Übungsblatt 2

Abgabe von $*$ Aufgaben am 30.10.2003 in der Übung.

Aufgabe 8*: (Komplexe Zahlen, 5 + 5 + 5 + 5 Bonuspunkte)
Seien $i = \sqrt{-1}$. $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 1 - i$, $z_3 = 1 + i \cdot \sqrt{15}$. Berechne für $k = 1, 2, 3$

$$a)\quad \frac{1}{z_k}, \qquad b)\quad \overline{z_k}, \qquad c)\quad |z_k| \qquad \text{sowie} \qquad d)\quad z_1 \cdot z_2, \quad \frac{z_2}{z_3}, \quad z_1^4.$$

Musterlösung:
a)

$$\frac{1}{z_1} = \frac{1}{1+i} = \frac{1-i}{(1+i)\cdot(1-i)} = \frac{1}{2} - \frac{i}{2}, \quad \frac{1}{z_2} = \frac{1}{1-i} = \frac{1+i}{(1-i)\cdot(1+i)} = \frac{1}{2} + \frac{i}{2},$$

$$\frac{1}{z_3} = \frac{1}{(1+i\cdot\sqrt{15})} = \frac{1-i\cdot\sqrt{15}}{(1+i\cdot\sqrt{15})\cdot(1-i\cdot\sqrt{15})} = \frac{1-i\cdot\sqrt{15}}{16} = \frac{1}{16} - i\cdot\frac{\sqrt{15}}{16},$$

b)

$$\overline{z_1} = 1 - i, \quad \overline{z_2} = 1 + i, \quad \overline{z_3} = 1 - i\cdot\sqrt{15}\ ,$$

c)

$$|z_1| = \sqrt{2}, \quad |z_2| = \sqrt{2}, \quad |z_3| = \sqrt{1+15} = 4,$$

d)

$$z_1 \cdot z_2 = (1+i)\cdot(1-i) = 1 - i^2 = 2.$$

Mit a) gilt $1/z_3 = (1 - i\cdot\sqrt{15})/16$:

$$\frac{z_2}{z_3} = (1-i)\cdot\frac{1-i\cdot\sqrt{15}}{16} = \frac{1-\sqrt{15}-i\cdot(1+\sqrt{15})}{16} = \frac{1-\sqrt{15}}{16} - i\cdot\frac{1+\sqrt{15}}{16},$$

$$z_1^4 = ((z_1)^2)^2 = ((1+i)^2)^2 = (1+2\cdot i+i^2)^2 = (1+2\cdot i-1)^2 = (2\cdot i)^2 = -4.$$

Aufgabe 9: (MuPAD, 0 Bonuspunkte)
Lies die MuPAD–Hilfeseiten zu `Re`, `Im`, `conjugate` und `rectform` (interaktiv durch `?Re` etc. aufzurufen). Sei $z = (1+i\cdot\sqrt{2})/(1-i)$. Zerlege z^5 mit MuPAD in Real- und Imaginärteil.

Musterlösung:

```
>> z:= (1 + sqrt(2)*I)/(1 - I);
>> z^5

                                          1/2 5
        ((1/2 + 1/2 I) - (1/2 - 1/2 I) 2    )
```

`rectform` zerlegt in Real- und Imaginärteil:

```
>> rectform(z^5)

        /      1/2        \      /      1/2        \
        | 11 2            |      | 11 2            |
      - | ------- + 1/8 | + I | ------- - 1/8 |
        \     8           /      \     8           /
```

Aufgabe 10: (Komplexe Zahlen, 10 Bonuspunkte)

Man gehe im Web-Browser nach `bourbaki.upb.de/mfp1` und melde sich im automatischen Abgabe-Tool an. Diese Aufgabe wird dort als 'Miniprojekt 10' bezeichnet. Man bekommt dort 3 komplexe Zahlen z_1, z_2, z_3 (jeder bekommt andere Zahlen). Berechne $z = z_1 \cdot z_2 / z_3$ und liefere $\Re(z)$, $\Im(z)$ als Lösung im Web-Formular ab.

Es sind maximal 3 Abgabeversuche möglich! Abgaben bis Do, 30.10., 23::59::59 Uhr.

Relevante MuPAD-Funktionen: `rectform, Re, Im`.

Aufgabe 11*: (Komplexe Lösungen quadratischer Gleichungen. 10 Bonuspunkte)

Bestimme alle Nullstellen des Polynoms $z^2 + z + 1$.

