Übungsblatt 3

Abgabe von $*$–Aufgaben am 6.11.2003 in der Übung.

Aufgabe 17*: (Folgen, Grenzwerte. 3 + 5 + 5 + 5 + 5 + 7 + 5 + 5 + 10 Bonuspunkte)
Konvergieren die angegebenen Folgen für $n \to \infty$? Bestimme gegebenenfalls den Grenzwert.

a) $x_n = 2 - \dfrac{3}{n}$, b) $x_n = \dfrac{2 \cdot n^2}{n^2+1}$, c) $x_n = \dfrac{n^3-1}{n^2+1}$,

d) $x_n = \dfrac{n^3-1}{n^3+1}$, e) $x_n = \dfrac{n^3-1}{n^4+1}$, f) $x_n = \left(1+\dfrac{2}{n}\right)^{3\cdot n}$,

g) $x_n = \dfrac{4\cdot n^2-1}{2\cdot n\cdot(n^2+1)}$, h) $x_n = \dfrac{4\cdot n^3-1}{2\cdot n\cdot(n^2+1)}$, i) $x_n = \sqrt{n}\cdot(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$.

Musterlösung:
Es wird jeweils solange umgeformt und gekürzt, bis nur noch Nullfolgen $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{n^2}$ etc. in den Ausdrücken verbleiben. Dann wird der Limes in den Ausdruck „reingezogen“, d.h., diese Nullfolgen werden durch 0 ersetzt:

a)

$$\lim_{n\to\infty}\left(2-\frac{3}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} 2 \;-\; \lim_{n\to\infty}\frac{3}{n} = 2 - 3\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 2 - 3\cdot 0 = 2\ .$$

b)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot n^2}{n^2+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot n^2}{n^2\cdot\left(1+\frac{1}{n^2}\right)} = \lim_{n\to\infty}\frac{2}{1+\frac{1}{n^2}} = \frac{2}{1+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}} = \frac{2}{1+0} = 2.$$

c)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^3-1}{n^2+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^3\cdot\left(1-\frac{1}{n^3}\right)}{n^2\cdot\left(1+\frac{1}{n^2}\right)} = \lim_{n\to\infty} n\,\frac{1-\frac{1}{n^3}}{1+\frac{1}{n^3}} = \lim_{n\to\infty} n \;\cdot\; \lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{1}{n^3}}{1+\frac{1}{n^3}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} n \;\cdot\; \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n^3}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)} = \lim_{n\to\infty} n \;\cdot\; \frac{1-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}}{1+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}} = \infty \;\cdot\; \frac{1-0}{1+0} = \infty.$$

d)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^3-1}{n^3+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^3\cdot\left(1-\frac{1}{n^3}\right)}{n^3\cdot\left(1+\frac{1}{n^3}\right)} = \lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{1}{n^3}}{1+\frac{1}{n^3}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n^3}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^3}\right)}$$

$$= \frac{1-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}}{1+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}} = \frac{1-0}{1+0} = 1.$$

e)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^3-1}{n^4+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^3\cdot\left(1-\frac{1}{n^3}\right)}{n^4\cdot\left(1+\frac{1}{n^4}\right)} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\,\frac{1-\frac{1}{n^3}}{1+\frac{1}{n^4}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} \;\cdot\; \lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{1}{n^3}}{1+\frac{1}{n^4}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n^3}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^4}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{1-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}}{1+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^4}} = 0 \cdot \frac{1-0}{1+0} = 0.$$

f)

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^{3\cdot n} = \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{2}{n}\right)^n\right)^3 = \left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^n\right)^3 = \left(e^2\right)^3.$$

