Ü b u n g s b l a t t 12

Abgabe von $*$–Aufgaben am 22.1.2004 in der Übung.

Aufgabe 98: (Fourier-Entwicklung, 0 Bonuspunkte)
Lies (in Ruhe) und verstehe das Kapitel 11 des Skripts (Fourier-Entwicklung).

Aufgabe 99*: (Die Cauchy–Schwarzsche Ungleichung. 10 Bonuspunkte)
Beweise

$$|\langle f, g\rangle|^2 \leq \langle f, f\rangle \cdot \langle g, g\rangle$$

für beliebiges f, g in einem Raum mit Skalarprodukt. Wann gilt das Gleichheitszeichen?
Anleitung: Starte mit $0 \leq \langle f - \alpha \cdot g, f - \alpha \cdot g\rangle$ und wähle ein geeignetes $\alpha \in \mathbb{C}$.

Musterlösung:
Für jedes Skalarprodukt gilt

$$0 \leq \langle f - \alpha \cdot g, f - \alpha \cdot g\rangle = \langle f, f\rangle - \alpha \cdot \langle f, g\rangle - \overline{\alpha} \cdot \langle g, f\rangle + \overline{\alpha} \cdot \alpha \cdot \langle g, g\rangle$$

für jedes f, g und jedes $\alpha \in \mathbb{C}$. Für $g = 0$ ist Cauchy–Schwarz sicherlich erfüllt, betrachte also $g \neq 0$.
Für den Wert

$$\alpha = \frac{\langle g, f\rangle}{\langle g, g\rangle}, \quad \text{also} \quad \overline{\alpha} = \frac{\langle f, g\rangle}{\langle g, g\rangle}$$

folgt

$$0 \leq \langle f, f\rangle - \frac{\langle g, f\rangle}{\langle g, g\rangle} \cdot \langle f, g\rangle - \frac{\langle f, g\rangle}{\langle g, g\rangle} \cdot \langle g, f\rangle + \frac{\langle f, g\rangle \cdot \langle g, f\rangle}{\langle g, g\rangle^2} \cdot \langle g, g\rangle = \langle f, f\rangle - \frac{\langle f, g\rangle \cdot \langle g, f\rangle}{\langle g, g\rangle}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{|\langle f, g\rangle|^2}{\langle g, g\rangle} \leq \langle f, f\rangle \qquad \Rightarrow \qquad |\langle f, g\rangle|^2 \leq \langle f, f\rangle \cdot \langle g, g\rangle.$$

Das Gleichheitszeichen gilt genau dann, wenn

$$f - \alpha \cdot g = 0$$

gilt, d.h., wenn f und g proportional sind.

Aufgabe 100: (Skalarprodukte auf Funktionenräumen. 0 Bonuspunkte)
Berechne den Abstand zwischen den Funktionen $f(x) = x$ und $g(x) = \sin(x)$ bezüglich der vom Skalarprodukt $\langle f, g\rangle = \int_0^\pi f(x) \cdot g(x)\, dx$ erzeugten Norm.

Musterlösung:

```
2.5.0 > sqrt(int((x - sin(x))^2, x = 0..PI))

                         /   3        \1/2
                         | PI    3 PI |
                         | --- - ---- |
                         \  3      2  /

2.5.0 > float(%)
                             2.371294284
```

Aufgabe 101*: (Bestapproximation. 10 Bonuspunkte)
Sei $\{f_0, f_1, \dots\}$ ein Orthogonalsystem auf einem Hilbert-Raum L. Zu $f \in L$ seien

$$c_k = \frac{\langle f_k, f\rangle}{\langle f_k, f_k\rangle}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

die dem Orthogonalsystem zugeordneten Fourier-Koeffizienten. Zeige: Für jede Wahl von Koeffizienten $\alpha_k \in \mathbb{C}$ gilt die **"allgemeine Besselsche Gleichung"**

$$\left\| f - \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \cdot f_k \right\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \sum_{k=0}^{n} |c_k|^2 \cdot \|f_k\|_2^2 + \sum_{k=0}^{n} |\alpha_k - c_k|^2 \cdot \|f_k\|_2^2.$$

Folgere: Der Abstand zwischen f und $\sum_{k=0}^{n} \alpha_k \cdot f_k$ wird minimal, wenn man $\alpha_k = c_k$ wählt.

