Ü b u n g s b l a t t 11

Abgabe von $*$–Aufgaben am 15.1.2004 in der Übung.

Aufgabe 91*: (Differentialgleichungen, Separation. 10 Bonuspunkte)
Finde alle 'isoelastischen' Funktionen, d.h., bestimme die allgemeine Form der Funktionen $f(x)$, die die Eigenschaft haben, dass die „Elastizität“

$$\epsilon_{f,x}(x) = \frac{f'(x) \cdot x}{f(x)}$$

konstant ist.

Musterlösung:
Setzen wir die Elastizität gleich einer Konstanten ϵ, so ergibt sich eine Differentialgleichung für f:

$$\epsilon_{f,x}(x) = \frac{f'(x) \cdot x}{f(x)} = \epsilon \quad \Rightarrow \quad \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{\epsilon}{x}.$$

Mit $y = f(x)$, $f'(x) = \frac{dy}{dx}$ lassen sich die Variablen sofort trennen:

$$\frac{\frac{dy}{dx}}{y} = \frac{\epsilon}{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{y} = \frac{\epsilon}{x}\,dx \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dy}{y} = \int \frac{\epsilon}{x}\,dx$$

$$\Rightarrow \quad \ln(|y|) = \epsilon \ln(|x|) + \tilde{c} \quad \Rightarrow \quad \ln(|y|) = \ln(|x|^\epsilon) + \tilde{c}$$

$$\Rightarrow \quad |y| = e^{\ln(|x|^\epsilon)+\tilde{c}} \quad \Rightarrow \quad y = \underbrace{\pm e^{\tilde{c}}}_{c} \cdot e^{\ln(|x|^\epsilon)}$$

$$\Rightarrow \quad y = c \cdot |x|^\epsilon$$

mit einer beliebigen Konstanten c. Damit ist die allgemeinste Form einer isoelastischen Funktion $f(x) = c \cdot |x|^\epsilon$, wobei ϵ die konstante Elastizität ist.

Aufgabe 92*: (Differentialgleichungen, Separation. 10 Bonuspunkte)

a) Bestimme die allgemeine Lösung der DGL $y' - x^2 \cdot y^2 = 0$.

b) Finde die spezielle Lösung zur Anfangsbedingung $y(1) = 1$.

Musterlösung:
a) Separation:

$$y' - x^2 \cdot y^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = x^2 \cdot y^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{y^2} = x^2\,dx \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dy}{y^2} = \int x^2\,dx$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{1}{y} = \frac{x^3}{3} + \frac{c}{3} \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{3}{x^3 + c}.$$

Hierbei wurde die Integrationskonstante als $\frac{c}{3}$ eingeführt, damit das Ergebnis hübscher aussieht.

b) Anpassen der Konstanten c an die Anfangsbedingung:

$$y(1) = -\frac{3}{1^3 + c} \quad \Rightarrow \quad \frac{-y(1)}{3} = \frac{1}{1+c} \quad \Rightarrow \quad 1 + c = \frac{3}{-y(1)} \quad \Rightarrow \quad c = \frac{3}{-y(1)} - 1.$$

Für $y(1) = 1$ ergibt sich $c = -4$, also ist die spezielle Lösung zu dieser Anfangsbedingung

$$y(x) = -\frac{3}{x-4} = \frac{3}{4-x}.$$

Aufgabe 93*: (Differentialgleichungen, Variation der Konstanten. 10 Bonuspunkte)

a) Bestimme die allgemeine Lösung der DGL $y' - x^2 \cdot y = x^5$.

b) Finde die spezielle Lösung zur Anfangsbedingung $y(1) = 1$.

Musterlösung:
a) Wir brauchen zunächst die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung $y' = x^2 \cdot y$. Wir benutzen direkt die Lösungsformel aus Beispiel 6.16 der Vorlesung:

$$y_h(x) = c \cdot e^{F(x)},$$

wobei $F(x)$ irgendeine Stammfunktion von x^2 ist, also z.B. $F(x) = \frac{x^3}{3}$. Die homogene Lösung ist damit

$$y_h(x) = c \cdot e^{\frac{x^3}{3}}.$$

Nun 'Variation der Konstanten'. Ansatz für die inhomogene DGL:

$$y(x) = c(x) \cdot e^{\frac{x^3}{3}}.$$

In die DGL $y' - x^2 \cdot y = x^5$ eingesetzt ergibt sich

$$c'(x) \cdot e^{\frac{x^3}{3}} + c(x) \cdot x^2 \cdot e^{\frac{x^3}{3}} - x^2 \cdot c(x) \cdot e^{\frac{x^3}{3}} = x^5$$

$$\Rightarrow \quad c'(x) = x^5 \cdot e^{-\frac{x^3}{3}} \quad \Rightarrow \quad c(x) = \int x^5 \cdot e^{-\frac{x^3}{3}} \, dx$$

