Ü b u n g s b l a t t 10

Abgabe von ∗–Aufgaben am 8.1.2004 in der Übung.

Aufgabe 83*: (Stammfunktionen. Rationale Integranden. 10 + 10 Bonuspunkte)
Bestimme folgende Stammfunktionen:

$$a) \int \frac{2\cdot x}{(x+1)\cdot(x-2)}\,dx, \quad b) \int \frac{x^2+2}{(x-1)\cdot(x-2)}\,dx.$$

Musterlösung:
a) Ansatz

$$\frac{2\cdot x}{(x+1)\cdot(x-2)} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-2} = \frac{a\cdot(x-2)+b\cdot(x+1)}{(x+1)\cdot(x-2)}.$$

Vergleich der Zähler:

$$2\cdot x = a\cdot(x-2)+b\cdot(x+1) = (a+b)\cdot x + (b-2\cdot a).$$

Es folgen die Gleichungen

$$2 = a+b, \quad 0 = b-2\cdot a$$

mit der Lösung $a=\frac{2}{3}$, $b=\frac{4}{3}$. Also:

$$\int \frac{2\cdot x}{(x+1)\cdot(x-2)}\,dx = \int \left(\frac{\frac{2}{3}}{x+1}+\frac{\frac{4}{3}}{x-2}\right)dx = \frac{2}{3}\cdot\ln(|x+1|)+\frac{4}{3}\cdot\ln(|x-2|)+c.$$

b) Zunächst Polynomdivision, um den Zählergrad zu reduzieren. Beachte $(x-1)\cdot(x-2) = x^2-3\cdot x+2$:

$$\begin{array}{l} x^2+2 \quad : \quad x^2-3\cdot x+2 \quad = \quad 1 \\ \underline{x^2-3\cdot x+2} \\ 3\cdot x \end{array}$$

also

$$\frac{x^2+2}{(x-1)\cdot(x-2)} = 1 + \frac{3\cdot x}{(x-1)\cdot(x-2)}.$$

Partialbruchzerlegung des verbleibenden Bruchs:

$$\frac{3\cdot x}{(x-1)\cdot(x-2)} = \frac{a}{x-1}+\frac{b}{x-2} = \frac{a\cdot(x-2)+b\cdot(x-1)}{(x-1)\cdot(x-2)}.$$

Vergleich der Zähler:

$$3\cdot x = a\cdot(x-2)+b\cdot(x-1) = (a+b)\cdot x+(-2\cdot a-b).$$

Es folgen die Gleichungen

$$3 = a+b, \quad 0 = -2\cdot a-b$$

mit der Lösung $a=-3$, $b=6$. Also:

$$\frac{x^2+2}{(x-1)\cdot(x-2)} = 1-\frac{3}{x-1}+\frac{6}{x-2}.$$

Es folgt:

$$\int \frac{x^2+2}{(x-1)\cdot(x-2)}\,dx = \int\left(1-\frac{3}{x-1}+\frac{6}{x-2}\right)dx = x-3\cdot\ln(|x-1|)+6\cdot\ln(|x-2|)+c.$$

Aufgabe 84*: (Stammfunktionen, unbestimmte Integration. 10 Bonuspunkte)
Bestimme $\int \frac{2 \cdot x \cdot \ln(x)}{(x^2-1)^2}\, dx$. Anleitung: zunächst partielle Integration.

Musterlösung:
Partielle Integration:

$$\int \underbrace{\ln(x)}_{f(x)} \cdot \underbrace{\frac{2 \cdot x}{(x^2-1)^2}}_{g'(x)}\, dx = \underbrace{\ln(x)}_{f(x)} \cdot \Big(\underbrace{-\frac{1}{x^2-1}}_{g(x)} \Big) - \int \underbrace{\frac{1}{x}}_{f(x)} \cdot \Big(\underbrace{-\frac{1}{x^2-1}}_{g(x)} \Big)\, dx$$

$$= \frac{\ln(x)}{1-x^2} + \int \frac{1}{x \cdot (x^2-1)}\, dx.$$

Das verbleibende Integral ist durch Partialbruchzerlegung zu berechnen:

$$\frac{1}{x \cdot (x-1) \cdot (x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x+1} = \frac{a \cdot (x^2-1) + b \cdot x \cdot (x+1) + c \cdot x \cdot (x-1)}{x \cdot (x-1) \cdot (x+1)}$$

$$= \frac{a \cdot x^2 - a + b \cdot x^2 + b \cdot x + c \cdot x^2 - c \cdot x}{x \cdot (x-1) \cdot (x+1)} = \frac{(a+b+c) \cdot x^2 + (b-c) \cdot x - a}{x \cdot (x-1) \cdot (x+1)}$$

$$\Rightarrow \quad a+b+c = 0, \quad b-c = 0, \quad -a = 1 \quad \Rightarrow \quad a = -1, \quad b = c = \frac{1}{2}.$$

