Ü b u n g s b l a t t 14

Abgabe von $*$–Aufgaben am 05.02.2004 in der Übung.

Aufgabe 113*: (eine Basis des $\mathbb{R}^3$. 10 Bonuspunkte)
Zeige, dass die Vektoren

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden.

Musterlösung:
Zunächst zeigen wir, dass die Vektoren $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ und $\vec{v}_3$ ein Erzeugendensystem des $\mathbb{R}^3$ sind, d.h., dass sich jeder Vektor $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3$ als Linearkombination der Vektoren $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ und $\vec{v}_3$ schreiben lässt. Seien $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$. Wir starten also mit dem Ansatz

$$\lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

In Matrixschreibweise haben wir das folgende lineare Gleichungssystem zu lösen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Wir lösen das Gleichungssystem nach der Cramerschen Regel: zunächst berechnen wir die Determinante der Koeffizientenmatrix:

$$\det\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\right) = 1 \cdot 1 \cdot 2 + 2 \cdot 4 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 \cdot 1 - (-1) \cdot 1 \cdot 1 - 1 \cdot 4 \cdot 1 - 2 \cdot 2 \cdot 2 = -15$$

Als nächstes ersetzen wir sukzessive eine Spalte der Matrix nach der anderen durch die symbolische rechte Seite $(x_1, x_2, x_3)^T$ und berechnen die Determinante der entstehenden Matrix:

$$\begin{aligned}
\det\left(\begin{pmatrix} x_1 & 2 & 1 \\ x_2 & 1 & 4 \\ x_3 & 1 & 2 \end{pmatrix}\right) &= x_1 \cdot 1 \cdot 2 + 2 \cdot 4 \cdot x_3 + 1 \cdot x_2 \cdot 1 - x_3 \cdot 1 \cdot 1 - 1 \cdot 4 \cdot x_2 - 2 \cdot x_2 \cdot 2 \\
&= 7 \cdot x_3 - 3 \cdot x_2 - 2 \cdot x_1 \\
\det\left(\begin{pmatrix} 1 & x_1 & 1 \\ 2 & x_2 & 4 \\ -1 & x_3 & 2 \end{pmatrix}\right) &= 1 \cdot x_2 \cdot 2 + x_1 \cdot 4 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 \cdot x_3 - (-1) \cdot x_2 \cdot 1 - x_3 \cdot 4 \cdot 1 - 2 \cdot 2 \cdot x_1 \\
&= 3 \cdot x_2 - 8 \cdot x_1 - 2 \cdot x_3 \\
\det\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & x_1 \\ 2 & 1 & x_2 \\ -1 & 1 & x_3 \end{pmatrix}\right) &= 1 \cdot 1 \cdot x_3 + 2 \cdot x_2 \cdot (-1) + x_1 \cdot 2 \cdot 1 - (-1) \cdot 1 \cdot x_1 - 1 \cdot x_2 \cdot 1 - x_3 \cdot 2 \cdot 2 \\
&= 3 \cdot x_1 - 3 \cdot x_2 - 3 \cdot x_3
\end{aligned}$$

Es folgt daher:

$$\lambda_1 = \frac{7 \cdot x_3 - 3 \cdot x_2 - 2 \cdot x_1}{-15}, \lambda_2 = \frac{3 \cdot x_2 - 8 \cdot x_1 - 2 \cdot x_3}{-15}, \lambda_3 = \frac{3 \cdot x_1 - 3 \cdot x_2 - 3 \cdot x_3}{-15},$$

d.h. jeder Vektor im $\mathbb{R}^3$ lässt sich als Linearkombination von $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ schreiben. Damit ist $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ ein Erzeugendensystem des $\mathbb{R}^3$. Da die Darstellung sogar eindeutig ist, folgt hieraus bereits, dass $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$ ist.

Aufgabe 114*: (Determinanten und Gleichungssysteme. 5 + 5 + 5 Bonuspunkte)
Sei K ein Skalarenkörper und $A \in K^{n\times n}$ eine Matrix über K. Zeige, dass die folgenden drei Aussagen äquivalent sind:

a) $\det(A) \neq 0$

b) Das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ hat für jeden Vektor $b \in K^n$ genau eine Lösung.

c) Das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ hat für jeden Vektor $b \in K^n$ mindestens eine Lösung.

Hinweis: Zeige die Implikationen a) $\Rightarrow$ b) $\Rightarrow$ c) $\Rightarrow$ a).