Es verbleibt, die Stammfunktion von $x^5 \cdot e^{-\frac{x^3}{3}}$ zu finden. Substitution $z = -\frac{x^3}{3}$, $dz = -x^2 \, dx$:

$$\int x^5 \cdot e^{-\frac{x^3}{3}} \, dx = \int x^5 \cdot e^z \, \frac{-dz}{x^2} = \int (-x^3) \cdot e^{-z} \, dz = 3 \cdot \int z \cdot e^z \, dz.$$

Partielle Integration:

$$3 \cdot \int \underbrace{z}_{f} \cdot \underbrace{e^z}_{g'} \, dz = 3 \cdot \underbrace{z}_{f} \cdot \underbrace{e^z}_{g} \; - \; 3 \cdot \int \underbrace{1}_{f'} \cdot \underbrace{e^z}_{g} \, dz = 3 \cdot z \cdot e^z - 3 \cdot e^z + \tilde{c}.$$

Rücksubstitution $z = -\frac{x^3}{3}$:

$$c(x) = \int x^5 \cdot e^{-\frac{x^3}{3}} \, dx = 3 \cdot z \cdot e^z - 3 \cdot e^z = -x^3 \cdot e^{-\frac{x^3}{3}} - 3 \cdot e^{-\frac{x^2}{3}} + \tilde{c}.$$

Die allgemeine Lösung der DGL $y' - x^2 \cdot y = x^5$ ist damit

$$y(x) = c(x) \cdot e^{\frac{x^3}{3}} = \Big(-x^3 \cdot e^{-\frac{x^3}{3}} - 3 \cdot e^{-\frac{x^2}{3}} + \tilde{c} \Big) \cdot e^{\frac{x^3}{3}} = -x^3 - 3 + \tilde{c} \cdot e^{\frac{x^3}{3}}$$

mit einer beliebigen Konstanten $\tilde{c}$.

b) Anpassen der Anfangsbedingung:

$$y(1) = -1^3 - 3 + \tilde{c} \cdot e^{\frac{1^3}{3}} = 1 \quad \Rightarrow \quad \tilde{c} \cdot e^{\frac{1^3}{3}} = 5 \quad \Rightarrow \quad \tilde{c} \cdot 5 \cdot e^{-\frac{1}{3}}.$$

Die spezielle Lösung zu dieser Anfangsbedingung ist damit

$$y(x) = -x^3 - 3 + 5 \cdot e^{-\frac{1}{3}} \cdot e^{\frac{x^3}{3}} = -x^3 - 3 + 5 \cdot e^{\frac{x^3}{3} - \frac{1}{3}} = -x^3 - 3 + 5 \cdot e^{\frac{x^3-1}{3}}.$$

Aufgabe 94*: (Differentialgleichungen, 10 Bonuspunkte)

a) Finde die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $y'(x) + 2 \cdot y(x) = e^x$.

b) Finde die spezielle Lösung zur Anfangsbedingung $y(0) = 1$.

Musterlösung:
a) Löse zunächst die homogene DGL durch Separation:

$$\frac{dy}{dx} + 2 \cdot y(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = -2 \cdot y \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{y} = -2\,dx \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dy}{y} = -\int 2\,dx$$

$$\Rightarrow \quad \ln(|y|) = -2 \cdot x + \tilde{c} \quad \Rightarrow \quad |y| = e^{-2\cdot x + \tilde{c}} \quad \Rightarrow \quad y = \underbrace{\pm e^{\tilde{c}}}_{c} \cdot e^{-2\cdot x} \quad \Rightarrow \quad y = c \cdot e^{-2\cdot x}.$$

