Übungsblatt 15

Dieses Übungsblatt ist nicht mehr abzugeben und dient ausschließlich der freiwilligen Prüfungsvorbereitung.

Aufgabe 120: (Inverse einer Matrix. 0 Bonuspunkte)
Berechne die Inverse der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 & 8 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Musterlösung:
Wir starten mit der erweiterten (Koeffizienten–Matrix

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & 8 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

und überführen die linke Seite zunächst in obere Dreiecksform. Erzeugen der Nullen unterhalb der Hauptdiagonale in der ersten Spalte liefert

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 9 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Erzeugen der Nullen unterhalb der Hauptdiagonale in der zweiten Spalte liefert

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 9 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{3} & -4 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Erzeugen der Nullen unterhalb der Hauptdiagonale in der dritten Spalte liefert

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 9 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{3} & -4 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 1 \end{array}\right).$$

Damit haben wir die obere Dreiecksform erreicht. Wir multiplizieren die vierte Zeile mit 5 und erzeugen Nullen in der vierten Spalte oberhalb des Hauptdiagonalelements. Dies ergibt

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 4 & -1 & -1 & -5 \\ 0 & 3 & -1 & 0 & 28 & -8 & -9 & -45 \\ 0 & 0 & \frac{5}{3} & 0 & -\frac{35}{3} & \frac{10}{3} & 5 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 1 & 1 & 5 \end{array}\right).$$

Wir multiplizieren die dritte Zeile mit $\frac{3}{5}$ und erzeugen Nullen in der dritten Spalte oberhalb des Hauptdiagonalelements. Dies ergibt

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 11 & -3 & -4 & -17 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 21 & -6 & -6 & -33 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -7 & 2 & 3 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 1 & 1 & 5 \end{array}\right).$$

Wir multiplizieren die zweite Zeile mit $\frac{1}{3}$ und erzeugen Nullen in der zweiten Spalte oberhalb des Hauptdiagonalelements. Dies ergibt

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -3 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 7 & -2 & -2 & -11 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -7 & 2 & 3 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 1 & 1 & 5 \end{array}\right).$$

Damit ist die Inverse der Matrix A also

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 & 5 \\ 7 & -2 & -2 & -11 \\ -7 & 2 & 3 & 12 \\ -3 & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 121: (Kern einer Matrix. 0 Bonuspunkte)

Sei $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ eine Matrix. Zeige, dass der Kern von A stets ein Unterraum des $\mathbb{C}^m$ ist!
Hinweis: Verwende das Unterraumkriterium aus Aufgabe 108, Blatt 13.

Musterlösung:
Sei $\mathrm{Kern}(A)$ der Kern von A. Nach dem Unterraumkriterium sind zu zeigen:

a) $\mathrm{Kern}(A) \neq \varnothing$

b) Mit $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in \mathrm{Kern}(A)$ folgt auch $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 \in \mathrm{Kern}(A)$.

c) Mit $\lambda \in \mathbb{C}$, $\vec{v} \in \mathrm{Kern}(A)$ folgt auch $\lambda \cdot \vec{v} \in \mathrm{Kern}(A)$.

Wegen $A\,\vec{0} = \vec{0}$ folgt $\vec{0} \in \mathrm{Kern}(A)$, also $\mathrm{Kern}(A) \neq \varnothing$. Dies zeigt a). Seien $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in \mathrm{Kern}(A)$. Dann gilt $A\,\vec{v}_1 = \vec{0}$ und $A\,\vec{v}_2 = 0$, also $A\,(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = A\,\vec{v}_1 + A\,\vec{v}_2 = \vec{0}$. Dies zeigt b). Schließlich sei $\lambda \in \mathbb{C}$ und $\vec{v} \in \mathrm{Kern}(A)$. Dann gilt $A\,\vec{v} = \vec{0}$, also $A\,(\lambda \cdot \vec{v}) = \lambda \cdot (A\,\vec{v}) = \lambda \cdot \vec{0} = \vec{0}$. Damit ist $\mathrm{Kern}(A)$ ein Unterraum des $\mathbb{C}^m$.

