Mathe für Physiker I — Wintersemester 03/04
Walter Oevel — 22. 1. 2004

Übungsblatt 13

Abgabe von $*$–Aufgaben am 29.1.2004 in der Übung.

Aufgabe 107*: (der Vektorraum der Polynome. $4 + 4 + 4 + 4 + 4$ Bonuspunkte)
Es sei $\mathcal{P}_n[x]$ die Menge der Polynome vom Grad höchstens $n \in \mathbb{N}$ in einer Unbestimmten x mit komplexen Koeffizienten, d.h.,

$$\mathcal{P}_n[x] = \{a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot x + a_0; \quad a_i \in \mathbb{C} \text{ für } 0 \leq i \leq n\}.$$

a) Zeige, dass $\mathcal{P}_n[x]$ ein Vektorraum über den komplexen Zahlen ist.

b) Zeige, dass die Elemente der Menge $M = \{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ linear unbhängige Vektoren in $\mathcal{P}_n[x]$ sind.

c) Zeige, dass M ein „Erzeugendensystem“ des Vektorraums $\mathcal{P}_n[x]$ ist, d.h., dass sich jedes beliebige Element aus $\mathcal{P}_n[x]$ als Linearkombination von Elementen aus M mit Koeffizienten aus $\mathbb{C}$ darstellen lässt.

d) Aus b) und c) ergeben sich Abschätzungen für die Vektorraumdimension von $\mathcal{P}_n[x]$. Wie groß ist diese?

e) Es sei $\mathcal{P}_n[x, y]$ die Menge aller Polynome vom Grad höchstens n in den beiden Unbestimmten x und y mit komplexen Koeffizienten, d.h.,

$$\mathcal{P}_n[x, y] = \Big\{ \sum_{i+j \leq n} a_{ij} \cdot x^i \cdot y^j; \quad a_{ij} \in \mathbb{C} \text{ für alle } 0 \leq i, j \leq n \Big\}.$$

Der Grad eines einzelnen Monoms $a_{ij} \cdot x^i \cdot y^j$ ist dabei definiert als die Summe $i + j$. Der Grad eines Polynoms $\sum_{i+j \leq n} a_{ij} \cdot x^i \cdot y^j \in \mathcal{P}_n[x, y]$ ist das Maximum der Grade seiner Monome $a_{ij} \cdot x^i \cdot y^j$. Auch $\mathcal{P}_n[x, y]$ ist ein Vektorraum (den Nachweis der Vektorraumeigenschaften sparen wir uns hier). Äußere eine Vermutung über die Dimension von $\mathcal{P}_n[x, y]$, indem Du eine Menge von Polynomen angibst, die Deiner Meinung nach eine Basis bilden. Weise für diese Menge die notwendigen Basiseigenschaften nach.

Musterlösung:
a) Wir rechnen die Vektorraumeigenschaften nach. Seien $f(x) = \sum_{i=0}^n a_i \cdot x^i$, $g(x) = \sum_{i=0}^n b_i \cdot x^i$ und $h(x) = \sum_{i=0}^n c_i \cdot x^i \in \mathcal{P}_n[x]$. Zunächst ist zu zeigen, dass die Addition assoziativ ist, indem wir das Assoziativgesetz in $\mathbb{C}$ für die Koeffizienten verwenden:

$$\begin{aligned}
f + (g + h) &= \sum_{i=0}^n a_i \cdot x^i + \Big(\sum_{i=0}^n b_i \cdot x^i + \sum_{i=0}^n c_i \cdot x^i\Big) = \sum_{i=0}^n a_i \cdot x^i + \Big(\sum_{i=0}^n (b_i + c_i) \cdot x^i\Big) \\
&= \sum_{i=0}^n a_i \cdot x^i + \sum_{i=0}^n (b_i + c_i) \cdot x^i = \sum_{i=0}^n (a_i + (b_i + c_i)) \cdot x^i \\
&= \sum_{i=0}^n ((a_i + b_i) + c_i) \cdot x^i = \sum_{i=0}^n (a_i + b_i) \cdot x^i + \sum_{i=0}^n c_i \cdot x^i \\
&= \Big(\sum_{i=0}^n a_i \cdot x^i + \sum_{i=0}^n b_i \cdot x^i\Big) + \sum_{i=0}^n c_i \cdot x^i = (f + g) + h
\end{aligned}$$

Der „Nullvektor“ ist das Nullpolynom 0. Zu jedem Polynom $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot x^i \in \mathcal{P}_n[x]$ existiert ein additives Inverses $-f(x) = -\sum_{i=0}^{n} a_i \cdot x^i = \sum_{i=0}^{n} -a_i \cdot x^i$. Ferner ist die Addition zweier Polynome kommutativ:

$$\begin{aligned} f(x) + g(x) &= \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot x^i + \sum_{i=0}^{n} b_i \cdot x^i = \sum_{i=0}^{n} (a_i + b_i) \cdot x^i \\ &= \sum_{i=0}^{n} (b_i + a_i) \cdot x^i = \sum_{i=0}^{n} b_i \cdot x^i + \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot x^i = g(x) + f(x). \end{aligned}$$

