(Zusatz-)Ü b u n g s b l a t t 3a

Hier ist eine zusätzliche Sammlung von Aufgaben zu Folgen und Grenzwerten. Zusammen mit Blatt 3 ist dies deutlich mehr Material als man sich sinnvollerweise innerhalb einer Woche anschauen sollte. Meine Empfehlung: man konzentriere sich auf Blatt 3 und benutze dieses Zusatzmaterial optional –je nach Ehrgeiz– zur weiteren Übung jetzt oder später (z.B. für die Prüfungsvorbereitung). Es wird hierzu wie für alle Übungsaufgaben Musterlösungen geben.

Aufgabe 1a: (Folgen, Grenzwerte. Einfacher Beweis.)
Die komplexe Folge (z_n) konvergiere gegen z^*. Zeige, dass die komplex-konjugierte Folge $(\overline{z_n})$ gegen $\overline{z^*}$ konvergiert.

Musterlösung:
Es gilt $|z| = \sqrt{z \cdot \overline{z}} = |\overline{z}|$. Zu $\epsilon > 0$ existiert ein $N(\epsilon)$, so dass $|z_n - z^*| \leq \epsilon$ gilt für alle $n \geq N(\epsilon)$. Alle dieses Folgenglieder erfüllen auch

$$|\overline{z_n} - \overline{z^*}| = |\overline{z_n - z^*}| = |z_n - z^*| \leq \epsilon,$$

d.h., $(\overline{z_n})$ konvergiert gegen $\overline{z^*}$.

Aufgabe 2a: (Folgen, Grenzwerte. Beweise.)
Seien (x_n) und (y_n) konvergente reelle Folgen mit den Grenzwerten x^* bzw. y^*.

a) Es gelte $x_n \leq y_n$ für alle Indizes. Zeige: $x^* \leq y^*$. (Indirekter Beweis.)

b) Es gelte $x_n < y_n$ für alle Indizes. Gilt immer $x^* < y^*$? (Finde ein Gegenbeispiel.)

Musterlösung:
a) Angenommen, es gilt $x^* > y^*$. Betrachte $\epsilon = (x^* - y^*)/3 > 0$. Zu diesem ϵ gibt es Folgenglieder x_n bzw. y_n mit

$$|x_n - x^*| \leq \epsilon, \quad |y_n - y^*| \leq \epsilon,$$

also

$$x^* - \epsilon \leq x_n \leq y_n \leq y^* + \epsilon \quad \Rightarrow \quad x^* - y^* \leq 2 \cdot \epsilon.$$

Für das konkrete $\epsilon = (x^* - y^*)/3$ folgt der Widerspruch

$$x^* - y^* \leq \frac{2}{3} \cdot (x^* - y^*).$$

b) Gegenbeispiel: $x_n = 1$, $y_n = 1 + 1/n$ mit $x_n < y_n$ für alle n, aber $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1 = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

Aufgabe 3a: (Folgen, Grenzwerte. Einfacher Beweis)
Sei (z_n) eine konvergente Folge. Zeige durch einen formal sauberen Beweis, dass für jedes (fixierte) $k \in \mathbb{N}$ die „verschobenen“ Folgen (z_{n+k}) gegen den selben Grenzwert konvergieren.

Musterlösung:
$(z_n) \to z^*$ bedeutet, dass es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $N(\epsilon)$ gibt, so dass $|z_n - z^*| \leq \epsilon$ gilt für alle Indizes $n \geq N(\epsilon)$. Betrachte nun (z_{n+k}). Zu gegebenem $\epsilon > 0$ setze $N^{(k)}(\epsilon) = N(\epsilon) - k$. Dann gilt für alle $n \geq N^{(k)}(\epsilon)$, also $n + k \geq N(\epsilon)$:

$$|z_{n+k} - z^*| \leq \epsilon.$$

Dies ist die Konvergenz von (z_{n+k}) gegen z^*.

Aufgabe 4a: (Folgen, Grenzwerte)
Bestimme $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n}{n!}$.

Musterlösung:
Es gilt

$$0 < \frac{2^n}{n!} = \frac{2 \cdot 2 \cdot \overbrace{2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2}^{n-2}}{1 \cdot 2 \cdot \underbrace{3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot n}_{n-2}} < \frac{2 \cdot 2 \cdot \overbrace{2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2}^{n-2}}{1 \cdot 2 \cdot \underbrace{3 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 3}_{n-2}} = 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} = \frac{9}{2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

Bekanntlich bildet $(2/3)^n$ eine Nullfolge (Beispiel 2.10 der Vorlesung). Per Intervallschachtelung (Satz 2.17 der Vorlesung) folgt $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n}{n!} = 0$.