Aufgabe 123: (Begleitmatrizen. 0 Bonuspunkte)

Seien $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$. Zeige, dass das charakteristische Polynom der Matrix

$$A_p = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \ddots & \vdots & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \ddots & \vdots & -a_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

gegeben ist durch

$$p_{A_p}(\lambda) = (-1)^n \cdot (\lambda^n + a_{n-1} \cdot \lambda^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot \lambda + a_0).$$

Musterlösung:
Die Behauptung zeigen wir per Induktion.
Induktionsanfang: Für $n = 2$ erhalten wir

$$A_p = \begin{pmatrix} 0 & -a_0 \\ 1 & -a_1 \end{pmatrix},$$

also

$$p_{A_p}(\lambda) = \det\left(\begin{pmatrix} -\lambda & -a_0 \\ 1 & -\lambda - a_1 \end{pmatrix}\right) = \lambda^2 + \lambda \cdot a_1 + a_0 = (-1)^2 \cdot (\lambda^2 + a_1 \cdot \lambda + a_0),$$

also die Behauptung für $n = 2$.
Induktionsschritt $n - 1 \to n$: Das charakteristische Polynom der Matrix A_p ist die Determinante

$$\det(A_p - \lambda \cdot \mathbb{1}) = \det\left(\begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & -\lambda & 0 & \ldots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & -\lambda & \ldots & 0 & -a_2 \\ \vdots & & & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \ldots & 1 & -\lambda - a_{n-1} \end{pmatrix}\right).$$

Zur Berechnung der Determinante wenden wir den Laplaceschen Entwicklungssatz an. Entwicklung nach der ersten Spalte liefert

$$p_{A_p}(\lambda) = -\lambda \cdot \det\left(\begin{pmatrix} -\lambda & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 1 & -\lambda & \ldots & 0 & -a_2 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & -\lambda - a_{n-1} \end{pmatrix}\right) +$$

$$\underbrace{1 \cdot (-1)^{n+1} \cdot \det\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & -\lambda & \ldots & 0 & -a_2 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & -\lambda - a_{n-1} \end{pmatrix}\right)}_{=g(\lambda)}$$

Nach Induktionsvoraussetzung gilt

$$\det\left(\begin{pmatrix} -\lambda & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 1 & -\lambda & \dots & 0 & -a_2 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -\lambda - a_{n-1} \end{pmatrix}\right) = (-1)^{n-1} \cdot (\lambda^{n-1} + a_{n-1} \cdot \lambda^{n-2} + \ldots + a_1).$$

Zur Bestimmung von $g(\lambda)$ wenden wir nochmals den Laplaceschen Entwicklungssatz an. Da die Determinante einer Matrix mit einer Nullzeile stets Null ist, liefert Entwicklung nach der ersten Spalte

$$g(\lambda) = -a_0 \cdot \det\left(\begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

Da die Determinante einer oberen Dreiecksmatrix das Produkt der Hauptdiagonalelemente ist, folgt $g(\lambda) = -a_0$. Damit erhalten wir insgesamt:

$$\begin{aligned} p_{A_p}(\lambda) &= -\lambda \cdot (-1)^{n-1} \cdot (\lambda^{n-1} + a_{n-1} \cdot \lambda^{n-2} + \ldots + a_1) + (-1)^{n+1} \cdot (-a_0) \\ &= (-1)^n \cdot (\lambda^n + a_{n-1} \cdot \lambda^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot \lambda + a_0), \end{aligned}$$

also die Behauptung.

Aufgabe 123: (Diagonalisierung und Funktionalkalkül für Matrizen. 0 Bonuspunkte)
Für $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ definieren wir

$$\exp(t \cdot A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \cdot (t \cdot A)^k = \mathbb{1} + t \cdot A + \frac{1}{2} \cdot (t \cdot A)^2 + \frac{1}{6} \cdot (t \cdot A)^3 + \ldots,$$

d.h., wir setzen $t \cdot A$ schlicht in die Taylorreihe der e-Funktion ein.

a) Zeige: Ist

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_n \end{pmatrix}, \text{ so gilt: } \exp(t \cdot D) = \begin{pmatrix} e^{t \cdot d_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{t \cdot d_2} & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{t \cdot d_n} \end{pmatrix}.$$

b) Zeige: Ist A eine diagonalisierbare Matrix und D die Diagonalmatrix mit $A = P\,D\,P^{-1}$, so gilt $\exp(t \cdot A) = P\, \exp(t \cdot D)\, P^{-1}$.

c) Berechne $\exp(t \cdot A)$ für die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 6 & 14 & -16 \\ 6 & 11 & -13 \end{pmatrix}$.