Nun zu den Eigenschaften der skalaren Multiplikation. Seien $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ und $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot x^i$, $g(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i \cdot x^i \in \mathcal{P}_n[x]$. Zunächst auch hier wieder die Assoziativität:

$$\begin{aligned} (\lambda \cdot \mu) \cdot f(x) &= (\lambda \cdot \mu) \cdot \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot x^i = \sum_{i=0}^{n} (\lambda \cdot \mu) \cdot a_i \cdot x^i = \sum_{i=0}^{n} \lambda \cdot (\mu \cdot a_i) \cdot x^i \\ &= \lambda \cdot \sum_{i=0}^{n} \mu \cdot a_i \cdot x^i = \lambda \cdot \Big(\mu \cdot \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot x^i \Big) = \lambda \cdot (\mu \cdot f(x)). \end{aligned}$$

Sicherlich gilt $1 \cdot f(x) = f(x)$ und auch das Distributivgesetz ist erfüllt:

$$\begin{aligned} (\lambda + \mu) \cdot f(x) &= (\lambda + \mu) \cdot \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot x^i = \sum_{i=0}^{n} (\lambda + \mu) \cdot a_i \cdot x^i \\ &= \sum_{i=0}^{n} \lambda \cdot a_i \cdot x^i + \sum_{i=0}^{n} \mu \cdot a_i \cdot x^i = \lambda \cdot \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot x^i + \mu \cdot \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot x^i \\ &= \lambda \cdot f(x) + \mu \cdot g(x) \end{aligned}$$

sowie auch

$$\begin{aligned} \lambda \cdot (f(x) + g(x)) &= \lambda \cdot \Big(\sum_{i=0}^{n} a_i \cdot x^i + \sum_{i=0}^{n} b_i \cdot x^i \Big) = \lambda \cdot \sum_{i=0}^{n} (a_i + b_i) \cdot x^i \\ &= \sum_{i=0}^{n} \lambda \cdot (a_i + b_i) \cdot x^i = \sum_{i=0}^{n} (\lambda \cdot a_i + \lambda \cdot b_i) \cdot x^i \\ &= \sum_{i=0}^{n} \lambda \cdot a_i \cdot x^i + \sum_{i=0}^{n} \lambda \cdot b_i \cdot x^i = \lambda \cdot \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot x^i + \lambda \cdot \sum_{i=0}^{n} b_i \cdot x^i \\ &= \lambda \cdot f(x) + \lambda \cdot g(x). \end{aligned}$$

Damit ist $\mathcal{P}_n[x]$ ein Vektorraum über den komplexen Zahlen.

b) Zu zeigen ist, dass $1, x, x^2, \ldots, x^n$ linear unabhängig über $\mathbb{C}$ sind. Seien $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ mit $\lambda_0 \cdot 1 + \lambda_1 \cdot x + \ldots + \lambda_n \cdot x^n = 0$. Per Koeffizientenvergleich folgt sofort $\lambda_0 = \lambda_1 = \ldots = \lambda_n$. Dies zeigt die Behauptung. Nach Vorlesung wissen wir, dass jeder Vektorraum eine Basis besitzt. Da die Elemente einer Basis stets linear unabhängig sind, folgt hieraus Dimension$(\mathcal{P}_n[x]) \geq n + 1$.

c) Zu zeigen ist, dass sich jedes beliebige Polynom $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot x^i \in \mathcal{P}_n[x]$ als Linearkombination der Monome $1, x, x^2, \ldots, x^n$ mit Koeffizienten aus $\mathbb{C}$ darstellen lässt. Der Darstellung von $f(x)$

sieht man direkt an: Die a_i sind die gesuchten Koeffizienten. Damit ist $M = \{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ ein Erzeugendensystem von $\mathcal{P}_n[x]$. Da jedes Erzeugendensystem stets eine Basis des betreffenden Vektorraums enthält, folgt hieraus Dimension$(\mathcal{P}_n[x]) \leq n+1$.

d) Es gilt Dimension$(\mathcal{P}_n[x]) = n+1$. Dies folgt sofort aus den Abschätzungen für die Dimension aus b) und c).