Aufgabe 5a: (Konvergenz monotoner Folgen)
Betrachte die durch $x_{n+1} = \sqrt{1 + x_n}$, $x_1 = 0$ definierte Folge.

a) Zeige, dass (x_n) streng monoton wachsend ist.

b) Zeige per Induktion: $0 \leq x_n < 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

c) Bestimme den Grenzwert von (x_n).

Musterlösung:
a) Behauptung: $x_n < x_{n+1}$. Induktionsstart: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, also $x_1 < x_2$. Induktionsschritt $n-1 \to n$: Sei $x_n > x_{n-1}$. Es folgt

$$x_{n+1} = \sqrt{1 + x_n} > \sqrt{1 + x_{n-1}} = x_n.$$

b) Behauptung: $x_n < 2$. Induktionsstart: $x_1 = 0 < 2$. Induktionsschritt: Sei $x_n < 2$. Es folgt

$$x_{n+1} = \sqrt{1 + x_n} < \sqrt{1 + 2} = \sqrt{3} < 2.$$

c) Sei x^* der Grenzwert. Es muß gelten:

$$\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = x^* = \lim_{n\to\infty} \sqrt{1 + x_n} = \sqrt{1 + \lim_{n\to\infty} x_n} = \sqrt{1 + x^*}$$

$$\Rightarrow \quad (x^*)^2 = 1 + x^* \quad \Rightarrow \quad x^* = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Nur der positive Wert $x^* = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ kommt als Grenzwert in Frage.

Aufgabe 6a: (Intervallschachtelung)

Sei $M \in \{3\,000\,000, 3\,000\,001, \ldots, 6\,999\,999\}$ die Matrikelnummer. Betrachte die durch $x_{n+1} = \sqrt{M + 2 \cdot x_n}$, $x_1 = 1$ definierte Folge. Ermittle eine obere Schranke für die Folgenglieder und berechne den Grenzwert.

Anleitung: siehe Aufgabe 5a.

Musterlösung:

Analog zu Aufgabe 5a.a) ergibt sich die Monotonie unmittelbar durch Induktion. Jede Konstante K, die größer als der berechnete Grenzwert ist, ist eine obere Schranke (wegen der Monotonie). In der Tat liefert Induktion sofort den Beweis, dass z.B. M $(> 1 + \sqrt{1 + M})$ für alle Matrikelnummern eine obere Schranke ist:

$$x_n \leq M \quad \Rightarrow \quad x_{n+1} = \sqrt{M + 2 \cdot x_n} \leq \sqrt{M + 2 \cdot M} = \sqrt{3 \cdot M} \leq M,$$

da für alle Matrikelnummern sicherlich $3 \cdot M \leq M^2$ gilt. Der Grenzwert x^* ergibt sich aus der Gleichung

$$x^* = \sqrt{M + 2 \cdot x^*} \quad \Rightarrow \quad (x^*)^2 - 2 \cdot x^* - M = 0 \quad \Rightarrow \quad x^* = 1 \pm \sqrt{1 + M}.$$

Nur der positive Wert $1 + \sqrt{1 + M}$ kommt als Grenzwert in Frage.

Aufgabe 7a: (Die Fibonacci-Zahlen)

Die Fibonacci-Folge (F_n) ist durch

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \quad \text{mit} \quad F_0 = 0,\ F_1 = 1$$

definiert. Betrachte die Folge $x_n = F_{n+1}/F_n$, $n \in \mathbb{N}$. Diese Folge konvergiert.

a) Ermittle eine Gleichung für den Grenzwert von (x_n) und berechne ihn.

b) Berechne die ersten 25 Werte $x_1, \ldots, x_{25}$. Wie genau approximiert (rein experimentell) x_{25} den Grenzwert?

c) In welcher Größenordnung liegt F_{10^7} (wieviele Dezimalstellen hat diese Zahl ungefähr)? Eine grobe Abschätzung soll hier ausreichen.

Anleitung zu c): Man versuche erst gar nicht, F_{10^7} mittels MuPADs `numlib::fibonacci` exakt zu berechnen. Verwende $F_n = x_{n-1} \cdot F_{n-1} = x_{n-1} \cdot x_{n-2} \cdot F_{n-2} = \ldots$ zusammen mit a) für eine grobe Abschätzung.