Der numerische Wert ist

```
>> float(exp(2))^3 = exp(6.0)

                403.4287935 = 403.4287935
```

g)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4\cdot n^2-1}{2\cdot n\cdot(n^2+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2\cdot\left(4-\frac{1}{n^2}\right)}{n^3\cdot 2\cdot\left(1+\frac{1}{n^2}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\cdot\frac{4-\frac{1}{n^2}}{2\cdot\left(1+\frac{1}{n^2}\right)} = 0\cdot\frac{4-0}{2\cdot(1+0)} = 0.$$

h)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4\cdot n^3-1}{2\cdot n\cdot(n^2+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3\cdot\left(4-\frac{1}{n^3}\right)}{n^3\cdot 2\cdot\left(1+\frac{1}{n^2}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{4-\frac{1}{n^3}}{2\cdot\left(1+\frac{1}{n^2}\right)} = \frac{4-0}{2\cdot(1+0)} = 2.$$

i) Der Trick ist, $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$ mit $\sqrt{n+1}+\sqrt{n}$ zu erweitern, um im Zähler die Wurzeln mittels $(a-b)\cdot(a+b) = a^2-b^2$ „wegquadrieren“ zu können:

$$\sqrt{n+1}-\sqrt{n} = \frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\cdot(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n+1}^2-\sqrt{n}^2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

$$= \frac{(n+1)-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}.$$

Damit folgt

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\cdot(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n}}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}}+1}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{\frac{n+1}{n}}+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} = \frac{1}{\sqrt{1+0}+1} = \frac{1}{2}.$$

Aufgabe 18: (MuPAD, 0 Bonuspunkte)
Lies die MuPAD–Hilfeseite zu `limit` (interaktiv durch `?limit` aufzurufen).

a) Überprüfe mit MuPAD die in Aufgabe 17 ermittelten Grenzwerte.

b) Bestimme den Grenzwert der Folge $x_n = \left(1 + \frac{2}{n^3}\right)^{2 \cdot n^2}$.

c) Lies mit `?!` die MuPAD–Hilfeseite zur Fakultätsfunktion $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$. Betrachte den Grenzwert der Folge $x_n = n^n/n!$ (Erzeuge Gleitpunktapproximationen (siehe `?float`) der ersten 10 Folgenglieder und stelle eine Vermutung über die Konvergenzeigenschaft dieser Folge auf! Welche Meinung hat `limit` zu diesem Thema?

Musterlösung:
a)

```
>> limit(2 - 3/n, n = infinity)
                                 2
>> limit(2*n^2/(n^2 + 1), n = infinity)
                                 2
>> limit((n^3 - 1)/(n^2 + 1), n = infinity)
                            infinity
>> limit((n^3 - 1)/(n^3 + 1), n = infinity)
                                 1
>> limit((n^3 - 1)/(n^4 + 1), n = infinity)
                                 0
>> limit((1 + 2/n)^(3*n), n = infinity)
                              exp(6)
>> limit((4*n^2 - 1)/(2*n*(n^2 + 1)), n = infinity)
                                 0
>> limit((4*n^3 - 1)/(2*n*(n^2 + 1)), n = infinity)
                                 2
>> limit(sqrt(n)*(sqrt(n+1) - sqrt(n)), n = infinity);
                                1/2
```

b)

```
>> limit((1 + 2/n^3)^(2*n^2), n = infinity)

                         1
```

c)

```
>> x := n -> float(n^n/n!):  x(n) $ n = 1..10

     1.0, 2.0, 4.5, 10.66666667, 26.04166667, 64.8, 163.4013889,

             416.1015873, 1067.627009, 2755.731922
```

Vermutung: $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$. Diese Vermutung ist in der Tat richtig:

```
>> limit(n^n/n!, n = infinity)

                              infinity
```

Gleitpunktapproximationen:

Aufgabe 19*: (Grenzwerte, 10 Bonuspunkt)

Man begebe sich ins automatische Abgabe-Tool `bourbaki.upb.de/mfp1`. Diese Aufgabe wird dort als 'Miniprojekt 19' bezeichnet. Es wird nach dem Grenzwert einer Folge gefragt. Berechne ihn und liefere ihn im Web-Formular ab.
Es sind maximal 3 Abgabeversuche möglich! Abgaben bis Do, 6.11., 23::59::59 Uhr.