e) Eine natürliche Wahl für einen „Kandidaten" für eine Basis ist die Menge der Monome $B := \{x^i \cdot y^j; 0 \leq i, j \leq n, i+j \leq n\}$. Offensichtlich lässt sich jedes Polynom $f(x,y) \in \mathcal{P}_n[x,y]$ als Linearkombination der Elemente von B darstellen, d.h., B ist ein Erzeugendensystem des Vektorraums $\mathcal{P}_n[x,y]$. Die Elemente aus B sind auch linear unabhängig über $\mathbb{C}$, denn für $\lambda_{ij} \in \mathbb{C}$ mit $\sum_{i+j\leq n} \lambda_{ij} \cdot x^i \cdot y^j = 0$ folgt sofort $\lambda_{ij} = 0$. Damit ist B eine Basis von $\mathcal{P}_n[x,y]$. Die Vektorraumdimension von $\mathcal{P}_n[x,y]$ ist gleich der Anzahl der Elemente einer (bzw. jeder) Basis von $\mathcal{P}_n[x,y]$. Die Menge B besteht aus den Elementen

$$\begin{aligned} B = \{&1, \\ &x, y \\ &x^2, x\cdot y, y^2 \\ &x^3, x^2\cdot y, x\cdot y^2, y^3 \\ &\vdots \\ &x^n, x^{n-1}\cdot y, x^{n-2}\cdot y^2, \ldots, x^2\cdot y^{n-2}, x\cdot y^{n-1}, y^n\}, \end{aligned}$$

also (mit Hilfe der Summationsformel von Gauß):

$$|B| = 1+2+3+4+\ldots+(n+1) = \sum_{j=0}^{n+1} j = \frac{(n+1)\cdot(n+2)}{2} = \frac{1}{2}\cdot n^2 + \frac{3}{2}\cdot n + \frac{1}{2},$$

d.h., Dimension$(\mathcal{P}_n[x,y]) = \frac{1}{2}\cdot n^2 + \frac{3}{2}\cdot n + \frac{1}{2}$.

Aufgabe 108*: (Unterräume von Vektorräumen und Unterraumkriterium. 10 + 10 Bonuspunkte)

Sei V ein Vektorraum und $U \subseteq V$ eine Teilmenge von V. Dann heißt U ein *Untervektorraum* (kurz *Unterraum*) von V, wenn U mit der Vektoraddition und der skalaren Multiplikation von V selbst wieder ein Vektorraum ist.

a) Beweise, dass $U \subseteq V$ genau dann ein Unterraum von V ist, wenn die folgenden drei Bedingungen erfüllt sind:

  i) $U \neq \varnothing$
  ii) Sind $u_1, u_2 \in U$, so gilt auch $u_1 + u_2 \in U$.
  iii) Ist $u \in U$ und $\lambda \in \mathbb{C}$, so gilt $\lambda \cdot u \in U$.

b) Welche der folgenden Teilmengen sind Unterräume des jeweiligen Vektorraums über den reellen Zahlen (im folgenden schreiben wir aus Platzgründen die Vektoren in der Form $(\cdot)^T$)?

i) $U_1 := \{(x,y,0)^T; x,y \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^3$

ii) $U_2 := \{(x,y,1)^T; x,y \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^3$

iii) $U_3 := \{f \in C(\mathbb{R}); f(0) = 0, f(\pi) = 0\} \subseteq C(\mathbb{R})$, wobei $C(\mathbb{R})$ die Menge der stetigen Funktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bezeichnet.

iv) $U_4 := \{f \in C(\mathbb{R}); f(0) = 1, f(\pi/2) = 0\} \subseteq C(\mathbb{R})$.

Musterlösung:
a) „$\Rightarrow$" Wenn $U \subseteq V$ selbst ein Vektorraum ist, so gelten insbesondere die unter (i), (ii) und (iii) aufgelisteten Eigenschaften.
„$\Leftarrow$" Die Assoziativ-, Kommutativ- und Distributivgesetze für die Vektoraddition bzw. die skalare Multiplikation gelten in V, also auch in $U \subseteq V$. Wegen den Eigenschaften ii) und iii) ist sowohl die Summe zweier Elemente aus U als auch ein beliebiges skalares Vielfaches eines Elementes aus U wieder in U enthalten. Daher ist U abgeschlossen bezüglich der Addition und der skalaren Mutliplikation. Wegen $U \neq \varnothing$ gibt es ein $u \in U$ und $0 = 0 \cdot u \in U$ nach iii). Desweiteren gilt für $u \in U$ nach iii) $-u = (-1) \cdot u \in U$. Damit ist U selbst wieder ein Vektorraum.

b) i) U_1 ist ein Unterraum von $\mathbb{R}^3$. Wir zeigen, dass das Unterraumkriterium aus a) erfüllt ist. Es gilt $(0,0,0)^T \in U_1$, also $U_1 \neq \varnothing$. Sind $(x,y,0)^T, (\tilde{x},\tilde{y},0)^T \in U_1$, so auch $(x,y,0)^T + (\tilde{x},\tilde{y},0)^T = (x+\tilde{x}, y+\tilde{y}, 0)^T \in U_1$. Ist $\lambda \in \mathbb{R}$ und $(x,y,0)^T \in U_1$, so auch $\lambda \cdot (x,y,0)^T = (\lambda \cdot x, \lambda \cdot y, 0)^T \in U_1$. Dies zeigt die Behauptung.