Musterlösung:

a) Aus der Rekursion der Fibonacci-Zahlen folgt

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \quad \Rightarrow \quad \frac{F_{n+1}}{F_n} = 1 + \frac{F_{n-1}}{F_n} \quad \Rightarrow \quad x_n = 1 + \frac{1}{x_{n-1}}.$$

Für $x^* = \lim_n x_n$ folgt „wie üblich“ die Gleichung

$$x^* = 1 + \frac{1}{x^*} \quad \Rightarrow \quad (x^*)^2 = x^* + 1 \quad \Rightarrow \quad x^* = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Nur der positive Wert $x^* = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ kommt als Grenzwert in Frage.

b)

```
>> x:= n -> numlib::fibonacci(n+1)/numlib::fibonacci(n):
>> float(x(n)) $ n=1..25

1.0, 2.0, 1.5, 1.666666667, 1.6, 1.625, 1.615384615,

   1.619047619, 1.617647059, 1.618181818, 1.617977528,

   1.618055556, 1.618025751, 1.618037135, 1.618032787,

   1.618034448, 1.618033813, 1.618034056, 1.618033963,

   1.618033999, 1.618033985, 1.61803399, 1.618033988,

   1.618033989, 1.618033989
```

Die ersten 10 Stellen von x_{25} scheinen schon stabil geworden zu sein und mit denen des Grenzwerts übereinzustimmen.

c) Es gilt

$$F_n = x_{n-1} \cdot F_{n-1} = x_{n-1} \cdot x_{n-2} \cdot F_{n-2} = \cdots = \underbrace{x_{n-1} \cdot x_{n-2} \cdot \cdots \cdot x_k}_{n-k} \cdot F_k$$

mit beliebigem $k \in \{1, 2, 3, \ldots, n-1\}$. Da (x_n) einigermaßen schnell gegen den Grenzwert x^* strebt, kann man $x^* \approx x_n \approx x_{n-1} \approx \ldots$ setzen und es folgt

$$F_n \approx (x^*)^{n-k} \cdot F_k$$

für jedes „hinreichend große“ k, für das die Näherung $x_k \approx x_{k+1} \approx \cdots \approx x_{n-1} \approx x^*$ gerechtfertigt ist. Wählen wir z.B. $k = 25$ (die betrachteten Folgenglieder $x_{25}, x_{26}, \ldots$ scheinen nach b) alle den Grenzwert auf mindestens 10 Dezimalstellen genau zu approximieren), so erhalten wir:

```
>> x:= float((1 + sqrt(5))/2):
>> k:= 25:
>> x^(10^7 - k)*numlib::fibonacci(k)

                                1.129834378e2089876
```

Also: F_{10^7} hat über 2 Millionen Dezimalstellen.

Aufgabe 8a: (Folgen, Konvergenz. Das geometrisch-arithmetische Mittel)
Sei $0 < x < y$.

a) Zeige $x < \sqrt{x \cdot y} < \dfrac{x+y}{2} < y$.

Definiere $x_1 = x$, $y_1 = y$ und dann rekursiv $x_{n+1} = \sqrt{x_n \cdot y_n}$, $\quad y_{n+1} = \dfrac{x_n + y_n}{2}$.

b) Zeige, dass (x_n) streng monoton steigend und dass (y_n) streng monoton fallend ist.

c) Zeige, dass $(y_n - x_n)$ eine Nullfolge ist.

d) Folgere, dass (x_n) und (y_n) gegen den selben Grenzwert konvergieren.

Man nennt diesen Grenzwert das **„geometrisch-arithmetische Mittel“** von x und y.

e) Berechne für $x = 1$, $y = 2$ die ersten 5 Intervalle $[x_n, y_n]$. Wie schnell nehmen die Intervalllängen $y_n - x_n$ ab?

f) (Etwas anspruchsvoller) Sei $x \geq 1$.

i) Zeige: $\sqrt{x_n} + \sqrt{y_n} \geq 1$ für alle n,

ii) Folgere: $\sqrt{y_n} - \sqrt{x_n} \leq y_n - x_n$ für alle n,

iii) Folgere: $y_{n+1} - x_{n+1} \leq \frac{1}{2} \cdot (y_n - x_n)^2$.

Wieso erklärt iii) die in e) beobachtete schnelle Konvergenz?