Relevante MuPAD-Funktionen: `limit`.

Musterlösung:
Seien $M_1, \ldots, M_7$ die Ziffern der Matrikelnummer. Die generierte Aufgabe ist:

$$\lim_{n\to\infty} n \cdot \left(M_1^2 + \left(\frac{1+M_6}{n+M_5} + M_1 \cdot i \right)^2 \right), \quad i = \sqrt{-1}.$$

Es wird solange umgeformt und gekürzt, bis nur noch Nullfolgen $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{n^2}$ etc. in den Ausdrücken verbleiben. Dann wird der Limes in den Ausdruck „reingezogen“, d.h., diese Nullfolgen werden durch 0 ersetzt:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} n \cdot \left(M_1^2 + \left(\frac{1+M_6}{n+M_5} + M_1 \cdot i \right)^2 \right) &= \lim_{n\to\infty} n \cdot \left(M_1^2 + \frac{(1+M_6)^2}{(n+M_5)^2} + \frac{2 \cdot i \cdot M_1 \cdot (1+M_6)}{n+M_5} - M_1^2 \right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n \cdot (1+M_6)^2}{(n+M_5)^2} + \frac{n \cdot 2 \cdot i \cdot M_1 \cdot (1+M_6)}{n+M_5} \right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n \cdot (1+M_6)^2}{n^2 \cdot (1+M_5/n)^2} + \frac{n \cdot 2 \cdot i \cdot M_1 \cdot (1+M_6)}{n \cdot (1+M_5/n)} \right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n} \cdot \frac{(1+M_6)^2}{(1+M_5/n)^2} + \frac{2 \cdot i \cdot M_1 \cdot (1+M_6)}{1+M_5/n} \right) \\
&= 0 \cdot \frac{(1+M_6)^2}{1+0} + \frac{2 \cdot i \cdot M_1 \cdot (1+M_6)}{1+0} \;=\; 2 \cdot i \cdot M_1 \cdot (1+M_6).
\end{aligned}$$

Aufgabe 20: (Rechenregeln für Grenzwerte. 0 Bonuspunkte)

Gegeben seien Folgen (x_n) und (y_n). Die durch $z_n^+ = x_n + y_n$ bzw. $z_n^- = x_n - y_n$ definierten Folgen mögen gegen z^+ bzw. z^- konvergieren. Zeige, dass die Folge $(x_n \cdot y_n)$ konvergiert. Bestimme ihren Grenzwert.

Musterlösung:
Es gilt

$$x_n = \frac{z_n^+ + z_n^-}{2}, \quad y_n = \frac{z_n^+ - z_n^-}{2},$$

also

$$x_n \cdot y_n = \frac{(z_n^+ + z_n^-) \cdot (z_n^+ - z_n^-)}{4} = \frac{(z_n^+)^2 - (z_n^-)^2}{4}.$$

Die Konvergenz von $(x_n \cdot y_n)$ folgt direkt aus den Rechenregeln für konvergierende Folgen, der Grenzwert von $(x_n \cdot y_n)$ ist $\frac{1}{4} \cdot ((z^+)^2 - (z^-)^2)$.

Aufgabe 21: (Folgen und Grenzwerte. 0 Bonuspunkte)
Bestimme den Grenzwert von $\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$ für $n \to \infty$.