Musterlösung:
a) $\Rightarrow$ b) Es gelte $\det(A) \neq 0$. Dann ist $\det(A)$ in dem Skalarenkörper K invertierbar und somit nach Vorlesung auch die Matrix A selbst. Wenn die Matrix A invertierbar ist, so hat das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ stets mindestens eine Lösung, nämlich $x = A^{-1}b$. Ist $y \in K$ mit $Ay = b$, so folgt $Ay = b = Ax$. Multiplikation beider Seiten der Gleichung liefert $y = x$. Also besitzt das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ für jedes $b \in K^n$ genau eine Lösung.
b) $\Rightarrow$ c) Wenn das Gleichungssystem $Ax = b$ für jeden Vektor $b \in K^n$ immer genau eine Lösung besitzt, so besitzt auch stets mindestens eine Lösung.
c) $\Rightarrow$ a) Das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ habe für jeden Vektor $b \in K^n$ mindestens eine Lösung. Betrachte die n Einheitsvektoren

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \vec{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Sie bilden die Standardbasis des Vektorraums K^n. Nach Voraussetzung gibt es Vektoren $\vec{y}_1, \vec{y}_2, \dots, \vec{y}_n \in K^n$ mit

$$A\vec{y}_1 = \vec{e}_1, A\vec{y}_2 = \vec{e}_2, \dots, A\vec{y}_n = \vec{e}_n \qquad (\#)$$

Sei $Y = (\vec{y}_1, \vec{y}_2, \dots, \vec{y}_n)$ diejenige $(n \times n)$–Matrix über K, deren i-te Spalte durch den Vektor $\vec{y}_i$ gegeben ist, $i = 1, \dots, n$. Dann können wir die n Multiplikationen (#) der Matrix A mit den Vektoren $\vec{y}_1, \vec{y}_2, \dots, \vec{y}_n$ als eine Matrixmultiplikation der Form

$$AY = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$$

schreiben. Dabei ist $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ diejenige Matrix, deren Spalten gerade die n Einheitsvektoren $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ bilden, also die Einheitsmatrix. Dies bedeutet aber, dass Y die zu A inverse Matrix ist, d.h., $Y = A^{-1}$. Die Determinante der Einheitsmatrix ist 1 und die Determinante des Produkts AA^{-1} ist nach dem Determinantenmultiplikationssatz das Produkt der Determinanten von A und von A^{-1}, d.h.,

$$1 = \det((\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n)) = \det(AA^{-1}) = \det(A) \cdot \det(A^{-1}).$$

Daraus folgt $\det(A) \neq 0$.

Aufgabe 115*: (Vandermondesche Determinante. 20 Bonuspunkte)
Sei K ein Skalarenkörper und $a_1, a_2, \ldots, a_n \in K$. Sei $A \in K^{n\times n}$ (mit $n \geq 2$) die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Zeige per Induktion nach n, dass gilt:

$$\det(A) = \prod_{1\leq i<j\leq n} (a_j - a_i).$$

Dabei bezeichnet $\prod_{1\leq i<j\leq n}(a_j - a_i)$ das Produkt aller $a_j - a_i$ mit $1 \leq i < j \leq n$. Die Matrix A wird auch *„Vandermonde–Matrix“* genannt und ihre Determinante $\det(A)$ *„Vandermondesche Determinante“*.
Anleitung: Forme für den Induktionsschritt die $(n \times n)$–Matrix mit Hilfe von elementaren Spaltenoperationen so um, dass die erste Zeile der Matrix bis auf den ersten Eintrag nur noch aus Nullen besteht. Berechne dann die Determinante mit Hilfe des Laplaceschen Entwicklungssatzes (Entwicklung nach der ersten Zeile).

Musterlösung:
Induktionsstart: Im Fall $n = 2$ gilt nach der aus der Vorlesung bekannten Formel für die Determinante einer (2×2)–Matrix

$$\det\begin{pmatrix} 1 & a_1 \\ 1 & a_2 \end{pmatrix} = 1 \cdot a_2 - a_1 \cdot 1 = a_2 - a_1 = \prod_{1\leq i<j\leq 2} (a_j - a_i).$$