Musterlösung:
a) Mit $0 < x < y$ gilt

$$x = \sqrt{x^2} < \sqrt{x \cdot y}, \qquad \frac{x+y}{2} < \frac{y+y}{2} = y.$$

Weiterhin gilt

$$\sqrt{x \cdot y} < \frac{x+y}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x \cdot y < \frac{(x+y)^2}{4} \quad \Leftrightarrow \quad 4 \cdot x \cdot y < x^2 + 2 \cdot x \cdot y + y^2$$
$$\Leftrightarrow \quad 0 < x^2 - 2 \cdot x \cdot y + y^2 = (x-y)^2,$$

wobei letztere Ungleichung sicherlich gültig ist.
b) Folgt unmittelbar aus a):

$$x_n < \underbrace{\sqrt{x_n \cdot y_n}}_{x_{n+1}} < \underbrace{\frac{x_n + y_n}{2}}_{y_{n+1}} < y_n.$$

c) Es gilt

$$y_n - x_n = \frac{x_{n-1} + y_{n-1}}{2} - \sqrt{x_{n-1} \cdot y_{n-1}} \leq \frac{x_{n-1} + y_{n-1}}{2} - x_{n-1} = \frac{y_{n-1} - x_{n-1}}{2}.$$

Mit dieser rekursiven Beziehung folgt

$$y_n - x_n \leq \frac{y_{n-1} - x_{n-1}}{2} \leq \frac{y_{n-2} - x_{n-2}}{4} \leq \cdots \leq \frac{y_1 - x_1}{2^{n-1}}.$$

Damit ist $(y_n - x_n)$ eine Nullfolge.
d) Da (x_n) monoton wächst und nach oben durch $x_n < y_n < y$ beschränkt ist, konvergiert (x_n) gegen einen Grenzwert x^*. Da (y_n) monoton fällt und nach unten durch $x < x_n < y_n$ beschränkt ist, konvergiert (y_n) gegen einen Grenzwert y^*. Wegen

$$y^* - x^* = \lim_{n\to\infty} y_n - \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} (y_n - x_n) = 0$$

stimmen diese Grenzwerte überein.
e) Für $x = 1$, $y = 2$ erhält man die Werte:

$$\begin{array}{lll}
x_1 = \underline{1}.0, & y_1 = 2.0, & y_1 - x_1 = 1.0, \\
x_2 = \underline{1.4}14213562, & y_2 = \underline{1}.5, & y_2 - x_2 = 0.085..., \\
x_3 = \underline{1.456}475315, & y_3 = \underline{1.45}7106781, & y_3 - x_3 = 0.00063..., \\
x_4 = \underline{1.456791014}, & y_4 = \underline{1.4567910}48, & y_4 - x_4 = 0.000000034..., \\
x_5 = \underline{1.456791031}, & y_5 = \underline{1.456791031}, & y_5 - x_5 = 1.00... \cdot 10^{-16}.
\end{array}$$

Die unterstrichenen Stellen stimmen mit denen des Grenzwerts überein. Die Folgen (x_n), (y_n) konvergieren offensichtlich sehr schnell.
f) i) Es gilt $1 \leq x < x_n < y_n$ für alle Indizes, womit sicherlich

$$\sqrt{x_n} + \sqrt{y_n} \geq 1$$

folgt.
ii) Aus $\sqrt{x_n} + \sqrt{y_n} \geq 1$ folgt:

$$\sqrt{y_n} - \sqrt{x_n} \leq (\sqrt{y_n} - \sqrt{x_n}) \cdot (\sqrt{y_n} + \sqrt{x_n}) = y_n - x_n.$$

iii) Es folgt

$$\begin{aligned} y_{n+1} - x_{n+1} &= \frac{x_n + y_n}{2} - \sqrt{x_n \cdot y_n} = \frac{\sqrt{x_n}^2 + \sqrt{y_n}^2}{2} - \sqrt{x_n} \cdot \sqrt{y_n} \\ &= \frac{\sqrt{x_n}^2 - 2 \cdot \sqrt{x_n} \cdot \sqrt{y_n} + \sqrt{y_n}^2}{2} = \frac{(\sqrt{x_n} - \sqrt{y_n})^2}{2} \overset{(ii)}{\leq} \frac{(y_n - x_n)^2}{2}. \end{aligned}$$

Dies erklärt die schnelle Konvergenz: Ist der Abstand der Folgenglieder y_n und x_n erst einmal klein, ist der nächste Abstand durch Quadrieren *wesentlich* kleiner usw.