Musterlösung:
Es gilt

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(\frac{n+1-1}{n+1}\right)^n = \left(\frac{n+1}{n+1} - \frac{1}{n+1}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n$$
$$= \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \cdot \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{-1}.$$

Der erste Faktor konvergiert gegen e^{-1}, der zweite gegen 1, also

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{e}.$$

Alternativ:

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(\frac{1}{\frac{n+1}{n}}\right)^n = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \to \frac{1}{e}.$$

Aufgabe 22*: (Rekursiv definierte Folgen. 10 Bonuspunkt)
Man begebe sich ins automatische Abgabe-Tool `bourbaki.upb.de/mfp1`. Diese Aufgabe wird dort als 'Miniprojekt 22' bezeichnet. Man erhält dort eine rekursiv definierte Folge. Bestimme den Grenzwert und und liefere ihn im Web-Formular ab.
Anleitung: bildet man in der Gleichung der rekursiven Definition den Grenzwert der linken und der rechten Seiten, erhält man eine Gleichung für den Grenzwert.
Es sind maximal 3 Abgabeversuche möglich! Abgaben bis Do, 6.11., 23::59::59 Uhr.

Musterlösung:
Die automatisch generierte Rekursion ist

$$x_n = \cfrac{1}{M_1 + \cfrac{1}{M_3 + \cfrac{1}{M_6 + x_{n-1}}}}$$

(wobei M_1 etc. die Ziffern der Matrikelnummer sind). Setzen wir voraus, dass der Grenzwert x^* von (x_n) existiert, so liefern die Rechenregeln

$$x^* = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \cfrac{1}{M_1 + \cfrac{1}{M_3 + \cfrac{1}{M_6 + x_n}}}$$

$$= \cfrac{1}{M_1 + \cfrac{1}{M_3 + \cfrac{1}{M_6 + \lim\limits_{n\to\infty} x_n}}} = \cfrac{1}{M_1 + \cfrac{1}{M_3 + \cfrac{1}{M_6 + x^*}}}.$$

Die rechte Seite ist ein rationaler Ausdruck in x^*. In dieser Musterlösung verwenden wir einige zusätzliche MuPAD-Funktionen, weil hier M_1, M_3, M_6 symbolisch sind. Mit MuPAD (`x` stellt x^* dar):

```
>> rechts:= normal(1/(M1 + 1/(M3 + 1/(M6 + x))));

                    x M3 + M3 M6 + 1
               --------------------------------
               x + M1 + M6 + x M1 M3 + M1 M3 M6
```

Es ergibt sich folgende quadratische Gleichung für den Grenzwert x^* (`denom` ist der Nenner des Ausdrucks, `numer` der Zähler):

```
>> x*denom(rechts) = numer(rechts);

      x (x + M1 + M6 + x M1 M3 + M1 M3 M6) = x M3 + M3 M6 + 1

>> expand(x*denom(rechts) - numer(rechts));
                                                 2    2
  x M1 - x M3 + x M6 - M3 M6 + x M1 M3 M6 + x  + x  M1 M3 - 1

>> collect(%, x) = 0
                                          2
 x (M1 - M3 + M6 + M1 M3 M6) - M3 M6 + x  (M1 M3 + 1) - 1 = 0
```

Von den beiden Nullstellen dieses Polynoms ist für jede Matrikelnummer nur eine positiv. Dies ist der gesuchte Grenzwert (beachte dass alle x_n positiv sind, also kann der Grenzwert nicht negativ sein). Z.B. für die Matrikelnummer 3456780:

```
>> M1:= 3: M3:= 5: M6:= 8:
>> solve(x = 1/(M1 + 1/(M3 + 1/(M6 + x))), x)

          {        1/2                1/2          }
          {   5 185             5 185             }
          { - -------- - 63/16, -------- - 63/16 }
          {      16                 16             }
```

```
>> float(%);

                    {-8.187959534, 0.312959534}
```

Aufgabe 23*: (Folgen und Grenzwerte, etwas anspruchsvoller. 15 Bonuspunkte)
Zeige: $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.
Anleitung: gehe ähnlich wie im Beweis von Beispiel 2.19 der Vorlesung vor und betrachte dabei in der Entwicklung von $(1 + h_n)^n$ einen zusätzlichen Term. Alternativ kann man zunächst die Folge $\sqrt[2\cdot n]{n} = \sqrt{\sqrt[n]{n}}$ betrachten, die ebenfalls gegen 1 konvergiert.