Variation der Konstanten: $y(x) = c(x) \cdot e^{-2\cdot x}$ eingesetzt in $y'(x) + 2 \cdot y = x$:

$$\Rightarrow \quad y'(x) + 2 \cdot y(x) = c'(x) \cdot e^{-2\cdot x} + \underbrace{c(x) \cdot (-2 \cdot e^{-2\cdot x}) + 2 \cdot y(x)}_{0} = e^x$$

$$\Rightarrow \quad c'(x) \cdot e^{-2\cdot x} = e^x \quad \Rightarrow \quad c'(x) = e^x \cdot e^{2\cdot x} = e^{3\cdot x} \quad \Rightarrow \quad c(x) = \int e^{3\cdot x}\,dx = \frac{1}{3} \cdot e^{3\cdot x} + c_1.$$

Die allgemeine Lösung der inhomogenen DGL ist damit

$$y(x) = c(x) \cdot e^{-2\cdot x} = \Big(\frac{1}{3} \cdot e^{3\cdot x} + c_1\Big) \cdot e^{-2\cdot x} = \frac{1}{3} \cdot e^x + c_1 \cdot e^{-2\cdot x}$$

(mit einer beliebigen Konstanten c_1).
b) Anpassen der freien Konstanten an die Anfangsbedingung:

$$y(0) = \frac{1}{3} \cdot e^0 + c_1 \cdot e^{-0^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad c_1 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

Die spezielle Lösung zur Anfangsbedingung $y(0) = 1$ ist damit

$$y(x) = \frac{1}{3} \cdot e^x + \frac{2}{3} \cdot e^{-2\cdot x}$$

Kontrolle:

$$y'(x) + 2 \cdot y(x) = \frac{1}{3} \cdot e^x + \frac{2}{3} \cdot (-2 \cdot e^{-2 \cdot x}) + 2 \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot e^x + \frac{2}{3} \cdot e^{-2 \cdot x}\right) = e^x,$$

$$y(0) = \frac{1}{3} \cdot e^0 + \frac{2}{3} \cdot e^{-2 \cdot 0} = 1. \qquad \text{(ok)}$$

Aufgabe 95*: (Differentialgleichungen, 10 Bonuspunkte)

a) Finde die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $y'(x) - \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)} \cdot y(x) = \sin(x)$.

b) Finde die spezielle Lösung zur Anfangsbedingung $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$.

Musterlösung:
a) Löse zunächst die homogene DGL durch Separation:

$$\frac{dy}{dx} - \frac{\cos(x)}{\sin(x)} \cdot y = 0 \;\Rightarrow\; \frac{dy}{dx} = \frac{\cos(x)}{\sin(x)} \cdot y \;\Rightarrow\; \frac{dy}{y} = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}\, dx \;\Rightarrow\; \int \frac{dy}{y} = \int \frac{\cos(x)}{\sin(x)}\, dx.$$

Mit der Substitution $z = \sin(x)$, $dz = \cos(x)\, dx$ ergibt sich

$$\ln(|y|) = \int \frac{1}{z}\, dz = \ln(|z|) + \tilde{c} = \ln(|\sin(x)|) + \tilde{c} \quad \Rightarrow \quad |y| = e^{\ln(|\sin(x)|) + \tilde{c}} = e^{\ln(|\sin(x)|)} \cdot e^{\tilde{c}}$$

$$= |\sin(x)| \cdot e^{\tilde{c}} \quad \Rightarrow \quad y = \underbrace{\pm e^{\tilde{c}}}_{c} \cdot \sin(x) \quad \Rightarrow \quad y = c \cdot \sin(x).$$

Variation der Konstanten: $y(x) = c(x) \cdot \sin(x)$ eingesetzt in $y'(x) - \frac{\cos(x)}{\sin(x)} \cdot y = \sin(x)$:

$$y'(x) - \frac{\cos(x)}{\sin(x)} y = c'(x) \cdot \sin(x) + c(x) \cdot \cos(x) - \frac{\cos(x)}{\sin(x)}\, c(x) \cdot \sin(x) \overset{(!)}{=} \sin(x)$$

$$\Rightarrow \quad c'(x) \cdot \sin(x) = \sin(x) \quad \Rightarrow \quad c'(x) = 1 \quad \Rightarrow \quad c(x) = x + c_1.$$

Die allgemeine Lösung der inhomogenen DGL ist damit

$$y(x) = c(x) \cdot \sin(x) = \boxed{(x + c_1) \cdot \sin(x)} \quad \text{(mit einer beliebigen Konstanten } c_1\text{)}.$$

b) Anpassen der freien Konstanten an die Anfangsbedingung:

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(\frac{\pi}{2} + c_1\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} + c_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad c_1 = -\frac{\pi}{2}.$$

Die spezielle Lösung zur Anfangsbedingung $y(\frac{\pi}{2}) = 0$ ist damit

$$\boxed{y(x) = \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \cdot \sin(x).}$$

Kontrolle: $y'(x) - \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)} \cdot y(x) \;=\; \sin(x) + \left(x - \dfrac{\pi}{2}\right) \cdot \cos(x) - \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)} \cdot \left(x - \dfrac{\pi}{2}\right) \cdot \sin(x) \;=\; \sin(x)$,
$y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{2}\right) \cdot \sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$ (OK).

Aufgabe 96*: (lineare Differentialgleichungen höherer Ordnung, 20 Bonuspunkte)
Bestimme die Lösung der Differentialgleichung

$$y'''(x) - 3 \cdot y''(x) + 4 \cdot y'(x) - 12 \cdot y(x) = \sin(x) + \cos(2 \cdot x)$$

zur Anfangsbedingung $y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$.

Musterlösung:
Das charakteristische Polynom

$$\lambda^3 - 3 \cdot \lambda^2 + 4 \cdot \lambda - 12 = (\lambda - 3) \cdot (\lambda^2 + 4)$$

hat die einfachen Nullstellen $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 2 \cdot i$, $\lambda_3 = -2 \cdot i$. Die allgemeine homogene Lösung ist damit

$$y_{hom}(x) = c_1 \cdot e^{3 \cdot x} + c_2 \cdot e^{i \cdot 2 \cdot x} + c_3 \cdot e^{-i \cdot 2 \cdot x} = C_1 \cdot e^{3 \cdot x} + C_2 \cdot \sin(2 \cdot x) + C_3 \cdot \cos(2 \cdot x).$$

Für die spezielle Lösung der inhomogenen DGL wird der Ansatz

$$y(x) = a \cdot \sin(x) + b \cdot \cos(x) + c \cdot x \cdot \sin(2 \cdot x) + d \cdot x \cdot \cos(2 \cdot x)$$

gemacht (beachte Resonanz für den Term $\cos(2 \cdot x)$). Einsetzen in die inhomogene DGL liefert

$$y'''(x) - 3 \cdot y''(x) + 4 \cdot y'(x) - 12 = \sin(x) + \cos(2 \cdot x)$$

$$= (3 \cdot a - 9 \cdot b) \cdot \cos(x) - (9 \cdot a + 3 \cdot b) \cdot \sin(x) + (12 \cdot d - 8 \cdot c) \cdot \sin(2 \cdot x) - (8 \cdot d + 12 \cdot c) \cdot \cos(2 \cdot x).$$

Vergleich mit der rechten Seite $\sin(x) + \cos(2 \cdot x)$ liefert

$$3 \cdot a - 9 \cdot b = 0, \quad - 9 \cdot a - 3 \cdot b = 1, \; 12 \cdot d - 8 \cdot c = 0, \quad - 8 \cdot d - 12 \cdot c = 1$$

$$\Rightarrow \quad a = -\frac{1}{10}, \; b = -\frac{1}{30}, \; c = -\frac{3}{52}, \; d = -\frac{1}{26}.$$

Die allgemeine Lösung der inhomogenen DGL ist damit

$$y(x) = C_1 \cdot e^{3 \cdot x} + C_2 \cdot \sin(2 \cdot x) + C_3 \cdot \cos(2 \cdot x) - \frac{1}{10} \cdot \sin(x) - \frac{1}{30} \cdot \cos(x) - \frac{3}{52} \cdot \sin(2 \cdot x) - \frac{1}{26} \cdot \cos(2 \cdot x).$$

Anpassen der Anfangsbedingungen:

$$y(0) = C_1 + C_3 - \frac{1}{30} = 0, \; y'(0) = 3 \cdot C_1 + 2 \cdot 2 - \frac{9}{65} = 0, \; y''(0) = 9 \cdot C_1 - 4 \cdot C_3 - \frac{77}{390} = 0.$$