Musterlösung:

$$\begin{aligned}
&\langle f - \textstyle\sum_i \alpha_i \cdot f_i, f - \sum_j \alpha_j \cdot f_j\rangle \\
&= \langle f, f\rangle - \textstyle\sum_i \overline{\alpha_i} \cdot \langle f_i, f\rangle - \sum_j \alpha_j \cdot \langle f, f_j\rangle + \sum_i \sum_j \overline{\alpha_i} \cdot \alpha_j \cdot \langle f_i, f_j\rangle \\
&= \langle f, f\rangle - \textstyle\sum_k \overline{\alpha_k} \cdot \langle f_k, f\rangle - \sum_k \alpha_k \cdot \langle f, f_k\rangle + \sum_k \overline{\alpha_k} \cdot \alpha_k \cdot \langle f_k, f_k\rangle \\
&= \langle f, f\rangle - \textstyle\sum_k \overline{\alpha_k} \cdot c_k \cdot \langle f_k, f_k\rangle - \sum_k \alpha_k \cdot \overline{c_k} \cdot \langle f_k, f_k\rangle + \sum_k \overline{\alpha_k} \cdot \alpha_k \cdot \langle f_k, f_k\rangle \\
&= \langle f, f\rangle - \textstyle\sum_k \overline{c_k} \cdot c_k \cdot \langle f_k, f_k\rangle + \sum_k \Big(\overline{c_k} \cdot c_k - \overline{\alpha_k} \cdot c_k - \alpha_k \cdot \overline{c_k} + \overline{\alpha_k} \cdot \alpha_k\Big) \cdot \langle f_k, f_k\rangle \\
&= \langle f, f\rangle - \textstyle\sum_k \overline{c_k} \cdot c_k \cdot \langle f_k, f_k\rangle + \sum_k \overline{(c_k - \alpha_k)} \cdot (c_k - \alpha_k) \cdot \langle f_k, f_k\rangle \\
&= \|f, f\|_2^2 - \textstyle\sum_k |c_k|^2 \cdot \langle f_k, f_k\rangle + \sum_k |c_k - \alpha_k|^2 \cdot \langle f_k, f_k\rangle.
\end{aligned}$$

Nur die letzte Summe hängt von den α_k ab. Sie wird offensichtlich genau für $\alpha_k = c_k$ minimal (nämlich 0).

Aufgabe 102*: (Approximation durch einfache Basisfunktionen. 10 + 10 + 0 Bonuspunkte)
Betrachte den Raum der stetigen reellwertigen Funktionen über dem Intervall $[-1, 1]$ mit dem Skalarprodukt

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x) \cdot g(x)\, dx.$$

a) Verifiziere, dass die Funktionen $f_0(x) = 1$, $f_1(x) = x$, $f_2(x) = \cos(\pi \cdot x)$ orthogonal sind.

b) Berechne die Koeffizienten c_0, c_1, c_2, die den Abstand zwischen der Funktion $f(x) = e^{-x}$ und

$$S(x) = c_0 + c_1 \cdot x + c_2 \cdot \cos(\pi \cdot x)$$

minimieren. (Siehe Aufgabe 101.)

c) Plotte $f(x)$ und $S(x)$ in einer gemeinsamen Graphik.

Es sind etliche Integrale zu berechnen, für die sich MuPAD anbietet. Relevante MuPAD–Funktionen und Objekte: `sin, cos, exp, PI, int, plotfunc2d`.

Musterlösung:
Zur Berechnung wird MuPAD benutzt:
a) Die Entwicklungsfunktionen werden definiert

```
2.5.0 > F[0]:= 1:
2.5.0 > F[1]:= x:
2.5.0 > F[2]:= cos(PI*x):
```