Also:

$$\int \frac{1}{x \cdot (x^2-1)}\, dx = \int \Big(-\frac{1}{x} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x-1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x+1} \Big)\, dx$$

$$= -\ln(|x|) + \frac{\ln(|x-1|)}{2} + \frac{\ln(|x+1|)}{2} + c.$$

Endergebnis:

$$\int \frac{2 \cdot x \cdot \ln(x)}{(x^2-1)^2}\, dx = \frac{\ln(x)}{1-x^2} - \ln(|x|) + \frac{\ln(|x-1|)}{2} + \frac{\ln(|x+1|)}{2} + c.$$

Aufgabe 85*: (Bestimmte Integrale. 5 + 10 + 10 + 10 Bonuspunkte)
Berechne

$$a) \int_0^{10} \sin(\pi \cdot t)\, dt, \quad b) \int_0^2 t \cdot e^{-t}\, dt, \quad c) \int_0^\pi \cos(t) \cdot e^{\sin^2(t)}\, dt, \quad d) \int_0^1 t \cdot \sqrt{1-t^2}\, dt.$$

Musterlösung:
a) Mit der Stammfunktion

$$\int \sin(\pi \cdot t)\, dt = -\frac{1}{\pi} \cdot \cos(\pi \cdot t) + c$$

folgt sofort

$$\int_0^{10} \sin(\pi \cdot t)\, dt = \left[\frac{-\cos(\pi \cdot t)}{\pi}\right]_{t=0}^{t=10} = \frac{1}{\pi} \cdot \Big(-\cos(10 \cdot \pi) + \cos(0)\Big) = 0.$$

b) Partielle Integration:

$$\int_0^2 \underbrace{t}_{f(t)} \cdot \underbrace{e^{-t}}_{g'(t)}\, dt = \Big[\underbrace{t}_{f(t)} \cdot \underbrace{(-e^{-t})}_{g(t)}\Big]_{t=0}^{t=2} - \int_0^2 \underbrace{1}_{f'(t)} \cdot \underbrace{(-e^{-t})}_{g(t)}\, dt$$

$$= \Big[-t \cdot e^{-t}\Big]_{t=0}^{t=2} + \int_0^2 e^{-t} dt = \Big[-t \cdot e^{-t}\Big]_{t=0}^{t=2} + \Big[-e^{-t}\Big]_{t=0}^{t=2}$$

$$= -2 \cdot e^{-2} - e^{-2} + e^0 = 1 - 3 \cdot e^{-2} \approx 0.594.$$

c) Substitution $y = \sin(t)$, $dy = \cos(t)\, dt$. Transformation der unteren Grenze: $t = 0 \Rightarrow y = \sin(0) = 0$. Transformation der oberen Grenze: $t = \pi \Rightarrow y = \sin(\pi) = 0$. Damit ergibt sich:

$$\int_0^{\pi} \cos(t) \cdot e^{\sin^2(t)}\, dt = \int_0^0 e^{y^2}\, dy.$$

Da die Intervallgrenzen übereinstimmen, ist das Integral 0: wir brauchen die Stammfunktion von e^{y^2} gar nicht zu kennen!

$$\int_0^{\pi} \cos(t) \cdot e^{\sin^2(t)}\, dt = 0.$$

d) Setze $y = 1 - t^2$, $dy/dt = -2 \cdot t$, $dt = -dy/(2 \cdot t)$. Mit $t = 0 \Rightarrow y = 1$, $t = 1 \Rightarrow y = 0$:

$$\int_0^1 t \cdot \sqrt{1 - t^2}\, dt = -\int_1^0 \frac{\sqrt{y}}{2}\, dy = \frac{1}{2} \cdot \int_0^1 y^{1/2} dy = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{y^{3/2}}{3/2}\right]_{y=0}^{y=1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3/2} = \frac{1}{3}.$$

Aufgabe 86*: (Bestimmte Integrale, gerade/ungerade Funktionen. 10 Bonuspunkte)
Eine Funktion mit der Eigenschaft $f(-t) = -f(t)$ heißt **„ungerade“**. Beispiele: $f(t) = t + t^3$, $f(t) = \sin(t)$. Zeige, daß für jede ungerade Funktion f und für jedes $a \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\int_{-a}^{a} f(t)\, dt = 0.$$

Eine Funktion mit der Eigenschaft $f(-t) = f(t)$ heißt **„gerade“**. Beispiele: $f(t) = 1 + t^2$, $f(t) = \cos(t)$. Zeige, daß für jede gerade Funktion f und für jedes $a \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\int_{-a}^{a} f(t)\, dt = 2 \cdot \int_0^a f(t)\, dt.$$

Anleitung: $\int_{-a}^{a} f(t)\, dt = \int_{-a}^{0} f(t)\, dt + \int_0^a f(t)\, dt$. Substituiere $y = -t$ im ersten Integral.