b) ii) U_2 ist kein Unterraum von $\mathbb{R}^3$, denn für $(x,y,1)^T, (\tilde{x},\tilde{y},1)^T \in U_2$ gilt $(x,y,1)^T + (\tilde{x},\tilde{y},1)^T = (x+\tilde{x}, y+\tilde{y}, 2)^T \notin U_2$. Damit ist Eigenschaft ii) des Unterraumkriteriums verletzt.

b) iii) U_3 ist ein Unterraum von $C(\mathbb{R})$, denn die Funktion identisch $f(x) = \sin(x)$ ist stetig und erfüllt trivialerweise $f(0) = 0 = f(\pi)$, also $U_3 \neq \varnothing$. Sind $f(x), g(x) \in U_3$, so ist $f(x) + g(x)$ als Summe stetiger Funktionen stetig und $f(0)+g(0) = 0 = f(\pi)+g(\pi)$. Dies zeigt $f(x)+g(x) \in U_3$. Ist $\lambda \in \mathbb{R}$, so ist mit $f(x) \in U_3$ auch $\lambda \cdot f(x)$ eine stetige Funktion und es gilt $\lambda \cdot f(0) = 0 = \lambda \cdot f(\pi)$, also $\lambda \cdot f(x) \in U_3$.

b) iv) U_4 ist kein Unterraum von $C(\mathbb{R})$. Die Funktionen $f(x) = 1 - 2 \cdot x/\pi$ und $g(x) = \cos(x)$ sind stetig und erfüllen $f(0) = 1$, $f(\pi/2) = 0$ sowie $g(0) = 1$, $g(\pi/2) = 0$. Jedoch gilt für $f(x) + g(x) = 1 - 2 \cdot x/\pi + \cos(x)$ gerade $f(x) + g(x)|_{x=0} = 2$, also $f(x) + g(x) \notin U_4$, weshalb U_4 nach a) ii) kein Unterraum von $C(\mathbb{R})$ ist.

Aufgabe 109*: (Lineare Abhängigkeit von zwei Vektoren. 10 Bonuspunkte)
Seien $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{C}^n$, $n \in \mathbb{N}$. Zeige, dass $\vec{v}$ und $\vec{w}$ genau dann linear abhängig sind, wenn sie skalare Vielfache voneinander sind. Welche der folgenden beiden Vektorenpaare sind linear unabhängig?

i) $\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 2/3 \\ -1/3 \\ 1 \end{pmatrix}$

ii) $\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1/2 \\ -1 \\ -3/4 \\ 5/4 \end{pmatrix}$

Musterlösung:
„$\Rightarrow$“ Seien $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{C}^n$ linear abhängig. Dann gibt es $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, nicht beide 0, mit $\lambda \cdot \vec{v} + \mu \cdot \vec{w} = \vec{0}$. Ohne Einschränkung dürfen wir $\lambda \neq 0$ annehmen. Damit folgt $\vec{v} = -\mu/\lambda \cdot \vec{w}$, d.h., $\vec{v}$ und $\vec{w}$ sind skalare Vielfache voneinander.
„$\Leftarrow$“ Nach Voraussetzung gilt $\vec{v} = \lambda \cdot \vec{w}$. Es folgt, dass $1 \cdot \vec{v} - \mu \cdot \vec{w} = \vec{0}$ eine nichttriviale Linearkombination des Nullvektors ist. Daher sind $\vec{v}$ und $\vec{w}$ linear abhängig.

Die beiden Vektoren $\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 2/3 \\ -1/3 \\ 1 \end{pmatrix}$ sind linear abhängig, denn der Ansatz

$$\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2/3 \\ -1/3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

liefert die drei Gleichungen

$$4 = \frac{2}{3} \cdot \lambda, \quad -2 = -\frac{1}{3} \cdot \lambda, \quad 6 = \lambda,$$

die alle den Wert $\lambda = 6$ liefern, d.h., die beiden Vektoren sind skalare Vielfache und folglich linear abhängig.

Die Vektoren $\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1/2 \\ -1 \\ -3/4 \\ 5/4 \end{pmatrix}$ sind linear unabhängig, denn der Ansatz

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1 \\ -3/4 \\ 5/4 \end{pmatrix}$$

liefert die vier Gleichungen

$$-2 = \frac{1}{2} \cdot \lambda, \quad 4 = -\lambda, \quad 3 = -\frac{3}{4} \cdot \lambda, \quad 5 = \frac{5}{4} \cdot \lambda,$$

die für ein und denselben Wert von λ nicht gleichzeitig erfüllt sein können (die ersten drei Gleichungen liefern $\lambda = -4$, während die vierte Gleichung auf den Wert $\lambda = 4$ führt). Die Vektoren sind also keine skalaren Vielfachen voneinander und folglich linear unabhängig.