Aus Bequemlichkeit definieren wir das Skalarprodukt als Prozedur `sp` und lassen MuPAD die Skalarprodukte zwischen den 3 Basisfunktionen `F[k]` berechnen. Sie stellen sich in der Tat als orthogonal heraus:

```
2.5.0 > sp:= (f, g) -> int(f*g, x = -1..1):
2.5.0 > sp(F[0], F[1])
                                        0
2.5.0 > sp(F[0], F[2])
                                        0
2.5.0 > sp(F[1], F[2])
                                        0
```

b) Die zu entwickelnde Funktion `f` wird definiert. Die Fourier–Approximation ist durch die Koeffizienten $c_k = \langle f_k, f\rangle / \langle f_k, f_k\rangle$ gegeben:

```
2.5.0 > f:= exp(-x):
2.5.0 > c[0]:= sp(F[0], f) / sp(F[0], F[0])

                        exp(1)   exp(-1)
                        ------ - -------
                          2         2

2.5.0 > c[1]:= sp(F[1], f) / sp(F[1], F[1])

                                 -3 exp(-1)


2.5.0 > c[2]:= sp(F[2], f) / sp(F[2], F[2])

                         1                      1
                ------------------- - ---------------------
                           2                      2
                exp(1) + PI  exp(1)   exp(-1) + PI  exp(-1)
```

Die Fourier–Approximation:

```
2.5.0 > S:=  c[0]*F[0] + c[1]*F[1] + c[2]*F[2]

exp(1)   exp(-1)
------ - ------- - 3 x exp(-1) -
  2         2

             /          1                      1           \
   cos(PI x) | --------------------- - ------------------- |
             |            2                      2         |
             \ exp(-1) + PI  exp(-1)   exp(1) + PI  exp(1) /
```

c) Die Graphik zeigt, dass die Approximation von `f` durch `S` recht gut ist, obwohl nur 3 Basisfunktionen benutzt wurden:

```
2.5.0 > plotfunc2d(f, S, x = -1..1)
```

Aufgabe 103*: (Vollständige Orthonormalsysteme. 10 Bonuspunkte)
Sei $\{f_0, f_1, \ldots\}$ ein vollständiges Ortho<u>normal</u>system in einem Hilbertraum L. Zeige:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \langle f, f_k \rangle \cdot \langle f_k, g \rangle = \langle f, g \rangle$$

für alle $f, g \in L$. (Physiker schreiben dies auch als: $\sum_{k=0}^{\infty} |f_k\rangle \cdot \langle f_k| = \text{Identität.}$)

Anleitung: betrachte $\langle f - \sum_{k=0}^{n} \langle f_k, f \rangle \cdot f_k,\ g - \sum_{j=0}^{n} \langle f_j, g \rangle \cdot f_j \rangle$.

Musterlösung:
Der Abstand zwischen $\langle f, g \rangle$ und $\sum_k \langle f, f_k \rangle \cdot \langle f_k, g \rangle$ wird auf den Abstand zwischen f, g und den entsprechenden endlichen Fourier–Approximationen zurückgeführt:

$$\langle f - \sum_{k=0}^{n} \langle f_k, f \rangle \cdot f_k,\ g - \sum_{j=0}^{n} \langle f_j, g \rangle \cdot f_j \rangle$$

$$= \langle f, g \rangle - \langle f,\ \textstyle\sum_j \langle f_j, g \rangle \cdot f_j \rangle - \langle \sum_k \langle f_k, f \rangle \cdot f_k,\ g \rangle + \langle \sum_k \langle f_k, f \rangle \cdot f_k,\ \sum_j \langle f_j, g \rangle \cdot f_j \rangle$$

$$= \langle f, g \rangle - \textstyle\sum_j \langle f_j, g \rangle \cdot \langle f, f_j \rangle - \sum_k \overline{\langle f_k, f \rangle} \cdot \langle f_k, g \rangle + \sum_k \sum_j \overline{\langle f_k, f \rangle} \cdot \langle f_j, g \rangle \cdot \underbrace{\langle f_k, f_j \rangle}_{\delta_{kj}}$$

$$= \langle f, g \rangle - \textstyle\sum_j \langle f_j, g \rangle \cdot \langle f, f_j \rangle - \sum_k \langle f, f_k \rangle \cdot \langle f_k, g \rangle + \sum_k \langle f, f_k \rangle \cdot \langle f_k, g \rangle$$

$$= \langle f, g \rangle - \sum_{k=0}^{n} \langle f, f_k \rangle \cdot \langle f_k, g \rangle.$$

Mit Cauchy-Schwarz folgt

$$|\langle f, g \rangle - \sum_{k=0}^{n} \langle f, f_k \rangle \cdot \langle f_k, g \rangle| \leq \|f - \sum_{k=0}^{n} \langle f_k, f \rangle \cdot f_k\|_2 \cdot \|g - \sum_{k=0}^{n} \langle f_k, g \rangle \cdot f_k\|_2.$$

Wegen der Vollständigkeit konvergiert die rechte Seite gegen Null für $n \to \infty$.