Anleitung: Die übliche Lösungsformel für quadratische Gleichungen.

Relevante MuPAD-Funktionen: `solve`.

Musterlösung:

Die aus der Schule bekannte übliche Wurzelformel

$$z_\pm = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

für die Gleichung $z^2 + p \cdot z + q = 0$ liefert für $p = q = 1$:

$$z_\pm = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - 1} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{-\frac{3}{4}} = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \cdot \sqrt{-3} = -\frac{1}{2} \pm \frac{i \cdot \sqrt{3}}{2}.$$

Aufgabe 12*: (Faktorpolynome, Horner–Schema, 10 Bonuspunkte)

Betrachte das Polynom $p(x) = x^n - 1$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ läßt sich der Linearfaktor $x - 1$ abspalten (warum?). Bestimme für beliebiges n die explizite Form des Faktorpolynoms $p(x)/(x-1)$.

Hinweis: Durchlaufe das Horner–Schema.

Musterlösung:

Da $x = 1$ für jedes n eine Nullstelle ist, läßt sich stets der Linearfaktor $x - 1$ abspalten. Die explizite Darstellung

$$\frac{x^n - 1}{x - 1} = b_0 \cdot x^{n-1} + b_1 \cdot x^{n-2} + \cdots + b_{n-1}$$

wird durch das Horner-Schema 1.13 mit $x^* = 1$ und den Polynomkoeffizienten $(a_0, \ldots, a_n) = (-1, 0, \ldots, 0, 1)$ geliefert:

$$\begin{aligned} b_0 &= a_n = 1; \\ b_k &= b_{k-1} \cdot x^* + a_{n-k} \;=\; b_{k-1} \;=\; 1 \quad (k = 1, 2, \ldots, n-1), \\ b_n &= b_{n-1} \cdot x^* + a_0 \;=\; b_{n-1} - 1 \;=\; 0 \;=\; p(1). \end{aligned}$$

Also:

$$\boxed{x^n - 1 = (x - 1) \cdot \Big(x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1\Big).}$$

Anmerkung:

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1} = \frac{x^n - 1}{x - 1}$$

ist die wohlbekannte Summenformel für geometrische Reihen.

Aufgabe 13: (MuPAD, 0 Bonuspunkte)

Lies die MuPAD–Hilfeseiten zu `factor` und `expand`. Faktorisiere die Polynome $x^n - 1$ für $n = 2, 3, \ldots, 10$. Benutze `expand`, um die in Aufgabe 12 gefragte Form des Faktorpolynoms $p(x)/(x-1)$ zu verifizieren.

Musterlösung:
Wir realisieren die Werte $n = 2, \ldots, 10$ durch eine `for`-Schleife:

```
>> for n from 2 to 10 do
&>   print(n, factor(x^n - 1));
&> end_for:
                          2, (x - 1) (x + 1)
                                            2
                       3, (x - 1) (x + x  + 1)
                                              2
                     4, (x - 1) (x + 1) (x  + 1)
                                      2    3    4
                  5, (x - 1) (x + x  + x  + x  + 1)
                                        2           2
            6, (x - 1) (x + 1) (x + x  + 1) (- x + x  + 1)
                              2    3    4    5    6
             7, (x - 1) (x + x  + x  + x  + x  + x  + 1)
                                         2        4
                 8, (x - 1) (x + 1) (x  + 1) (x  + 1)
                                   2        3    6
                9, (x - 1) (x + x  + 1) (x  + x  + 1)
                             2    3    4             2    3    4
  10, (x - 1) (x + 1) (x + x  + x  + x  + 1) (- x + x  - x  + x  + 1)
```

Für $n = 4, 6, 8, 9, 10$ wird eine weitergehende Faktorisierung gefunden. (Für gerades n ist dies kein Wunder, da dann auch $x = -1$ eine Wurzel ist und der Linearfaktor $x + 1$ stets abgespalten werden kann.) Die folgende Schleife expandiert das Produkt aller Faktoren außer dem Linearfaktor $x - 1$ und liefert damit die in Aufgabe 12 gefragte Form von $p(x)/(x-1)$:

```
>> for n from 2 to 10 do
&>   print(n, expand(factor(x^n - 1)/(x - 1)));
&> end_for:
                               2, x + 1
                                    2
                            3, x + x  + 1
                                  2    3
                          4, x + x  + x  + 1
                                2    3    4
                       5, x + x  + x  + x  + 1
                             2    3    4    5
```

```
           6, x + x  + x  + x  + x  + 1
                2    3    4    5    6
        7, x + x  + x  + x  + x  + x  + 1
              2    3    4    5    6    7
      8, x + x  + x  + x  + x  + x  + x  + 1
           2    3    4    5    6    7    8
   9, x + x  + x  + x  + x  + x  + x  + x  + 1
         2    3    4    5    6    7    8    9
10, x + x  + x  + x  + x  + x  + x  + x  + x  + 1
```

