(85556/2475)

      34.568080808080808080808080808080808080808080808081
```

Alternatives Argument. Mit $x = M_1 M_2 . M_3 M_4 \overline{M_6 M_7}$:

$$\begin{array}{rrcl} & 100 \cdot x & = & M_1 M_2 M_3 M_4 \;.\; M_6 M_7 M_6 M_7 M_6 M_7 ... \\ - & x & = & M_1 M_2 \;.\; M_3 M_4 M_6 M_7 M_6 M_7 ... \\ \hline & 99 \cdot x & = & M_1 M_2 (M_3 - M_1)(M_4 - M_2) \;.\; (M_6 - M_3)(M_7 - M_4) \end{array}$$

also

$$99 \cdot x = M_1 \cdot 10^3 + M_2 \cdot 10^2 + (M_3 - M_1) \cdot 10 + (M_4 - M_2) + \frac{M_6 - M_3}{10} + \frac{M_7 - M_4}{10^2}.$$

Hier muss für die Matrikelnummer 3456780 das selbe herauskommen:

$$x = 34.56\,\overline{80} = \frac{1}{99} \cdot \Big(3 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 2 + \frac{3}{10} - \frac{6}{100}\Big) = \frac{85556}{2475}.$$

Aufgabe 29*: (Reihen. Diverse Konvergenzkriterien, je 5 Bonuspunkte)
Untersuche die folgenden Reihen auf Konvergenz:

$$a) \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k + \sqrt{k}}, \qquad b) \quad \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2 - \sqrt{k}}, \qquad c) \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k-1}}{\sqrt{k}}.$$

$$d) \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k-1}}{k}, \qquad e) \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{k!}{k^k}, \qquad f) \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{e^{-k}}{e^{-2\cdot k}}, \qquad g) \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{e^{-2\cdot k}}{e^{-k}}.$$

Musterlösung:
a) Divergenz nach dem Minorantenkriterium. Es gilt

$$\frac{1}{k + \sqrt{k}} \geq \frac{1}{k + k} = \frac{1}{2 \cdot k}.$$

Damit ist $\sum_k \frac{1}{2\cdot k}$ eine divergente Minorante.
b) Konvergenz nach dem Majorantenkriterium. Es gilt

$$\frac{1}{k^2 - \sqrt{k}} \leq \frac{1}{k^2 - k} = \frac{1}{k \cdot (k-1)}.$$

Bekannterweise konvergiert $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \cdot (k-1)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1) \cdot k}$ und bildet damit eine konvergente Majorante.

c) Divergenz nach dem Minorantenkriterium. Es gilt

$$\frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k-1}}{\sqrt{k}} = \frac{1}{\sqrt{k}} \cdot \frac{(\sqrt{k+1}-\sqrt{k-1})\cdot(\sqrt{k+1}+\sqrt{k-1})}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k-1}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{k}} \cdot \frac{2}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k-1}} = \frac{1}{\sqrt{k}} \cdot \frac{2}{\sqrt{k}\cdot\left(\sqrt{1+\frac{1}{k}}+\sqrt{1-\frac{1}{k}}\right)} = \frac{1}{k} \cdot \frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{k}}+\sqrt{1-\frac{1}{k}}}.$$

Der hintere Faktor konvergiert gegen 1, ist also sicherlich größer als 1/2 für hinreichned großes k. Damit folgt für hinreichend große k

$$\frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k-1}}{\sqrt{k}} \geq \frac{1}{2\cdot k}.$$

Damit ist $\sum_k \frac{1}{2\cdot k}$ eine divergente Minorante.
d) Konvergenz nach dem Majorantenkriterium. Analog zu c) gilt

$$\frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k-1}}{k} = \frac{1}{k} \cdot \frac{(\sqrt{k+1}-\sqrt{k-1})\cdot(\sqrt{k+1}+\sqrt{k-1})}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k-1}}$$

$$= \frac{1}{k} \cdot \frac{2}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k-1}} = \frac{1}{k} \cdot \frac{2}{\sqrt{k}\cdot\left(\sqrt{1+\frac{1}{k}}+\sqrt{1-\frac{1}{k}}\right)} = \frac{1}{k^{3/2}} \cdot \frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{k}}+\sqrt{1-\frac{1}{k}}}.$$

Der hintere Faktor konvergiert gegen 1, ist also sicherlich kleiner als 2 für hinreichned großes k. Damit folgt für hinreichend grosse k

$$\frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k-1}}{k} \leq \frac{2}{k^{3/2}}.$$

Nach Beispiel 3.25 ist $\sum_k \frac{2}{k^{3/2}}$ eine konvergente Majorante.