Aufgabe 104*: (Einige Fourier–Reihen. 10 Bonuspunkte)
Bestimme die Fourier–Reihen bzgl. der trigonometrischen Funktionen für die folgenden auf $(-\pi, \pi]$ definierten Funktionen:

$$a) \quad f(x) = \begin{cases} -1 & \text{für } x \in (-\pi, 0), \\ 1 & \text{für } x \in [0, \pi], \end{cases} \qquad b) \quad f(x) = x\ , \quad c) \quad f(x) = \pi - |x|.$$

Beachte Bemerkung 11.25 des Skripts.

Musterlösung:
a) Die Funktion ist ungerade, also brauchen nur die Koeffizienten vor den sin–Termen bestimmt werden:

$$b_k = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \sin(k \cdot x)\, dx = \frac{2}{\pi} \cdot \int_{0}^{\pi} f(x) \cdot \sin(k \cdot x)\, dx = \frac{2}{\pi} \cdot \int_{0}^{\pi} \sin(k \cdot x)\, dx$$

$$= \frac{2}{\pi} \cdot \Big[- \frac{\cos(k \cdot x)}{k} \Big]_{x=0}^{x=\pi} = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1-(-1)^k}{k} = \begin{cases} \frac{4}{k \cdot \pi}, & \text{falls } k \text{ ungerade,} \\ 0, & \text{falls } k \text{ gerade.} \end{cases}$$

Ergebnis:

$$f(x) \;\sim\; \frac{4}{\pi} \cdot \Big(\frac{\sin(x)}{1} + \frac{\sin(3 \cdot x)}{3} + \frac{\sin(5 \cdot x)}{5} + \frac{\sin(7 \cdot x)}{7} + \cdots \Big).$$

b) Die Funktion ist wieder ungerade, also brauchen nur die Koeffizienten vor den sin–Termen bestimmt werden:

$$b_k = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \sin(k \cdot x)\, dx = \frac{2}{\pi} \cdot \int_{0}^{\pi} f(x) \cdot \sin(k \cdot x)\, dx = \frac{2}{\pi} \cdot \int_{0}^{\pi} x \cdot \sin(k \cdot x)\, dx$$

Aus Bequemlichkeit wird MuPAD zum Integrieren benutzt:

```
2.5.0 > assume(k <> 0):
2.5.0 > b[k]:= 2/PI*int(x*sin(k*x), x = 0..PI)

                  / sin(PI k)   PI cos(PI k) \
                2 | --------- - ------------ |
                  |     2            k       |
                  \    k                     /
                ------------------------------
                              PI

2.5.0 > assume(k, Type::Integer)
2.5.0 > simplify(b[k])
                              k + 1
                        2 (-1)
                        -----------
                             k
```

Ergebnis:

$$f(x) \;\sim\; 2 \cdot \Big(\frac{\sin(x)}{1} - \frac{\sin(2 \cdot x)}{2} + \frac{\sin(3 \cdot x)}{3} - \frac{\sin(4 \cdot x)}{4} \pm \cdots \Big)$$

c) Die Funktion ist gerade, also brauchen nur die Koeffizienten vor den cos–Termen bestimmt werden:

$$a_k = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \cos(k \cdot x)\, dx = \frac{2}{\pi} \cdot \int_{0}^{\pi} f(x) \cdot \cos(k \cdot x)\, dx = \frac{2}{\pi} \cdot \int_{0}^{\pi} (\pi - x) \cdot \cos(k \cdot x)\, dx$$

Aus Bequemlichkeit wird MuPAD zum Integrieren benutzt:

```
2.5.0 > assume(k <> 0):
2.5.0 > a[k]:= 2/PI*int((PI - x)*cos(k*x), x = 0..PI)

                        / cos(PI k)    1 \
                      2 | --------- - -- |
```

```
         |      2       2 |
         \     k       k  /
       - --------------------
                  PI
```

```
2.5.0 > assume(k, Type::Integer)
2.5.0 > simplify(a[k])
                       k
                2 ((-1)  - 1)
              - -------------
                          2
                      PI k
```