Aufgabe 14: (Polynomwurzeln. 10 Bonuspunkte)

Man begebe sich ins automatische Abgabe-Tool `bourbaki.upb.de/mfp1`. Diese Aufgabe wird dort als 'Miniprojekt 14' bezeichnet. Man erhält dort ein konkretes Polynom der Form

$$x^4 + a_3 \cdot x^3 + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$$

und eine der Wurzeln. Berechne die restlichen Wurzeln und liefere Sie im Web-Formular ab. Hinweis: Satz 1.33 liefert eine zweite Nullstelle. Nach Abspalten zweier Linearfaktoren sind nur noch die Nullstellen eines quadratischen Faktorpolynoms zu suchen.

Es sind maximal 3 Abgabeversuche möglich! Abgaben bis Do, 30.10., 23::59::59 Uhr.

Relevante MuPAD-Funktionen: `factor, solve`.

Musterlösung:
Das geliefert Polynom ist

$$p(x) = x^4 - 2 \cdot M_5 \cdot x^3 + (2 - M_7^2) \cdot x^2 - 4 \cdot M_5 \cdot x - 2 \cdot M_7^2,$$

wobei $M_1, \ldots, M_7$ die Ziffern der Matrikelnummer ist. Es hat stets die komplexe Nullstelle $\sqrt{2} \cdot i$. Da das Polynom reell ist, ist automatisch $-\sqrt{2} \cdot i$ ebenfalls eine Wurzel und es läßt sich stets das Polynom $(x - \sqrt{2} \cdot i) \cdot (x + \sqrt{2} \cdot i) = x^2 + 2$ abspalten. Die Wurzeln des quadratischen Restpolynoms können über die übliche Lösungsformel für quadratische Gleichungen bestimmt werden. Hier die mit MuPAD ermittelten Endergebnisse:

```
>> p:= x^4 - 2*M5*x^3 + (2 - M7^2)*x^2 - 4*M5*x - 2*M7^2
>> factor(p);

                    2                  2     2
                - (x   + 2) (2 x M5 - x   + M7 )

>> solve(p, x)
          2     2 1/2           2     2 1/2        1/2     1/2
 {M5 + (M5  + M7 )    , M5 - (M5  + M7 )    , - I 2    , I 2    }
```

Aufgabe 15*: (Vietascher Wurzelsatz, 10 + 5 Bonuspunkte)

a) Seien $x_1, \ldots, x_k$ die unterschiedlichen Wurzeln des Polynoms $p(x) = a_n \cdot x^n + \cdots + a_1 \cdot x + a_0$ mit den Vielfachheiten $n_1, \ldots, n_k$, wobei $n = n_1 + \cdots + n_k$ und $a_n \neq 0$ gelte. Zeige:

$$x_1^{n_1} \cdot x_2^{n_2} \cdot \ldots \cdot x_k^{n_k} = (-1)^n \cdot \frac{a_0}{a_n}.$$

Anleitung: Werte das Polynom bei 0 aus.

b) Betrachte $p(x) = 3 \cdot x^3 - 51 \cdot x^2 - 3\,x + 51$. Die Werte $x_{1,2} = \pm 1$ sind Nullstellen. Finde die dritte Wurzel ohne Polynomdivision.