e) Das Quotientenkriterium für $z_k = \frac{k!}{k^k}$ liefert

$$\frac{z_{k+1}}{z_k} = \frac{(k+1)!/(k+1)^{k+1}}{k!/k^k} = (k+1)\frac{k^k}{(k+1)^{k+1}} = \frac{k^k}{(k+1)^k}$$

$$= \left(\frac{k}{k+1}\right)^k = \left(\frac{1}{\frac{k+1}{k}}\right)^k = \frac{1}{(1+\frac{1}{k})^k}.$$

Mit $(1+\frac{1}{k})^k \to e = 2.718...$ konvergiert $\frac{z_{k+1}}{z_k}$ gegen $1/e = 0.367...$. Damit gilt für alle hinreichend großen k sicherlich $\frac{z_{k+1}}{z_k} \leq \frac{1}{2}$. Nach dem Quotientenkriterium konvergiert die Reihe.
f) Es gilt

$$\frac{e^{-k}}{e^{-2\cdot k}} = e^{2\cdot k}\cdot e^{-k} = e^k.$$

Die Summanden bilden keine Nullfolge. Damit kann die Reihe nicht konvergieren.
g) Konvergenz nach dem Majorantenkriterium. Es gilt

$$\frac{e^{-2\,k}}{e^{-k}} = \frac{1}{e^{2\cdot k}\cdot e^{-k}} = \frac{1}{e^k} = \frac{1}{(2.718...)^k} \leq \frac{1}{2^k}.$$

Die geometrische Reihe $\sum_k (\frac{1}{2})^k$ ist damit eine konvergente Majorante.

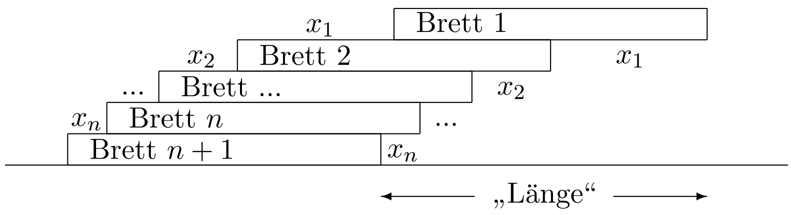
Aufgabe 30*: (Die harmonische Reihe. Modellierungsaufgabe. 15 + 5 + 10 Bonuspunkte)

Man hat eine beliebig große Anzahl von Brettern der Länge 1 m zum Bau einer „Brücke“ zur Verfügung. Hier der rekursive Brückenbau:

Start: lege ein Brett auf den Boden.

Schritt 1: Schiebe ein zweites Brett unter das erste und verschiebe das obere Brett um ein Stück x_1 soweit, dass es gerade noch nicht kippt.

Schritt $n \to n+1$: Gegeben eine Brücke aus n Brettern. Schiebe ein weiteres Brett unter diese Brücke und verschiebe den oberen Brückenteil um ein Stück x_n soweit, dass er gerade noch nicht kippt:



a) Bestimme eine Formel für die „Länge“ $\sum_{k=1}^{n} x_k$ der aus $n+1$ Brettern bestehenden Brücke.

b) Gibt es eine Grenze, die die Länge der Brücke prinzipiell nicht überschreiten kann?

c) Wie viele Bretter braucht man, um die Länge 5 m zu überschreiten?

Musterlösung:

a) Bei 2 Brettern ($n = 1$) kann das obere Brett bis zu halben Brettlänge hervorragen, also $x_1 = 1/2$. Bei 3 Brettern ($n = 2$) liegt der Schwerpunkt des 1-ten Bretts im Abstand $x_1 + x_2 + \frac{1}{2}$ von der linken Kante des 3-ten Bretts, der Schwerpunkt des 2-ten Bretts liegt im Abstand $x_2 + \frac{1}{2}$ von der linken Kante des 3-ten Bretts. Der Schwerpunkt der beiden oberen Bretter zusammen hat damit den Abstand

$$\frac{1}{2} \cdot (x_2 + \frac{1}{2} + x_2 + x_1 + \frac{1}{2})$$

von der linken Kante des 3-ten Bretts. Damit die oberen beiden Bretter gerade nicht mehr kippen, muss

$$\frac{1}{2} \cdot (x_2 + x_2 + x_1 + 1) = 1$$

gelten, also

$$x_2 = 1 - \frac{x_1}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

Nun allgemein: Bei $n+1$ Brettern liegt der Schwerpunkt
des 1-ten Bretts im Abstand $x_n + x_{n-1} + \cdots + x_2 + x_1 + \frac{1}{2}$,
des 2-ten Bretts im Abstand $x_n + x_{n-1} + \cdots + x_2 + \frac{1}{2}$,
...
des n-ten Bretts im Abstand $x_n + \frac{1}{2}$
vom linken Rand des $(n+1)$-ten Bretts. Der gemeinsame Schwerpunkt der oberen n Bretter liegt damit im Abstand

$$\frac{1}{n} \cdot \Big((x_n + \frac{1}{2}) + (x_n + x_{n-1} + \frac{1}{2}) + (x_n + x_{n-1} + x_{n-2} + \frac{1}{2}) + \ldots + (x_n + \ldots + x_1 + \frac{1}{2}) \Big)$$

$$= x_n + \frac{n-1}{n} \cdot x_{n-1} + \ldots + \frac{2}{n} \cdot x_2 + \frac{1}{n} \cdot x_1 + \frac{n}{2}$$

vom linken Rand des $(n+1)$-ten Bretts. Bei maximaler Verschiebung der oberen n Bretter auf dem $(n+1)$-ten Brett gilt

$$x_n + \frac{n-1}{n} \cdot x_{n-1} + \ldots + \frac{2}{n} \cdot x_2 + \frac{1}{n} \cdot x_1 + \frac{1}{2} = 1$$

(dies ist der Moment, wo beim Verschieben der oberen n Bretter der Schwerpunkt den rechten Rand des $(n+1)$-ten Bretts erreicht und der obere Stapel kippt). Wir haben damit die Rekursion

$$x_n = \frac{1}{2} - \frac{n-1}{n} \cdot x_{n-1} + \ldots + \frac{2}{n} \cdot x_2 + \frac{1}{n} \cdot x_1 \quad x_1 = \frac{1}{2},$$