Zusätzlich a_0:

```
2.5.0 > a[0]:= 1/PI*int(PI - x, x = 0..PI)

                          PI
                          --
                           2
```

Ergebnis:

$$f(x) \ \sim \ \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi} \cdot \Big(\frac{\cos(x)}{1^2} + \frac{\cos(3 \cdot x)}{3^2} + \frac{\cos(5 \cdot x)}{5^2} + \frac{\cos(7 \cdot x)}{7^2} + \cdots \Big).$$

Anmerkung: nach Beispiel 11.26.b) des Skripts gilt

$$|x| \ \sim \ \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \cdot \Big(\frac{\cos(x)}{1^2} + \frac{\cos(3 \cdot x)}{3^2} + \frac{\cos(5 \cdot x)}{5^2} + \frac{\cos(7 \cdot x)}{7^2} + \cdots \Big).$$

Hiermit folgt sofort

$$\pi - |x| \ \sim \ \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi} \cdot \Big(\frac{\cos(x)}{1^2} + \frac{\cos(3 \cdot x)}{3^2} + \frac{\cos(5 \cdot x)}{5^2} + \frac{\cos(7 \cdot x)}{7^2} + \cdots \Big).$$

Aufgabe 105*: (10 Bonuspunkte)

a) Zeige: $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

b) Identifiziere den Reihenwert $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2}$.

Anleitung zu a) und b): Betrachte die Fourier–Entwicklung von $f(x) = |x| \cdot (\pi - |x|)$ ($|x| \leq \pi$) und werte an geeigneten Punkten aus.

Musterlösung:
Die Funktion ist gerade, die Fourier–Koeffizienten

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} f(x) \, dx = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} x \cdot (\pi - x) \, dx,$$

$$a_k = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} f(x) \cdot \cos(k \cdot x) \, dx = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} x \cdot (\pi - x) \cdot \cos(k \cdot x) \, dx \quad (k > 0)$$

ergeben sich mit MuPAD zu:

```
>> a[0]:= 1/PI*int(x*(PI - x), x = 0..PI)

                              2
                            PI
                            ---
                             6

>> assume(k <> 0):
>> a[k]:= 2/PI*int(x*(PI - x)*cos(k*x), x = 0..PI);

              / 2 sin(k PI) - k PI cos(k PI)   PI \
            2 | ---------------------------- - -- |
              |              3                  2 |
              \             k                  k  /
            --------------------------------------
                              PI

>> assume(k, Type::Integer):
>> simplify(a[k]):
                                         k
                    2 (- k PI - k PI (-1) )
                    -----------------------
                              3
                             k  PI
>> factor(%);

                                k
                       (-2) ((-1)  + 1)
                       ----------------
                               2
                              k
```

Für ungerades k verschwinden diese Koeffizienten. Ergebnis:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\pi^2}{6} - 4 \cdot \Big(\frac{\cos(2 \cdot x)}{2^2} + \frac{\cos(4 \cdot x)}{4^2} + \frac{\cos(6 \cdot x)}{6^2} + \cdots \Big) \\ &= \frac{\pi^2}{6} - \Big(\frac{\cos(2 \cdot x)}{1^2} + \frac{\cos(4 \cdot x)}{2^2} + \frac{\cos(6 \cdot x)}{3^2} + \cdots \Big). \end{aligned}$$

Da die Funktion stetig und überall beidseitig differenzierbar ist, stellt nach dem Dirichlet–Kriterium die Fourier–Reihe die Funktion an jedem Punkt dar. Für $x = 0$ folgt:

$$\frac{\pi^2}{6} - \Big(\frac{\cos(2 \cdot 0)}{1^2} + \frac{\cos(4 \cdot 0)}{2^2} + \frac{\cos(6 \cdot 0)}{3^2} + \cdots \Big) = \boxed{\frac{\pi^2}{6} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 0} = f(0).$$