Musterlösung:
a) Der Fundamentalsatz

$$p(x) = a_n \cdot x^n + \cdots + a_1 \cdot x + a_0 = a_n \cdot (x - x_1)^{n_1} \cdot \cdots \cdot (x - x_k)^{n_k}$$

liefert bei Auswertung an der Stelle $x = 0$:

$$p(0) = a_0 = a_n \cdot (-x_1)^{n_1} \cdot \ldots (-x_k)^{n_k} = a_n \cdot (-1)^{n_1 + \cdots + n_k} \cdot x_1^{n_1} \cdot \cdots \cdot x_k^{n_k},$$

wobei $n_1 + \cdots n_k = n =$ Polynomgrad.

b) Nach a) muss gelten

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -\frac{51}{3} = -17 \quad \Rightarrow \quad x_3 = -\frac{17}{x_1 \cdot x_2} = 17.$$

Aufgabe 16*: (Schranken für Polynomwurzeln. Für Ehrgeizige, anspruchsvoll! 20 Bonuspunkte)
Sei z eine (eventuell komplexe) Wurzel des Polynoms $p(x) = a_n \cdot x^n + \cdots + a_1 \cdot x + a_0$, $a_n \neq 0$. Zeige

$$|z| \leq \max\left\{ \left|\frac{a_0}{a_n}\right|, 1 + \left|\frac{a_1}{a_n}\right|, 1 + \left|\frac{a_2}{a_n}\right|, \ldots, 1 + \left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right| \right\}.$$

Anleitung: Zeige, dass

$$|a_n \cdot z^n| \overset{(*)}{>} |a_{n-1}| \cdot |z^{n-1}| + \cdots + |a_1| \cdot |z| + |a_0| \quad \left(\geq |a_{n-1} \cdot z^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot z + a_0| \right)$$

gilt, wenn $|z|$ größer als die angegebene Schranke ist, und folgere hieraus, dass z keine Nullstelle sein kann. Zeige dabei $(*)$ per Induktion nach j:

$$|a_n| \cdot |z^j| > |a_{j-1}| \cdot |z^{j-1}| + \cdots + |a_1| \cdot |z| + |a_0| \quad \text{für alle} \quad j = 1, \ldots, n.$$

Musterlösung:
Die Grundidee ist:

$$p(z) = a_n \cdot z^n + \cdots + a_0 = a_n \cdot z^n \cdot \left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_n \cdot z} + \cdots + \frac{a_0}{a_n \cdot z^n}\right).$$

Für hinreichend großes z ist der Faktor $(1 + \sum ...)$ ungefähr 1, so dass $p(z) \neq 0$ gelten muss.

Sei $|z|$ größer als die angegebene Schranke. Wir zeigen

$$|a_n| \cdot |z^j| > |a_{j-1}| \cdot |z^{j-1}| + \cdots + |a_1| \cdot |z| + |a_0|$$

für alle $j = 1, \ldots, n$. Für $j = 1$ ist als Induktionsstart

$$|a_n| \cdot |z| > |a_0|$$

zu zeigen. Dies ist nach der Voraussetzung „$|z|$ sei größer als die angegebene Schranke“ aber erfüllt.
Induktionsschritt $j \to j+1$: die Induktionsvoraussetzung liefert

$$|a_j| \cdot |z^j| + \underbrace{|a_{j-1}| \cdot |z^{j-1}| + \cdots + |a_1| \cdot |z| + |a_0|}_{<|a_n| \cdot |z|^j} < |a_j| \cdot |z^j| + |a_n| \cdot |z^j| = (|a_j| + |a_n|) \cdot |z^j|.$$

Die Voraussetzung „$|z|$ sei größer als die angegebene Schranke“ liefert

$$|z| > 1 + \frac{|a_j|}{|a_n|}, \quad \text{also} \quad |a_j| + |a_n| < |a_n| \cdot |z|.$$

Macht zusammen:

$$|a_j| \cdot |z^j| + |a_{j-1}| \cdot |z^{j-1}| + \cdots + |a_1| \cdot |z| + |a_0| < |a_n| \cdot |z| \cdot |z^j| = |a_n| \cdot |z^{j+1}|.$$

Dies ist aber genau die zu beweisende Aussage für $j+1$. Für $j = n$ folgt über die Dreiecksungleichung

$$\begin{aligned} |a_{n-1} \cdot z^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot z + a_0| &\le |a_{n-1}| \cdot |z^{n-1}| + \cdots + |a_1| \cdot |z| + |a_0| \\ &< |a_n| \cdot |z^n| = |a_n \cdot z^n|. \end{aligned}$$

Damit kann z keine Nullstelle sein, denn für eine Nullstelle muss gelten

$$a_n \cdot z^n = -(a_{n-1} \cdot z^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot z + a_0),$$

also

$$|a_n \cdot z^n| = |a_{n-1} \cdot z^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot z + a_0|.$$