Musterlösung:
Sicherlich gilt $\sqrt[n]{n} > 1$ für alle $n > 1$. Setze $h_n = \sqrt[n]{n} - 1$, also $n = (1 + h_n)^n$. Wegen $h_n > 0$ gilt

$$n = (1 + h_n)^n \geq 1 + n \cdot h_n + \frac{n \cdot (n-1)}{2} \cdot h_n^2 + \cdots \geq \frac{n \cdot (n-1)}{2} \cdot h_n^2,$$

also

$$h_n^2 \leq \frac{n}{n \cdot (n-1)/2} = \frac{2}{n-1}.$$

Damit gilt $h_n^2 \to 0$ für $n \to \infty$, also auch $h_n \to 0$ und damit $\sqrt[n]{n} = 1 + h_n \to 1$.

Alternativ: betrachte $z_n = \sqrt[2\cdot n]{n}$ und schreibe dies als $z_n = 1 + h_n$ mit $h_n > 0$, also $\sqrt{n} = (1 + h_n)^n$. Wie im Beweis von Beispiel 2.19:

$$\sqrt{n} = (1 + h_n)^n \geq 1 + n \cdot h_n + \frac{n \cdot (n-1)}{2} \cdot h_n^2 + \cdots \geq n \cdot h_n$$

$$\Rightarrow h_n \leq \frac{\sqrt{n}}{n} = \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Es folgt $h_n \to 0$ und damit $z_n \to 1$ und damit $z_n^2 \to 1$. Die gefragte Folge war $\sqrt[n]{n} = z_n^2$.

Aufgabe 24: (Folgen, Grenzwerte. Einfacher Beweis. 0 Bonuspunkte)
Sei (z_n) eine konvergente komplexe Folge. Zeige, dass die Menge $\{|z_n|, n \in \mathbb{N}\}$ nach oben beschränkt ist.

Musterlösung:
Sei z^* der Grenzwert. Zu jedem $\epsilon > 0$ existiert ein $N(\epsilon)$, so dass $|z_n - z^*| \leq \epsilon$ gilt für alle $n \geq N(\epsilon)$, also $|z_n| \leq |z^*| + \epsilon$. Speziell für $\epsilon = 1$ folgt also

$$|z_n| \leq |z^*| + 1 \text{ für alle } n \geq N(1).$$

Der „Folgenschwanz“ ab $N(1)$ ist damit beschränkt. Der Folgenanfang bis $N(1)$ besteht nur aus endlich vielen Werten, deren Beträge ein Maximum haben. Eine obere Schranke für $|z_n|$ ist damit durch

$$\max\Big(|z^*| + 1,\ \max\{|z_n|; 1 \leq n < N(1)\}\Big)$$

gegeben.

Aufgabe 25*: (Folgen, Grenzwerte. Intervallschachtelung. 10 Bonuspunkte)
Bestimme $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^n + 5^n}$.
Anleitung: Satz 2.17. Es gilt $5^n < 3^n + 5^n < 2 \cdot 5^n$. Anmerkung: `limit` in MuPAD 3.0 ist hier OK, hat in MuPAD 2.5 aber einen ganz üblen Bug.

Musterlösung:
Der Anleitung folgend:

$$5^n < 3^n + 5^n < 2 \cdot 5^n \quad \Rightarrow \quad 5 < \sqrt[n]{3^n + 5^n} < \sqrt[n]{2} \cdot 5.$$

Bekanntlich konvergiert $\sqrt[n]{2}$ gegen 1 (Beispiel 2.19 der Vorlesung). Per Intervallschachtelung (Satz 2.17 der Vorlesung) folgt $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^n + 5^n} = 5$.