bzw. nach Multiplikation mit n:

$$\underbrace{n \cdot x_n}_{y_n} = \frac{n}{2} - \underbrace{(n-1) \cdot x_{n-1}}_{y_{n-1}} - \underbrace{(n-2) \cdot x_{n-2}}_{y_{n-2}} - \ldots - \underbrace{2 \cdot x_2}_{y_2} - \underbrace{1 \cdot x_1}_{y_1}, \quad \underbrace{1 \cdot x_1}_{y_1} = \frac{1}{2}.$$

Die Lösung der Rekursion

$$y_n = \frac{n}{2} - y_{n-1} - \ldots - y_1, \quad y_1 = \frac{1}{2}$$

ist offensichtlich $y_1 = y_2 = y_3 = \cdots = \frac{1}{2}$. Hat man dies geraten, ist die (offensichtlich eindeutige) Lösung der Rekursion durch Einsetzen leicht zu verifizieren:

$$\overbrace{\frac{1}{2}}^{y_n} = \frac{n}{2} \underbrace{- \overbrace{\frac{1}{2}}^{y_{n-1}} - \ldots - \overbrace{\frac{1}{2}}^{y_1}}_{n-1 \text{ Terme}} = \frac{n}{2} - \frac{n-1}{2} = \frac{1}{2} \qquad \text{(OK)}.$$

Mit $y_n = n \cdot x_n = \frac{1}{2}$ folgt $x_n = \frac{1}{2 \cdot n}$, also hat die Brücke aus $n+1$ Brettern die Länge

$$\text{Länge} = \sum_{k=1}^{n} x_k = \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

b) Laut Vorlesung divergiert die harmonische Reihe $\sum_k \frac{1}{k}$, d.h., die Brücke wird mit wachsendem n beliebig lang.

c) Ab welchem n gilt Länge ≥ 5, d.h., $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geq 10$? Durch Ausprobieren mit MuPAD erhält man:

n	$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$
10	2.9289...
100	5.1873...
1000	7.4854...
2000	8.1783...
4000	8.8713...
8000	9.0945...
10 000	9.7876...
12 000	9.9699...
12 366	9.999962...
12 367	10.000043...

Man braucht also 12368 Bretter.

Aufgabe 31*: (Die Exponentialreihe. Beweis. 10 Bonuspunkte)
Beweise mit Hilfe des Cauchy-Produkts der Reihen für e^x und e^y die Funktionalgleichung $e^x \cdot e^y = e^{x+y}$ der Exponentialfunktion.

Hilfestellung: verwende den Binomischen Lehrsatz $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot x^k \cdot y^{n-k}$.

Musterlösung:
Die Koeffizienten c_n des Cauchy-Produkts

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \frac{y^j}{j!}$$

sind durch

$$c_n = \sum_{\substack{i,j\\ i+j=n}} \frac{x^i}{i!} \cdot \frac{y^j}{j!} = \sum_{i=0}^{n} \frac{x^i}{i!} \cdot \frac{y^{n-i}}{(n-i)!} = \frac{1}{n!} \cdot \sum_{i=0}^{n} \frac{n! \cdot x^i \cdot y^{n-i}}{i! \cdot (n-i)!} = \frac{1}{n!} \cdot \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \cdot x^i \cdot y^{n-i} = \frac{(x+y)^n}{n!}$$

gegeben, also

$$e^x \cdot e^y = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \frac{y^j}{j!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!} = e^{x+y}.$$

Aufgabe 32: (Summation durch Partialbruchzerlegung. 0 Bonuspunkte)
Bestimme den Reihenwert von $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{k^2-k}{(k+1)\cdot(k+2)\cdot(k+3)\cdot(k+4)}$.
Anleitung: Rezept 3.32, Beispiel 3.33 der Vorlesung.

Musterlösung:
Ansatz für die Partialbruchentwicklung:

$$\frac{k^2-k}{(k+1)\cdot(k+2)\cdot(k+3)\cdot(k+4)} = \frac{e_1}{k+1} + \frac{e_2}{k+2} + \frac{e_3}{k+3} + \frac{e_4}{k+4}$$

$$= \frac{(e_1+e_2+e_3+e_4)\cdot k^3}{(k+1)\cdot(k+2)\cdot(k+3)\cdot(k+4)} + \frac{(9\cdot e_1 + 8\cdot e_2 + 7\cdot e_3 + 6\cdot e_4)\cdot k^2}{(k+1)\cdot(k+2)\cdot(k+3)\cdot(k+4)}$$

$$+ \frac{(26\cdot e_1 + 19\cdot e_2 + 14\cdot e_3 + 11\cdot e_4)\cdot k}{(k+1)\cdot(k+2)\cdot(k+3)\cdot(k+4)} + \frac{24\cdot e_1 + 12\cdot e_2 + 8\cdot e_3 + 6\cdot e_4}{(k+1)\cdot(k+2)\cdot(k+3)\cdot(k+4)}.$$

Es folgt das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcrcr}
e_1 & + & e_2 & + & e_3 & + & e_4 & = & 0, \\
9\cdot e_1 & + & 8\cdot e_2 & + & 7\cdot e_3 & + & 6\cdot e_4 & = & 1, \\
26\cdot e_1 & + & 19\cdot e_2 & + & 14\cdot e_3 & + & 11\cdot e_4 & = & -1, \\
24\cdot e_1 & + & 12\cdot e_2 & + & 8\cdot e_3 & + & 6\cdot e_4 & = & 0
\end{array}$$

mit der Lösung

$$e_1 = \frac{1}{3}, \quad e_2 = -3, \quad e_3 = 6, \quad e_4 = -\frac{10}{3}.$$

Probe mit MuPAD:

```
>> partfrac((k^2 - k)/(k+1)/(k+2)/(k+3)/(k+4), k)

                   1            3        6             10
              --------- - ----- + ----- - ---------
              3 (k + 1)    k + 2   k + 3   3 (k + 4)
```

Summation:

$$\sum_{k=2}^{\infty}\Big(\frac{1/3}{k+1}-\frac{3}{k+2}+\frac{6}{k+3}-\frac{10/3}{k+4}\Big)$$

$$\begin{array}{cccccccccccc}
= & \frac{1/3}{3} & + & \frac{1/3}{4} & + & \frac{1/3}{5} & + & \frac{1/3}{6} & + & \frac{1/3}{7} & + & \dots \\
 & & - & \frac{3}{4} & - & \frac{3}{5} & - & \frac{3}{6} & - & \frac{3}{7} & - & \dots \\
 & & & & + & \frac{6}{5} & + & \frac{6}{6} & + & \frac{6}{7} & + & \dots \\
 & & & & & & - & \underbrace{\frac{10/3}{6}}_{0} & - & \underbrace{\frac{10/3}{7}}_{0} & - & \underbrace{\dots}_{0} \\
= & \frac{1/3}{3} & - & \frac{8/3}{4} & + & \frac{10/3}{5} & = & \frac{1}{9}. & & & &
\end{array}$$

Probe mit MuPAD:

```
>> sum((k^2 - k)/(k+1)/(k+2)/(k+3)/(k+4), k = 2 .. infinity)

                            1/9
```

Aufgabe 33*: (Summation durch Partialbruchzerlegung. 10 Bonuspunkte)
Man begebe sich ins automatische Abgabe-Tool `bourbaki.upb.de/mfp1`. Diese Aufgabe wird dort als 'Miniprojekt 33' bezeichnet. Man erhält dort eine Reihe, deren Wert mittels Partialbruchzerlegung berechenbar ist. Liefere den Reihenwert im Web-Formular ab.
Es sind maximal 3 Abgabeversuche möglich! Abgaben bis Do, 13.11., 23::59::59 Uhr.
MuPAD-Funktionen zur Kontrolle: `partfrac, sum`.
Anleitung: wie Aufgabe 32, rechenintensiver.

Musterlösung:
Die generierte Aufgabe ist, den Reihenwert

$$\sum_{k=2\cdot M_1+M_4}^{\infty}\frac{k-M_6-M_7}{k^3+(M_2+M_3-M_4)\cdot k^2-(M_1+M_2+M_3)\cdot(M_1+M_4)\cdot k}$$

zu berechnen, wobei $M_1, \dots, M_7$ die Ziffern der Matrikelnummer sind.

Die Partialbruchzerlegung:

```
>> partfrac((k-M6-M7)/(k^3 + (M2+M3-M4)*k^2 - (M1+M2+M3)*(M1+M4)*k), k):
>> map(%, factor) // zur Vereinfachung

          M6 + M7
------------------------ -
```

```
k (M1 + M4) (M1 + M2 + M3)

                    M1 + M2 + M3 + M6 + M7
   ------------------------------------------------------- +
   (M1 + M2 + M3) (k + M1 + M2 + M3) (2 M1 + M2 + M3 + M4)

                 M6 - M4 - M1 + M7
   ---------------------------------------------
   (M1 + M4) (M1 - k + M4) (2 M1 + M2 + M3 + M4)
```

Die Partialbruchzerlegung, z.B. für die Matrikelnummer 3456780:

```
>> M1:= 3: M2:= 4: M3:= 5: M4:= 6: M5:= 7: M6:= 8: M7:= 0:
>> partfrac((k-M6-M7)/(k^3 + (M2+M3-M4)*k^2 - (M1+M2+M3)*(M1+M4)*k), k)

                 2         1             5
               ---- + ----------- - -----------
               27 k   189 (k - 9)   63 (k + 12)
```

Der Reihenwert:

```
>> sum((k-M6-M7)/(k^3 + (M2+M3-M4)*k^2 - (M1+M2+M3)*(M1+M4)*k),
       k = 2*M1 + M4 .. infinity )

                   65514825589/1011949258320
```