Aufgabe 110*: (Gram-Schmidt-Orthogonalisierung, $10+5+5$ Bonuspunkte)
Sei $\vec{v}_0, \vec{v}_1, \dots$ eine Folge linear unabhängiger Vektoren eines Vektorraums V, auf dem ein Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle : V \times V \to \mathbb{C}$ gegeben ist. Definiere rekursiv

$$\vec{w}_n = \vec{v}_n - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\langle \vec{w}_k, \vec{v}_n\rangle}{\langle \vec{w}_k, \vec{w}_k\rangle} \cdot \vec{w}_k$$

mit $\vec{w}_0 = \vec{v}_0$. Diese Rekursion wird auch das *„Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt“* genannt.

a) Zeige per Induktion, dass $\{\vec{w}_0, \vec{w}_1, \dots\}$ ein Orthogonalsystem ist, d.h., dass die Vektoren $\vec{w}_0, \vec{w}_1, \dots$ paarweise orthogonal zueinander sind.

b) Zeige, dass der von $\vec{v}_0, \dots, \vec{v}_n$ aufgespannte Teilraum identisch ist mit dem von $\vec{w}_0, \dots, \vec{w}_n$ aufgespannten Teilraum (d.h., ein Vektor kann genau dann als Linearkombination von $\vec{v}_0, \dots, \vec{v}_n$ geschrieben werden, wenn er als Linearkombination von $\vec{w}_0, \dots, \vec{w}_n$ geschrieben werden kann).

c) Betrachte die Menge der linear unabhängigen Monome $\{1, x, x^2, x^3, x^4\}$ auf dem Intervall $[-1, 1]$. Wende das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt an, um $\{1, x, x^2, x^3, x^4\}$ in ein Orthogonalsystem bezüglich des Skalarprodukts

$$\langle f, g\rangle := \int_0^1 f(x) \cdot g(x) dx$$

zu überführen. Die auf diese Weise berechneten Polynome heißen auch *„Legendre-Polynome“*.

Musterlösung:
a) Induktionsbehauptung: $\vec{w}_0, \dots, \vec{w}_n$ sind paarweise orthogonal für jedes $n \in \mathbb{N}$.
Induktionsstart $n = 1$: Mit den Rechenregeln für das Skalarprodukt ergibt sich

$$\langle \vec{w}_0, \vec{w}_1\rangle = \langle \vec{w}_0, \vec{v}_1 - \frac{\langle \vec{w}_0, \vec{v}_1\rangle}{\langle \vec{w}_0, \vec{w}_0\rangle} \cdot \vec{w}_0\rangle = \langle \vec{w}_0, \vec{v}_1\rangle - \frac{\langle \vec{w}_0, \vec{v}_1\rangle}{\langle \vec{w}_0, \vec{w}_0\rangle} \cdot \langle \vec{w}_0, \vec{w}_0\rangle = 0.$$

Induktionsschritt $n-1 \to n$: Es sei $\{\vec{w}_0, \dots, \vec{w}_{n-1}\}$ ein Orthogonalsystem. Zu zeigen ist, dass auch $\{\vec{w}_0, \dots, \vec{w}_{n-1}, \vec{w}_n\}$ ein Orthogonalsystem ist. Dazu genügt es $\langle \vec{w}_m, \vec{w}_n\rangle = 0$ für alle $m = 0, 1, \dots, n-1$ zu zeigen. Für $m = 0, 1, \dots, n-1$ gilt

$$\langle \vec{w}_m, \vec{w}_n\rangle = \langle \vec{w}_m, \vec{v}_n - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\langle \vec{w}_k, \vec{v}_n\rangle}{\langle \vec{w}_k, \vec{w}_k\rangle} \cdot \vec{w}_k\rangle = \langle \vec{w}_m, \vec{v}_n\rangle - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\langle \vec{w}_k, \vec{v}_n\rangle}{\langle \vec{w}_k, \vec{w}_k\rangle} \cdot \langle \vec{w}_m, \vec{w}_k\rangle.$$