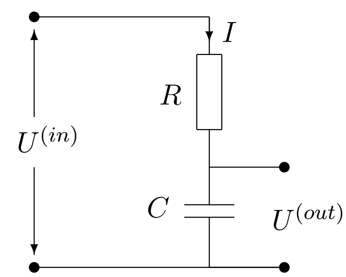
Für $x = \frac{\pi}{2}$ folgt weiterhin

$$f\Big(\frac{\pi}{2}\Big) = \frac{\pi}{2} \cdot \Big(\pi - \frac{\pi}{2}\Big) = \frac{\pi^2}{4}$$

$$= \frac{\pi^2}{6} - \Big(\frac{\cos(\pi)}{1^2} + \frac{\cos(2 \cdot \pi)}{2^2} + \frac{\cos(3 \cdot \pi)}{3^2} + \cdots \Big) = \frac{\pi^2}{6} - \Big(-\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} \pm \cdots \Big)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi^2}{6} = \boxed{\frac{\pi^2}{12} = \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} \mp \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2}.}$$

Aufgabe 106*: (Eine Anwendung. 10 + 10 Bonuspunkte)
Gegeben sei ein sogenanntes "RC-Glied", das aus einem Ohmschen Widerstand R und einem Kondensator der Kapazität C besteht. Es wird eine periodische Eingangsspannung $U^{(in)}(t)$ angelegt, man interessiert sich für die Ausgangsspannung $U^{(out)}(t)$ am Kondensator. Es gilt $U^{(in)} = R \cdot I + U^{(out)}$, wobei die Stromstärke I über $I = \dot{Q} = C \cdot \dot{U}^{(out)}$ mit der Ladung $Q = C \cdot U$ des Kondensators zusammenhängt. Damit ist das Ausgangssignal gegeben als Lösung der Differentialgleichung



$$\tau \cdot \dot{U}^{(out)} + U^{(out)} = U^{(in)} \quad (\text{mit } \tau = R \cdot C).$$

a) Zeige: für ein Fourier–entwickeltes Eingangssignal

$$U^{(in)}(t) = a_0^{(in)} + \sum_{k=1}^{\infty} \Big(a_k^{(in)} \cdot \cos(k \cdot t) + b_k^{(in)} \cdot \sin(k \cdot t) \Big)$$

ergibt sich die Fourier–Entwicklung des periodischen Anteils des Ausgangssignals zu

$$U_{periodic}^{(out)}(t) = a_0^{(out)} + \sum_{k=1}^{\infty} \Big(a_k^{(out)} \cdot \cos(k \cdot t) + b_k^{(out)} \cdot \sin(k \cdot t) \Big)$$

mit

$$a_0^{(out)} = a_0^{(in)}, \quad a_k^{(out)} = \frac{a_k^{(in)} - k \cdot \tau \cdot b_k^{(in)}}{1 + k^2 \cdot \tau^2}, \quad b_k^{(out)} = \frac{b_k^{(in)} + k \cdot \tau \cdot a_k^{(in)}}{1 + k^2 \cdot \tau^2} \quad (k > 0).$$

Anleitung: Rechentechnisch ist es einfacher, die "komplexen" Entwicklungen

$$U^{(in)}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k^{(in)} \cdot e^{i \cdot k \cdot t}, \quad U^{(out)}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k^{(out)} \cdot e^{i \cdot k \cdot t}$$

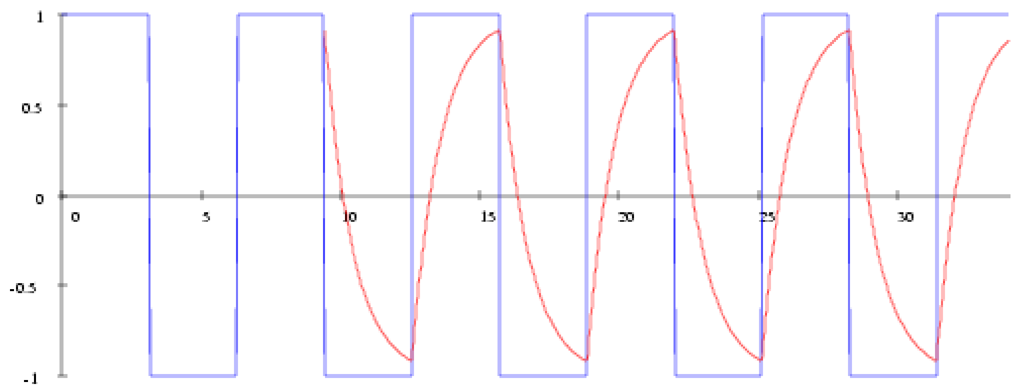
zu betrachten. Es ergibt sich: $c_k^{(out)} = \dfrac{c_k^{(in)}}{1 + i \cdot k \cdot \tau}$, $k \in \mathbb{Z}$.