Musterlösung:
a) Für $k \in \mathbb{N}$ ist $(t \cdot D)^k$ schlicht diejenige Diagonalmatrix, die man erhält, wenn man auf der Hauptdiagonale die Einträge $t \cdot d_1, t \cdot d_2, \ldots, t \cdot d_n$ durch $(t \cdot d_1)^k, (t \cdot d_2)^k, \ldots, (t \cdot d_n)^k$ ersetzt. Dies ergibt sich für $k = 2$ unmittelbar aus der Definition der Matrixmultiplikation. Für $k > 2$ folgt die Behauptung induktiv vermöge $D^k = D^{k-1}\, D$, wobei nach Induktionsvoraussetzung D^{k-1} eine Diagonalmatrix ist, deren Hauptdiagonalelemente gerade durch die Potenzen $(t \cdot d_1)^{k-1}, (t \cdot d_2)^{k-1}, \ldots, (t \cdot d_n)^{k-1}$ gegeben sind. Damit ist das Produkt $D^{k-1}\, D$ von der behaupteten Form. Es folgt:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \cdot (t \cdot D)^k &= \mathbb{1} + \begin{pmatrix} t \cdot d_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & t \cdot d_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & t \cdot d_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{(t \cdot d_1)^2}{2!} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \frac{(t \cdot d_2)^2}{2!} & \ldots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \frac{(t \cdot d_n)^2}{2!} \end{pmatrix} + \ldots \\
&= \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t \cdot d_1)^k}{k!} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t \cdot d_2)^k}{k!} & \ldots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t \cdot d_n)^k}{k!} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} e^{t \cdot d_1} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & e^{t \cdot d_2} & \ldots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & e^{t \cdot d_n} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Für Diagonalmatrizen ist es also leicht, $\exp(t \cdot \text{Matrix})$ zu berechnen, denn wir müssen nur die Hauptdiagonaleinträge d_i durch $e^{t \cdot d_i}$ ersetzen.
b) Mit

$$\begin{aligned}
(P\, D\, P^{-1})^k &= (P\, D\, P^{-1})\, (P\, D\, P^{-1}) \ldots (P\, D\, P^{-1}) \\
&= P\, D\, \underbrace{(P^{-1}\, P)}_{=\mathbb{1}}\, D\, \underbrace{(P^{-1}\, P)}_{=\mathbb{1}} \ldots \underbrace{(P^{-1}\, P)}_{=\mathbb{1}}\, D\, P^{-1}) = P\, D^k\, P^{-1}
\end{aligned}$$

folgt

$$\begin{aligned}
\exp(t \cdot A) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \cdot (t \cdot A)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \cdot (t \cdot P\, D\, P^{-1})^k \\
&= P \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \cdot (t \cdot D)^k \right) P^{-1} = P\, \exp(t \cdot D)\, P^{-1}.
\end{aligned}$$

c) Wir gehen in vier Schritten vor:
Schritt 1: Wir berechnen die Eigenwerte der Matrix A. Das charakteristische Polynom $p_A(\lambda)$ von A ist gegeben durch

$$\begin{aligned}
p_A(\lambda) &= \det\left(\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 6 & 14 & -16 \\ 6 & 11 & -13 \end{pmatrix} - \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = \det\left(\begin{pmatrix} 1-\lambda & -2 & 2 \\ 6 & 14-\lambda & -16 \\ 6 & 11 & -13-\lambda \end{pmatrix} \right) \\
&= -\lambda^3 + 2 \cdot \lambda^2 + 5 \cdot \lambda - 6.
\end{aligned}$$

λ ist ein Eigenwert von A genau dann, wenn $p_A(\lambda) = 0$ gilt. Lösen der Gleichung $-\lambda^3+2\cdot\lambda^2+5\cdot\lambda-6 = 0$ (z.B. mit MuPAD) liefert die Eigenwerte

$$\lambda_1 = -2, \quad \lambda_2 = 3, \quad \lambda_3 = 1.$$

Die Eigenwerte haben alle die algebraische Vielfachheit 1 (sie sind einfache Nullstellen des charakteristischen Polynoms), d.h., die Matrix A ist diagonalisierbar.