Die Lösung dieses linearen Gleichungssystems für C_1, C_2, C_3 ist (z.B. per MuPAD):

$$C_1 = \frac{43}{1690}, \; C_2 = \frac{21}{676}, \; C_3 = \frac{4}{507},$$

also

$$y(x) = \frac{43}{1690} \cdot e^{3 \cdot x} + \frac{21}{676} \cdot \sin(2 \cdot x) + \frac{4}{507} \cdot \cos(2 \cdot x) - \frac{1}{10} \cdot \sin(x) - \frac{1}{30} \cdot \cos(x) - \frac{3}{52} \cdot \sin(2 \cdot x).$$

Aufgabe 97*: (Differentialgleichungen, 5 + 10 + 5 Bonuspunkte)
a) Betrachte die homogene lineare DGL zweiter Ordnung

$$y''(x) + a_1(x) \cdot y'(x) + a_0(x) \cdot y(x) = 0.$$

Seien y_1 und y_2 zwei Lösungen. Zeige, dass die „Wronski-Determinante“ $W = y_1 \cdot y_2' - y_2 \cdot y_1'$ die lineare DGL erster Ordnung

$$W'(x) = -a_1(x) \cdot W(x)$$

erfüllt.
b) Eine Lösung y_1 der DGL (Schrödinger-Gleichung)

$$y''(x) + u(x) \cdot y(x) = 0$$

(mit einer vorgegebenen Funktion $u(x)$) sei bekannt. Benutze das obige Ergebnis für die Wronski-Determinante, um eine DGL 1-ter Ordnung für eine zweite Lösung y_2 herzuleiten. Drücke y_2 durch y_1 aus (eine Integration ist nötig).
c) Eine erste Lösung y_1 von $y'' = 2 \cdot y/x^2$ ist $y = x^2$. Finde mittels b) eine davon linear unabhängige zweite Lösung.

Musterlösung:
a) Durch Einsetzen der DGL $y'' = -a_1 \cdot y' - a_0 \cdot y$ ergibt sich

$$W' = (y_1 \cdot y_2' - y_2 \cdot y_1')' = y_1 \cdot y_2'' - y_2 \cdot y_1''$$

$$= y_1 \cdot (-a_1 \cdot y_2' - a_0 \cdot y_2) - y_2 \cdot (-a_1 \cdot y_1' - a_0 \cdot y_1) = -a_1 \cdot (y_1 \cdot y_2' - y_2 \cdot y_1') = -a_1 \cdot W.$$

b) Die Lösung der DGL $W' = -a_1 \cdot W$ für die Wronski-Determinante ergibt sich durch Separation der Variablen zu

$$\frac{dW}{W} = -a_1(x) \cdot dx \quad \Rightarrow \quad \ln(|W|) - \ln(|W(x_0)|) = -\int_{x0}^{x} a_1(\xi)\, d\xi$$

$$\Rightarrow \quad W(x) = W(x_0) \cdot e^{-\int_{x0}^{x} a_1(\xi)\, d\xi}$$

(Die Betragszeichen können entfallen, da $W(x)$ nicht das Vorzeichen wechseln kann und das selbe Vorzeichen wie $W(x_0)$ haben muss.) Für die DGL $y'' + u \cdot y = 0$ folgt mit $a_1(x) = 0$:

$$W(x) = \text{const} =: -c.$$

Einsetzen von $W = y_1 \cdot y_2' - y_2 \cdot y_1'$ liefert bei gegebenem y_1 eine DGL erster Ordnung für y_2:

$$y_1 \cdot y_2' - y_2 \cdot y_1' = -c.$$

Nach Division durch y_1^2 erhält man

$$\frac{d}{dx}\,\frac{y_2}{y_1} = \frac{y_2' \cdot y_1 - y_1' \cdot y_2}{y_1^2} = \frac{c}{y_1^2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{y_2(x) = c \cdot y_1(x) \cdot \int^{x} \frac{d\xi}{y_1^2(\xi)}.}$$

c) Aus der obigen Formel für y_2 folgt mit $y_1(x) = x^2$:

$$y_2(x) = c \cdot x^2 \cdot \int^x \frac{d\xi}{\xi^4} = c \cdot x^2 \cdot \Big(-\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x^3} + c_1 \Big) = \underbrace{\frac{-c}{3}}_{C_1} \cdot \frac{1}{x} + \underbrace{c \cdot c_1}_{C_2} \cdot x^2.$$

Damit ist aus einer ersten Lösung $y_1(x) = x^2$ die allgemeine Lösung

$$y(x) = \frac{C_1}{x} + C_2 \cdot x^2$$

mit beliebigen Konstanten C_1, C_2 konstruiert.