Induktionsschritt von $n-1$ nach n: Wir multiplizieren zunächst in Gedanken die $(n-1)$–te Spalte der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-2} & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-2} & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-2} & a_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

mit a_1 und subtrahieren die entstehende Spalte von der n–ten Spalte. Dies liefert die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-2} & 0 \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-2} & (a_2 - a_1) \cdot a_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-2} & (a_n - a_1) \cdot a_n^{n-1} \end{pmatrix},$$

deren Determinante mit der Determinante der Ausgangsmatrix übereinstimmt (das Subtrahieren eines von Null verschiedenen Vielfachen einer Spalte von einer anderen Spalte verändert die Determinante der Matrix nicht). Im nächsten Schritt multiplizieren wir die $(n-2)$–te Spalte der erhaltenen Matrix in Gedanken mit a_1 und subtrahieren diese von der $(n-1)$-ten Spalte. Dies liefert die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & (a_2-a_1)\cdot a_2^{n-3} & (a_2-a_1)\cdot a_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & (a_n-a_1)\cdot a_n^{n-3} & (a_n-a_1)\cdot a_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Setzen wir das Verfahren bis zur zweiten Spalte der Matrix fort, so erhalten wir die folgende Matrix, deren erste Spalte bis auf den ersten Eintrag nur aus Nullen besteht und deren Determinante auch weiterhin mit der der Ausgangsmatrix A übereinstimmt:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & a_2-a_1 & (a_2-a_1)\cdot a_2 & \cdots & (a_2-a_1)\cdot a_2^{n-3} & (a_2-a_1)\cdot a_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & a_n-a_1 & (a_n-a_1)\cdot a_n & \cdots & (a_n-a_1)\cdot a_n^{n-3} & (a_n-a_1)\cdot a_n^{n-1} \end{pmatrix}}_{=:\tilde{A}}.$$

Zur Berechnung der Determinante von $\tilde{A}$ wenden wir den Laplaceschen Entwicklungssatz an (Entwicklung nach der ersten Zeile der Matrix). Da die erste Zeile der Matrix $\tilde{A}$ bis auf den ersten Eintrag nur aus Nullen besteht, gilt:

$$\begin{aligned} \det(\tilde{A}) &= \det\begin{pmatrix} a_2-a_1 & (a_2-a_1)\cdot a_2 & \cdots & (a_2-a_1)\cdot a_2^{n-3} & (a_2-a_1)\cdot a_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_n-a_1 & (a_n-a_1)\cdot a_n & \cdots & (a_n-a_1)\cdot a_2^{n-3} & (a_n-a_1)\cdot a_n^{n-2} \end{pmatrix} \\ &= (a_2-a_1)\cdot\ldots\cdot(a_n-a_1)\cdot\det\begin{pmatrix} 1 & a_2 & \cdots & a_2^{n-3} & a_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & a_n & \cdots & a_2^{n-3} & a_n^{n-2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Nach Induktionsvoraussetzung gilt jetzt aber

$$\det\begin{pmatrix} 1 & a_2 & \cdots & a_2^{n-3} & a_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & a_n & \cdots & a_n^{n-3} & a_n^{n-2} \end{pmatrix} = \prod_{2\le i<j\le n}(a_j-a_i)$$

und damit insgesamt

$$\det(A) = \det(\tilde{A}) = (a_2-a_1)\cdot\ldots\cdot(a_n-a_1)\cdot\prod_{2\le i<j\le n}(a_j-a_i) = \prod_{1\le i<j\le n}(a_j-a_i).$$

Aufgabe 116*: (Spatprodukt und Determinante. 5 Bonuspunkte)

Zeige für beliebige Vektoren $\vec{x},\vec{y},\vec{z}\in\mathbb{R}^3$, dass für das Spatprodukt dieser Vektoren $|[\vec{x},\vec{y},\vec{z}]| = \det([\vec{x},\vec{y},\vec{z}])$ gilt! Die Determinante gibt also das (orientierte) Volumen eines von drei Vektoren aufgespannten Spats im $\mathbb{R}^3$ an.

Musterlösung:
Es seien

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \quad \vec{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}.$$

Dann ist A die (3×3)–Matrix

$$A = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix}.$$

Wir rechnen die behauptete Identität schlicht nach. Mit den Definitionen des Spatprodukts, des Kreuzprodukts und des Standardskalarprodukts folgt:

$$\begin{aligned} |[\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}]| = \langle \vec{x}, \vec{y} \times \vec{z} \rangle &= \left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_2 \cdot z_3 - y_3 \cdot z_2 \\ y_3 \cdot z_1 - y_1 \cdot z_3 \\ y_1 \cdot z_2 - y_2 \cdot z_1 \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= x_1 \cdot y_2 \cdot z_3 - x_1 \cdot y_3 \cdot z_2 + x_2 \cdot y_3 \cdot z_1 - x_2 \cdot y_1 \cdot z_3 + x_3 \cdot y_1 \cdot z_2 - x_3 \cdot y_2 \cdot z_1 \quad (\#) \end{aligned}$$

Die Determinante der Matrix A ist nach der aus der Vorlesung bekannten Rechenregel für (3×3)–Matrizen gegeben durch

$$\det(A) = x_1 \cdot y_2 \cdot z_3 + y_1 \cdot z_2 \cdot x_3 + z_1 \cdot x_2 \cdot y_3 - x_3 \cdot y_2 \cdot z_1 - y_3 \cdot z_2 \cdot x_1 - z_3 \cdot x_2 \cdot y_1. \quad (\#\#)$$

Vergleich von (#) und (##) liefert sofort die Behauptung.