In dieser Summe verschwinden nach Induktionsvoraussetzung alle Summanden außer dem mit $k = m$. Es folgt:

$$\langle \vec{w}_m, \vec{w}_n\rangle = \langle \vec{w}_m, \vec{v}_n\rangle - \frac{\langle \vec{w}_m, \vec{v}_n\rangle}{\langle \vec{w}_m, \vec{w}_m\rangle} \cdot \langle \vec{w}_m, \vec{w}_m\rangle = 0.$$

b) Mit Hilfe von a) erhalten wir für jeden Vektor $\vec{v}_n$ die Darstellung

$$\vec{v}_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\langle \vec{w}_k, \vec{v}_n \rangle}{\langle \vec{w}_k, \vec{w}_k \rangle} \cdot \vec{w}_k + \vec{w}_n,$$

d.h., $\vec{v}_n$ ist für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ als Linearkombination von $w_0, \ldots, w_n$ darstellbar. Dass auch jeder Vektor $\vec{w}_n$ als Linearkombination der Vektoren $\vec{v}_0, \ldots, \vec{v}_n$ darstellbar ist, zeigen wir wieder per Induktion.
Induktionsstart: Die Behauptung ist für $n = 0$ wegen $\vec{w}_0 = \vec{v}_0$ trivialerweise richtig.
Induktionsschritt $n-1 \to n$: Es sei jeder der Vektoren aus der Menge $\{\vec{w}_0, \ldots, \vec{w}_{n-1}\}$ als Linearkombination von $\vec{v}_0, \ldots, \vec{v}_{n-1}$ darstellbar. Nach der Rekursionsformel von Gram-Schmidt gilt $\vec{w}_n = \vec{v}_n - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\langle \vec{w}_k, \vec{v}_n \rangle}{\langle \vec{w}_k, \vec{w}_k \rangle} \cdot \vec{w}_k$. Da nach Induktionsvoraussetzung $\vec{w}_0, \ldots, \vec{w}_{n-1}$ als Linearkombination von $\vec{v}_0, \ldots, \vec{v}_{n-1}$ darstellbar sind, ist $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\langle \vec{w}_k, \vec{v}_n \rangle}{\langle \vec{w}_k, \vec{w}_k \rangle} \cdot \vec{w}_k$ als Linearkombination von $\vec{v}_0, \ldots, \vec{v}_{n-1}$ darstellbar. Insgesamt ist damit insbesondere $\vec{w}_n = \vec{v}_n - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\langle \vec{w}_k, \vec{v}_n \rangle}{\langle \vec{w}_k, \vec{w}_k \rangle} \cdot \vec{w}_k$ eine Linearkombination von $\vec{v}_0, \ldots, \vec{v}_n$.

c) Wir wenden das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf $\vec{v}_0 = 1$, $\vec{v}_1 = x$, $\vec{v}_2 = x^2$, $\vec{v}_3 = x^3$, $\vec{v}_4 = x^4$ an. Um den Rechenaufwand im folgenden zu minieren, erinnern wir uns, dass für Integrale über ungerade Funktionen $f(x)$, d.h., Funktionen mit der Eigenschaft $f(-x) = -f(x)$, stets $\int_{-1}^{1} f(x)\, dx = 0$ gilt (dies ist insbesondere für alle Polynome der Fall, die nur ungerade Potenzen von x enthalten). In der Notation von oben folgt mit $\vec{w}_0 := \vec{v}_0 = 1$