b) Als Eingangssignal wird eine periodische Rechteckschwingung der Grundform

$$U^{(in)}(t) = \begin{cases} -1 & \text{für } t \in (-\pi, 0), \\ 1 & \text{für } t \in [0, \pi) \end{cases}$$

angelegt. Berechne die Fourier-Darstellung des Ausgangssignal nach langer Zeit (dann sind abgedämpfte Anteile verschwunden und das Ausgangssignal ist periodisch).

Hier ist die graphische Antwort zu b) (mit $\tau = 1$):



Musterlösung:

a) Die Fourier–Entwicklung $U^{(in)}(t) = \sum_k c_k^{(in)} \cdot e^{i\cdot k\cdot t}$ und der Ansatz $U_{periodic}^{(out)}(t) = \sum_k c_k^{(out)} \cdot e^{i\cdot k\cdot t}$ werden in die DGL

$$\tau \cdot \dot{U}^{(out)} + U^{(out)} = U^{(in)}$$

eingesetzt:

$$\tau \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k^{(out)} \cdot i \cdot k \cdot e^{i\cdot k\cdot t} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k^{(out)} \cdot e^{i\cdot k\cdot t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k^{(in)} \cdot e^{i\cdot k\cdot t}$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k^{(out)} \cdot (i \cdot k \cdot \tau + 1) \cdot e^{i\cdot k\cdot t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k^{(in)} \cdot e^{i\cdot k\cdot t}.$$

Vergleich der Koeffizienten links und rechts liefert $c_k^{(out)} \cdot (i \cdot k \cdot \tau + 1) = c_k^{(in)}$. Fertig. Mit

$$c_k^{(in)} = \frac{a_k^{(in)} - i \cdot b_k^{(in)}}{2}, \quad c_{-k}^{(in)} = \frac{a_k^{(in)} + i \cdot b_k^{(in)}}{2},$$

und

$$a_k^{(out)} = c_k^{(out)} + c_{-k}^{(out)}, \quad b_k^{(out)} = i \cdot (c_k^{(out)} - c_{-k}^{(out)})$$

ergeben sich die Koeffizienten der den komplexen exp-Funktionen entsprechenden cos- bzw. sin-Termen. Mit $c_k^{(out)} = c_k^{(in)}/(1 + i \cdot k \cdot \tau)$ findet man nach elementarer Rechnung

$$a_k^{(out)} = \frac{a_k^{(in)} - k \cdot \tau \cdot b_k^{(in)}}{1 + k^2 \cdot \tau^2}, \quad b_k^{(out)} = \frac{b_k^{(in)} + k \cdot \tau \cdot a_k^{(in)}}{1 + k^2 \cdot \tau^2}$$

für $k > 0$.

b) Die Fourier–Entwicklung der Rechteckschwingung $U^{(in)}$ berechnet sich zu

$$U^{(in)}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k^{(in)} \cdot \sin(k \cdot t)$$

mit

$$b_k^{(in)} = \frac{2 \cdot (1 - (-1)^k)}{\pi \cdot k} = \begin{cases} 0 & \text{für } k = 2, 4, 6, \ldots, \\ \frac{4}{\pi} \cdot \frac{1}{k} & \text{für } k = 1, 3, 5, \ldots. \end{cases}$$

Nach a) hat der periodische Teil des Ausgangssignals

$$U_{periodic}^{(out)}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k^{(out)} \cdot \cos(k \cdot t) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k^{(out)} \cdot \sin(k \cdot t)$$

die Fourier-Koeffizienten

$$a_k^{(out)} = \frac{a_k^{(in)} - k \cdot \tau \cdot b_k^{(in)}}{1 + k^2 \cdot \tau^2} = \frac{0 - k \cdot \tau \cdot \frac{4}{\pi} \cdot \frac{1}{k}}{1 + k^2 \cdot \tau^2} = -\frac{4}{\pi} \cdot \frac{\tau}{1 + k^2 \cdot \tau^2} \quad \text{für } k = 1, 3, 5, \ldots$$