Aufgabe 117*: (Volumen eines Spats im $\mathbb{R}^3$. 5 Bonuspunkte)
Die drei Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

definieren einen Spat im $\mathbb{R}^3$. Bestimme sein Volumen!

Musterlösung:
Wir betrachten die Matrix A, deren Spalten durch die Vektoren v_1, v_2 und v_3 gegeben sind und bestimmen ihre Determinante. Setze also

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Es gilt:

$$\det(A) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 + \Big(-\frac{\sqrt{3}}{2}\Big) \cdot 0 \cdot 0 + 0 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 0 - 0 \cdot \frac{1}{2} \cdot 0 - 0 \cdot 0 \cdot \frac{1}{2} - 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \Big(-\frac{\sqrt{3}}{2}\Big) = 1.$$

Aufgabe 118*: (Produkte von Matrizen. $3+3+3$ Bonuspunkte)
Zeige, dass das

a) Produkt zweier oberer Dreiecksmatrizen wieder eine obere Dreiecksmatrix ist,

b) Produkt zweier unterer Dreiecksmatrizen wieder eine untere Dreiecksmatrix ist,

c) Produkt einer oberen mit einer unteren Dreiecksmatrix nicht notwendiger Weise eine obere oder untere Dreiecksmatrix ist (hier genügt ein Beispiel).

Musterlösung:
a) Seien $U = (u_{ij}), V = (v_{ij}) \in K^{n\times n}$ obere Dreiecksmatrizen, d.h. $u_{ij} = 0 = v_{ij}$ für alle $i > j$. Es sei $UV = (p_{ij})$ das Produkt der beiden Matrizen. Dann gilt $p_{ij} = \sum_{k=1}^{n} u_{ik} \cdot v_{kj}$. Wir müssen zeigen, dass $p_{ij} = 0$ gilt für alle $i > j$. Sei $i > j$. Für $i > k$ gilt $u_{ik} = 0$ und für $k \geq i$ gilt insbesondere $k > j$, also $v_{kj} = 0$. Es folgt $p_{ij} = \sum_{k=1}^{n} u_{ik} \cdot v_{kj} = 0$ für alle $i > j$.

b) Seien $L = (l_{ij}), M = (m_{ij}) \in K^{n\times n}$ untere Dreiecksmatrizen, d.h. $l_{ij} = 0 = m_{ij}$ für alle $i < j$. Es sei $UV = (p_{ij})$ das Produkt der beiden Matrizen. Dann gilt $p_{ij} = \sum_{k=1}^{n} l_{ik} \cdot m_{kj}$. Wir müssen zeigen, dass $p_{ij} = 0$ gilt für alle $i < j$. Sei $i < j$. Für $i < k$ gilt $l_{ik} = 0$ und für $k \leq i$ gilt insbesondere $k < j$, also $m_{kj} = 0$. Es folgt $p_{ij} = \sum_{k=1}^{n} l_{ik} \cdot m_{kj} = 0$ für alle $i < j$.

c) Betrachte zum Beispiel die Matrizen

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dann gilt

$$UL = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

also insbesondere keine obere oder untere Dreiecksmatrix.

Aufgabe 119*: (Orthogonale Matrizen. $5+5+10$ Bonuspunkte)
Eine Matrix $O \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißt *orthogonal*, wenn $O\,O^T = \mathbb{1}$ gilt.

a) Zeige, dass $\det(O) = 1$ oder $\det(O) = -1$ gilt.

Duch die folgenden drei Matrizen werden Drehungen um den Winkel α im $\mathbb{R}^3$ um die x–, y– bzw. z–Achse definiert:

$$O_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}, O_y = \begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 & \sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{pmatrix}, O_z = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Blickt man in die (positive) Richtung der jeweiligen Drehachse, dann erfolgt die Drehung bei positivem α im Uhrzeigersinn.

b) Zeige dass O_x, O_y und O_z in der Tat orthogonale Matrizen mit $\det(O_x) = \det(O_y) = \det(O_z) = 1$ sind.

c) Zeige $O_x(\vec{v} \times \vec{w}) = (O_x\vec{v}) \times (O_x\vec{w})$ für beliebige Vektoren $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$ (die gleiche Aussage gilt auch für O_y und O_z, was hier aber nicht explizit nachgewiesen werden muss).