$$\begin{aligned}
\vec{w}_1 &= \vec{v}_1 - \frac{\langle \vec{w}_0, \vec{v}_1 \rangle}{\langle \vec{w}_0, \vec{w}_0 \rangle} \cdot \vec{w}_0 = x - \frac{\int_{-1}^{1} 1 \cdot x\, dx}{\int_{-1}^{1} 1 \cdot 1\, dx} \cdot 1 = x, \\
\vec{w}_2 &= \vec{v}_2 - \frac{\langle \vec{w}_0, \vec{v}_2 \rangle}{\langle \vec{w}_0, \vec{w}_0 \rangle} \cdot \vec{w}_0 - \frac{\langle \vec{w}_1, \vec{v}_2 \rangle}{\langle \vec{w}_1, \vec{w}_1 \rangle} \cdot \vec{w}_1 = x^2 - \frac{\int_{-1}^{1} 1 \cdot x^2\, dx}{\int_{-1}^{1} 1 \cdot 1\, dx} - \frac{\int_{-1}^{1} x \cdot x^2\, dx}{\int_{-1}^{1} x \cdot x\, dx} \cdot x = x^2 - \frac{1}{3}, \\
\vec{w}_3 &= \vec{v}_3 - \frac{\langle \vec{w}_0, \vec{v}_3 \rangle}{\langle \vec{w}_0, \vec{w}_0 \rangle} \cdot \vec{w}_0 - \frac{\langle \vec{w}_1, \vec{v}_3 \rangle}{\langle \vec{w}_1, \vec{w}_1 \rangle} \cdot \vec{w}_1 - \frac{\langle \vec{w}_2, \vec{v}_3 \rangle}{\langle \vec{w}_2, \vec{w}_2 \rangle} \cdot \vec{w}_2 \\
&= x^3 - \frac{\int_{-1}^{1} 1 \cdot x^3\, dx}{\int_{-1}^{1} 1 \cdot 1\, dx} - \frac{\int_{-1}^{1} x \cdot x^3\, dx}{\int_{-1}^{1} x \cdot x\, dx} \cdot x - \frac{\int_{-1}^{1} (x^2 - \frac{1}{3}) \cdot x^3\, dx}{\int_{-1}^{1} (x^2 - \frac{1}{3}) \cdot (x^2 - \frac{1}{3})\, dx} \cdot \left(x^2 - \frac{1}{3}\right) \\
&= x^3 - \frac{3}{5} \cdot x \\
\vec{w}_4 &= \vec{v}_4 - \frac{\langle \vec{w}_0, \vec{v}_4 \rangle}{\langle \vec{w}_0, \vec{w}_0 \rangle} \cdot \vec{w}_0 - \frac{\langle \vec{w}_1, \vec{v}_4 \rangle}{\langle \vec{w}_1, \vec{w}_1 \rangle} \cdot \vec{w}_1 - \frac{\langle \vec{w}_2, \vec{v}_4 \rangle}{\langle \vec{w}_2, \vec{w}_2 \rangle} \cdot \vec{w}_2 - \frac{\langle \vec{w}_3, \vec{v}_4 \rangle}{\langle \vec{w}_3, \vec{w}_3 \rangle} \cdot \vec{w}_3 \\
&= x^4 - \frac{\int_{-1}^{1} 1 \cdot x^4\, dx}{\int_{-1}^{1} 1 \cdot 1\, dx} - \frac{\int_{-1}^{1} x \cdot x^4\, dx}{\int_{-1}^{1} x \cdot x\, dx} \cdot x - \frac{\int_{-1}^{1} (x^2 - \frac{1}{3}) \cdot x^4\, dx}{\int_{-1}^{1} (x^2 - \frac{1}{3}) \cdot (x^2 - \frac{1}{3})\, dx} \cdot \left(x^2 - \frac{1}{3}\right) \\
&\quad - \frac{\int_{-1}^{1} (x^3 - \frac{3}{5} \cdot x) \cdot x^4\, dx}{\int_{-1}^{1} (x^3 - \frac{3}{5} \cdot x) \cdot (x^3 - \frac{3}{5} \cdot x)\, dx} \cdot \left(x^3 - \frac{3}{5} \cdot x\right) \\
&= x^4 - \frac{6}{7} \cdot x^2 + \frac{3}{35}
\end{aligned}$$

Wir machen die Probe mit MuPAD:

```
>> w0:= 1:
>> w1:= x:
>> w2:= x^2 - 1/3:
>> w3:= x^3 - 3/5*x:
>> w4:= x^4 - 6/7*x^2 + 3/35:
>> SC:= (v,w) -> int(v * w, x = -1..1): // das Skalarprodukt
>> SC(w0, w1), SC(w0, w2), SC(w0, w3), SC(w0, w4)

                              0, 0, 0, 0
>> SC(w1, w2), SC(w1, w3), SC(w1, w4)

                                0, 0, 0
>> SC(w2, w3), SC(w2, w4)

                                 0, 0
>> SC(w3, w4)

                                   0
```

Aufgabe 111*: (Abstand eines Punktes von einer Ebene. 10 Bonuspunkte)
Im $\mathbb{R}^3$ seien die Ebene

$$E := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} ; \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

in Parameterform sowie der Punkt $\vec{p} = (1, 2, 3)^T$ gegeben. Bestimme den Abstand von $\vec{p}$ zu der Ebene E.

Anleitung: Bestimme zunächst mit Hilfe des Kreuzprodukts einen „Normalenvektor“ $\vec{n}$ der Ebene E, d.h., einen Vektor der zu E orthogonal ist. Forme die Ebene mit Hilfe von $\vec{n}$ in „Koordinatenform“ $E : \vec{n} \cdot (\vec{x} - \vec{a}) = 0$ um, wobei $\vec{a}$ ein fester Punkt und $\vec{x}$ ein beliebiger Punkt der Ebene E ist. Bestimme dann die „Lotgerade“ l von $\vec{p}$ auf E sowie ihren Schnittpunkt $\vec{s}$ mit der Ebene E. Die Länge des Vektors $\overrightarrow{ps}$ von $\vec{p}$ nach $\vec{s}$ ist dann der gesuchte Abstand.