bzw. $a_k^{(out)} = 0$ für $k = 0, 2, 4, \ldots$ und

$$b_k^{(out)} = \frac{b_k^{(in)} + k \cdot \tau \cdot a_k^{(in)}}{1 + k^2 \cdot \tau^2} = \frac{\frac{4}{\pi} \cdot \frac{1}{k} + 0}{1 + k^2 \cdot \tau^2} \quad \text{für } k = 1, 3, 5, \ldots$$

bzw. $b_k^{(out)} = 0$ für $k = 2, 4, 6, \ldots$. Also hat man als Ausgangssignal

$$\boxed{U_k^{(out)}(t) = -\sum_{k=1,3,5,\ldots} \frac{4}{\pi} \cdot \frac{\tau \cdot \cos(k \cdot t)}{1 + k^2 \cdot \tau^2} + \sum_{k=1,3,5,\ldots} \frac{4}{\pi} \cdot \frac{\sin(k \cdot t)}{k \cdot (1 + k^2 \cdot \tau^2)}.}$$

Anmerkung: diese Fourier-Reihe hat eine explizite Darstellung, nämlich:

$$U_k^{(out)}(t) = \begin{cases} -1 + \dfrac{2 \cdot e^{-t/\tau}}{1 + e^{\pi/\tau}} & \text{für } t \in (-\pi, 0), \\ 1 - \dfrac{2 \cdot e^{\pi/\tau} \cdot e^{-t/\tau}}{1 + e^{\pi/\tau}} & \text{für } t \in [0, \pi]. \end{cases}$$

In der Tat sind die Fourier-Koeffizienten dieser Funktion

$$a_k^{(out)} = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} U_k^{(out)}(t) \cdot \cos(k \cdot t)\, dt$$

$$= \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{0} U_k^{(out)}(t) \cdot \cos(k \cdot t)\, dt + \frac{1}{\pi} \cdot \int_{0}^{\pi} U_k^{(out)}(t) \cdot \cos(k \cdot t)\, dt$$

$$= \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{0} \Big(-1 + \frac{2 \cdot e^{-t/\tau}}{1 + e^{\pi/\tau}} \Big) \cdot \cos(k \cdot t)\, dt + \frac{1}{\pi} \cdot \int_{0}^{\pi} \Big(1 - \frac{2 \cdot e^{\pi/\tau} \cdot e^{-t/\tau}}{1 + e^{\pi/\tau}} \Big) \cdot \cos(k \cdot t)\, dt$$

$$= -2 \cdot \tau \cdot \frac{1 - (-1)^k}{\pi \cdot (1 + k^2 \cdot \tau^2)} = \begin{cases} -\dfrac{4}{\pi} \cdot \dfrac{\tau}{1 + k^2 \cdot \tau^2} & \text{für } k = 1, 3, 5, \ldots, \\ 0 & \text{für } k = 0, 2, 4, \ldots \end{cases}$$

und

$$b_k^{(out)} = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} U_k^{(out)}(t) \cdot \sin(k \cdot t)\, dt$$

$$= \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{0} U_k^{(out)}(t) \cdot \sin(k \cdot t)\, dt + \frac{1}{\pi} \cdot \int_{0}^{\pi} U_k^{(out)}(t) \cdot \sin(k \cdot t)\, dt$$

$$= \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{0} \Big(-1 + \frac{2 \cdot e^{-t/\tau}}{1 + e^{\pi/\tau}} \Big) \cdot \sin(k \cdot t)\, dt + \frac{1}{\pi} \cdot \int_{0}^{\pi} \Big(1 - \frac{2 \cdot e^{\pi/\tau} \cdot e^{-t/\tau}}{1 + e^{\pi/\tau}} \Big) \cdot \sin(k \cdot t)\, dt$$

$$= 2 \cdot \frac{1 - (-1)^k}{\pi \cdot k \cdot (1 + k^2 \cdot \tau^2)} = \begin{cases} \dfrac{4}{\pi} \cdot \dfrac{1}{k \cdot (1 + k^2 \cdot \tau^2)} & \text{für } k = 1, 3, 5, \ldots, \\ 0 & \text{für } k = 2, 4, 6, \ldots. \end{cases}$$