Schritt 2: Wir berechnen die Eigenvektoren der Matrix A. Zur Berechnung eines Eigenvektors zum Eigenwert $\lambda_1 = -2$ haben wir das folgende homogene lineare Gleichungssystem zu lösen:

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 6 & 14 & -16 \\ 6 & 11 & -13 \end{pmatrix} - (-2) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

also

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 6 & 16 & -16 \\ 6 & 11 & -11 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Wir bilden die erweiterte Koeffizientenmatrix und berechnen die Lösungen nach dem Gauß-Algorithmus: Erzeugen der Nullen unterhalb der Hauptdiagonale in der ersten Spalte liefert

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 20 & -20 & 0 \\ 0 & 15 & -15 & 0 \end{array} \right).$$

Erzeugen der Nullen unterhalb der Hauptdiagonalen in der zweiten Spalte liefert

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 20 & -20 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Damit ist die obere Dreiecksform erreicht und wir erzeugen Nullen über den nicht verschwindenden Hauptdiagonalelementen und normieren diese:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Einfügen von -1 auf der Hauptdiagonale in der dritten Spalte liefert einen Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_1 = -2$:

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Zur Berechnung eines Eigenvektors zum Eigenwert $\lambda_2 = 3$ haben wir das folgende homogene lineare Gleichungssystem zu lösen:

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 6 & 14 & -16 \\ 6 & 11 & -13 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

also

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 & 2 \\ 6 & 11 & -16 \\ 6 & 11 & -16 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Wir bilden die erweiterte Koeffizientenmatrix und berechnen die Lösungen nach dem Gauß-Algorithmus: Erzeugen der Nullen unterhalb der Hauptdiagonale in der ersten Spalte liefert

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & -10 & 0 \\ 0 & 5 & -10 & 0 \end{array}\right).$$

Erzeugen der Nullen unterhalb der Hauptdiagonale in der zweiten Spalte liefert

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Damit ist die obere Dreiecksform erreicht und wir erzeugen Nullen über den nicht verschwindenden Hauptdiagionalelementen und normieren diese:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Einfügen von -1 auf der Hauptdiagonale in der dritten Spalte liefert einen Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_2 = 3$:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Zur Berechnung eines Eigenvektors zum Eigenwert $\lambda_3 = 1$ haben wir das folgende homogene lineare Gleichungssystem zu lösen:

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 6 & 14 & -16 \\ 6 & 11 & -13 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

also

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 6 & 14 & -16 \\ 6 & 11 & -13 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Wir bilden die erweiterte Koeffizientenmatrix und berechnen die Lösungen nach dem Gauß-Algorithmus: Da das erste Hauptdiagonalelement verschwindet, vertauschen wir die erste und die zweite Zeile, bevor wir mit der Elimination beginnen:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 13 & -16 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 6 & 11 & -14 & 0 \end{array}\right).$$

Erzeugen der Nullen unterhalb der Hauptdiagonale in der ersten Spalte liefert

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 13 & -16 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right).$$

Erzeugen der Nullen unterhalb der Hauptdiagonale in der zweiten Spalte liefert

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 13 & -16 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Damit ist die obere Dreiecksform erreicht und wir erzeugen Nullen über den nicht verschwindenen Hauptdiagionalelementen und normieren diese:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Einfügen von -1 auf der Hauptdiagonale in der dritten Spalte liefert einen Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_3 = 1$:

$$\vec{w} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Schritt 3: Wir fügen die drei Eigenvektoren $\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\vec{w}$ zu der Matrix

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

zusammen. Damit gilt

$$A = P \underbrace{\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=D} P^{-1}.$$

Schritt 4: Mit Hilfe von Teil a) und b) erhalten wir schließlich

$$\begin{aligned} \exp(t \cdot A) &= P \exp(t \cdot D)\, P^{-1} = P \begin{pmatrix} e^{-2\cdot t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{3\cdot t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{t} \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} e^{t} & e^{t} - e^{3\cdot t} & -e^{t} + e^{3\cdot t} \\ 2\cdot e^{t} - 2\cdot e^{-2\cdot t} & 2\cdot e^{t} - 3\cdot e^{-2\cdot t} + 2\cdot e^{3\cdot t} & -2\cdot e^{t} + 4\cdot e^{-2\cdot t} - 2\cdot e^{3\cdot t} \\ 2\cdot e^{t} - 2\cdot e^{-2\cdot t} & 2\cdot e^{t} - 3\cdot e^{-2\cdot t} + e^{3\cdot t} & -2\cdot e^{t} + 4\cdot e^{-2\cdot t} - 2\cdot e^{3\cdot t} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$