Musterlösung:
Wir berechnen zunächst einen Normalenvektor der Ebene E, indem wir das Kreuzprodukt der beiden Spannvektoren bilden:

$$\vec{n} := \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 - 5 \cdot 0 \\ 5 \cdot 2 - (-3) \cdot 1 \\ (-3) \cdot 0 - 2 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 13 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Offensichtlich ist das Skalarprodukt mit jedem der beiden Spannvektoren von E gleich 0, d.h., $\vec{n}$ ist orthogonal zur Ebene E. Sei nun $\vec{x}$ der Ortsvektor eines beliebigen Punktes auf der Ebene E sowie

$\vec{a} := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ der Antragsvektor von E. Dann liegt der Differenzvektor $\vec{x} - \vec{a}$ in der Ebene E. Folglich ist der Normalenvektor $\vec{n}$ orthogonal zu $\vec{x} - \vec{a}$, d.h., es gilt

$$\vec{n} \cdot (\vec{x} - \vec{a}) = 0,$$

woraus sich mit $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ eine Koordinatenform der Ebene E

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 13 \\ -4 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \right] = 0 \right\}, \text{ also}$$

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}; \quad 2 \cdot x_1 + 13 \cdot x_2 - 4 \cdot x_3 - 10 = 0 \right\}$$

ergibt. Als nächstes bestimmen wir eine Parameterform der Lotgeraden l von $\vec{p}$ durch E sowie ihren Schnittpunkt $\vec{s}$ mit E. Als Richtungsvektor für die Lotgerade wählen wir den Normalenvektor $\vec{n}$ der Ebene E. Da die Lotgerade durch den Punkt $\vec{p}$ verlaufen soll, wählen wir den Ortsvektor zu $\vec{p}$ als Antragsvektor für die Gerade:

$$l = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 13 \\ -4 \end{pmatrix}; \quad \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

Den Schnittpunkt $\vec{s}$ von E und l erhalten wir jetzt wie folgt: Die x_1-Koordinate aller Punkte auf l ist gegeben durch $x_1 = 1 + 2 \cdot \lambda$ (diese ergibt sich aus den jeweiligen ersten Komponenten der obigen Parameterdarstellung). Die x_2-Koordinate aller Punkte auf l ist gegeben durch $x_2 = 2 + 13 \cdot \lambda$ (diese ergibt sich aus den jeweiligen zweiten Komponenten der obigen Parameterdarstellung). Die x_3-Koordinate aller Punkte auf l ist gegeben durch $x_3 = 3 - 4 \cdot \lambda$ (diese ergibt sich aus der jeweiligen dritten Komponenten der obigen Parameterdarstellung). Da wir einen gemeinsamen Punkt von E und l suchen, müssen seine Koordinaten auch die Ebenengleichung erfüllen. Einsetzen in die Koordinatenform der Ebene E liefert:

$$\begin{aligned} & 2 \cdot x_1 + 13 \cdot x_2 - 4 \cdot x_3 - 10 = 0 \\ \Rightarrow & 2 \cdot (1 + 2 \cdot \lambda) + 13 \cdot (2 + 13 \cdot \lambda) - 4 \cdot (3 - 4 \cdot \lambda) - 10 = 0 \\ \Rightarrow & 189 \cdot \lambda + 6 = 0 \\ \Rightarrow & \lambda = -\frac{6}{189} = -\frac{2}{63} \end{aligned}$$

Der Ortsvektor des Schnittpunktes $\vec{s}$ von l und E ist also

$$\vec{s} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{2}{63} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 13 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Der Abstand $d(\vec{p}, E)$ von $\vec{p}$ zu E ist damit

$$d(\vec{p}, E) = \|\vec{s} - \vec{P}\| = \left\| \frac{2}{63} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 13 \\ -4 \end{pmatrix} \right\| = \frac{2}{63} \cdot \sqrt{2^2 + 13^2 + (-4)^2} = \frac{2 \cdot \sqrt{21}}{21},$$

wobei $\|\cdot\|$ die „Euklidische Norm“ bezeichnet.

Aufgabe 112: (Schnittwinkel zweier Ebenen. 0 Bonuspunkte)
Bestimme den Schnittwinkel der beiden Ebenen

$$E_1 := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

und

$$E_2 := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}; \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}.$$

Es muss nicht nachgewiesen werden, dass die Ebenen sich schneiden.

Musterlösung:
Die zentrale Beobachtung ist, dass der Winkel, in dem sich E_1 und E_2 schneiden, genau dem Winkel zwischen den Normalenvektoren der Ebenen entspricht. Wir berechnen daher zunächst einen Normalenvektor jeder Ebene mit Hilfe des Kreuzprodukts. Ein Normalenvektor von E_1 ist

$$\vec{n_1} := \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix},$$

ein Normalenvektor von E_2 ist

$$\vec{n_2} := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Der Schnittwinkel φ zwischen E_1 und E_2 ist nach Vorlesung gegeben durch

$$\cos\varphi = \frac{\vec{n_1} \cdot \vec{n_2}}{\|\vec{n_1}\| \cdot \|\vec{n_2}\|} = \frac{-14}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{19}},$$

also $\varphi = \pi - \arccos(\frac{14}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{19}}) \approx 2.6029$.