Musterlösung:
a) Es gilt

$$\det(O\,O^T) = \det(O) \cdot \det(O^T) = \det(O)^2 = \det(\mathbb{1}) = 1.$$

Hieraus folgt sofort $\det(0) = \pm 1$.

b) Mit $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ und der Definition der Matrixmultiplikation sowie der Transposition von Matrizen folgt durch schlichtes Nachrechnen:

$$\begin{aligned} O_x \cdot O_x^T &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos^2\alpha + \sin^2\alpha & \cos\alpha\cdot\sin\alpha - \sin\alpha\cdot\cos\alpha \\ 0 & \sin\alpha\cdot\cos\alpha - \cos\alpha\cdot\sin\alpha & \sin^2\alpha + \cos^2\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} O_y \cdot O_y^T &= \begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 & \sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 & -\sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos^2\alpha + \sin^2\alpha & 0 & -\cos\alpha\cdot\sin\alpha + \sin\alpha\cdot\cos\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\alpha\cdot\cos\alpha + \cos\alpha\cdot\sin\alpha & 0 & \sin^2\alpha + \cos^2\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} O_z \cdot O_z^T &= \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos^2\alpha + \sin^2\alpha & \cos\alpha\cdot\sin\alpha - \sin\alpha\cdot\cos\alpha & 0 \\ \sin\alpha\cdot\cos\alpha - \cos\alpha\cdot\sin\alpha & \sin^2\alpha + \cos^2\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ferner folgt mit Hilfe der Regel zur Berechnung von Determinanten für (3×3)– Matrizen:

$$\det O_x = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1, \quad \det O_y = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1, \quad \det O_z = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1.$$

c) Seien

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}.$$

Mit der Definition des Kreuzprodukts folgt:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \right] =$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_2 \cdot w_3 - v_3 \cdot w_2 \\ v_3 \cdot w_1 - v_1 \cdot w_3 \\ v_1 \cdot w_2 - v_2 \cdot w_1 \end{pmatrix} =$$
$$\underbrace{\begin{pmatrix} v_2 \cdot w_3 - v_3 \cdot w_2 \\ \cos\alpha \cdot (v_3 \cdot w_1 - v_1 \cdot w_3) - \sin\alpha \cdot (v_1 \cdot w_2 - v_2 \cdot w_1) \\ \sin\alpha \cdot (v_3 \cdot w_1 - v_1 \cdot w_3) + \cos\alpha \cdot (v_1 \cdot w_2 - v_2 \cdot w_1) \end{pmatrix}}_{=:\vec{u}}$$

Nun berechnen wir $O_x\vec{v}$ und $O_x\vec{w}$:

$$O_x\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \cos\alpha \cdot v_2 - \sin\alpha \cdot v_3 \\ \sin\alpha \cdot v_2 + \cos\alpha \cdot v_3 \end{pmatrix}$$

$$O_x\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 \\ \cos\alpha \cdot w_2 - \sin\alpha \cdot w_3 \\ \sin\alpha \cdot w_2 + \cos\alpha \cdot w_3 \end{pmatrix}$$

Es sei $\vec{z} = O_x\vec{v} \times O_x\vec{w}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} z_1 &= (\cos\alpha \cdot v_2 - \sin\alpha \cdot v_3) \cdot (\sin\alpha \cdot w_2 + \cos\alpha \cdot w_3) - (\sin\alpha \cdot v_2 + \cos\alpha \cdot v_3) \cdot (\cos\alpha \cdot w_2 - \sin\alpha \cdot w_3) \\ &= (v_2 \cdot w_3 - v_3 \cdot w_2) \cdot (\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) \\ &= v_2 \cdot w_2 - v_3 \cdot w_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_2 &= (\sin\alpha \cdot v_2 + \cos\alpha \cdot v_3) \cdot w_1 - v_1 \cdot (\sin\alpha \cdot w_2 + \cos\alpha \cdot w_3) \\ &= \cos\alpha \cdot (v_3 \cdot w_1 - v_1 \cdot w_3) - \sin\alpha \cdot (v_1 \cdot w_2 - v_2 \cdot w_1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_3 &= v_1 \cdot (\cos\alpha \cdot w_2 - \sin\alpha \cdot w_3) - (\cos\alpha \cdot v_2 - \sin\alpha \cdot v_3) \cdot w_1 \\ &= \sin\alpha \cdot (v_3 \cdot w_1 - v_1 \cdot w_3) + \cos\alpha \cdot (v_1 \cdot w_2 - v_2 \cdot w_1) \end{aligned}$$

Vergleich der Komponenten von $\vec{u}$ und $\vec{z}$ zeigt die Behauptung.