Musterlösung:

$$\int_{-a}^{a} f(t)\,dt = \int_{-a}^{0} f(t)\,dt + \int_{0}^{a} f(t)\,dt.$$

Substituiere $y = -t$ im ersten Integral: $dy = -dt$. Transformation der Grenzen: $t = -a \Rightarrow y = a$, $t = 0 \Rightarrow y = 0$.

$$\begin{aligned}\int_{-a}^{0} f(t)\,dt + \int_{0}^{a} f(t)\,dt &= -\int_{a}^{0} f(-y)\,dy + \int_{0}^{a} f(t)\,dt \\ &= \int_{0}^{a} f(-y)\,dy + \int_{0}^{a} f(t)\,dt = \pm\int_{0}^{a} f(y)\,dy + \int_{0}^{a} f(t)\,dt,\end{aligned}$$

wobei für gerade Funktionen das + Zeichen, für ungerade Funktionen das − Zeichen gilt. Nennt man y wieder in t um:

$$\int_{-a}^{a} f(t)\,dt = \pm\int_{0}^{a} f(t)\,dt + \int_{0}^{a} f(t)\,dt = \begin{cases} 2\cdot\int_{0}^{a} f(t)\,dt & \text{für gerade Funktionen } f, \\ 0 & \text{für ungerade Funktionen } f. \end{cases}$$

Aufgabe 87*: (Bestimmte Integrale. 10 Bonuspunkte)

Man begebe sich ins automatische Abgabe-Tool `bourbaki.upb.de/mfp1`. Diese Aufgabe wird dort als 'Miniprojekt 87' bezeichnet. Es ist dort ein bestimmtes Integral zu berechnen. Liefere den Wert im Web-Formular ab. Anleitung: 2-fache partielle Integration bei einem der Integrale. Es gibt drei Abgabeversuche! Abgaben bis Do, 8.1.04, 23::59::59 Uhr.
Relevante MuPAD-Funktionen zur Kontrolle: `int`.

Musterlösung:
Die generierte Aufgabe lautet: Berechne

$$\int_{0}^{M_3\cdot 2\cdot\pi} \sin\Big((M_1+M_4)\cdot t\Big)\cdot e^{(M_1+M_5)\cdot t}\,dt + \int_{-M_5}^{M_5} t^7\cdot e^{-M_6\cdot t^2}\,dt.$$

Hierbei werden $M_1, \ldots, M_6$ intern über die Matrikelnummer generiert.
Erstes Integral:

$$I_1 = \int_{0}^{M_3\cdot 2\cdot\pi} \underbrace{\sin\Big((M_1+M_4)\cdot t\Big)}_{f(t)}\cdot\underbrace{e^{(M_1+M_5)\cdot t}}_{g'(t)}\,dt$$

$$= \Big[\underbrace{\sin\Big((M_1+M_4)\cdot t\Big)}_{f(t)}\cdot\underbrace{\frac{e^{(M_1+M_5)\cdot t}}{M_1+M_5}}_{g(t)}\Big]_{t=0}^{t=M_3\cdot 2\cdot\pi}$$

$$-\int_{0}^{M_3\cdot 2\cdot\pi} \underbrace{(M_1+M_4)\cdot\cos\Big((M_1+M_4)\cdot t\Big)}_{f'(t)}\cdot\underbrace{\frac{e^{(M_1+M_5)\cdot t}}{M_1+M_5}}_{g(t)}\,dt$$

$$= -\frac{M_1+M_4}{M_1+M_5} \cdot \int_0^{M_3 \cdot 2\cdot\pi} \cos\Big((M_1+M_4)\cdot t\Big) \cdot e^{(M_1+M_5)\cdot t}\, dt.$$

(beachte $\sin((M_1+M_4)\cdot M_3\cdot 2\cdot\pi) = 0$, da M_1, M_4, M_3 ganzzahlig sind). Weitere partielle Integration des Restintegrals:

$$\int_0^{M_3\cdot 2\cdot\pi} \underbrace{\cos\Big((M_1+M_4)\cdot t\Big)}_{f(t)} \cdot \underbrace{e^{(M_1+M_5)\cdot t}}_{g'(t)}\, dt$$

$$= \Big[\underbrace{\cos\Big((M_1+M_4)\cdot t\Big)}_{f(t)} \cdot \underbrace{\frac{e^{(M_1+M_5)\cdot t}}{M_1+M_5}}_{g(t)}\Big]_{t=0}^{t=M_3\cdot 2\cdot\pi}$$

$$- \int_0^{M_3\cdot 2\cdot\pi} \underbrace{(M_1+M_4)\cdot\Big(-\sin\Big((M_1+M_4)\cdot t\Big)\Big)}_{f'(t)} \cdot \underbrace{\frac{e^{(M_1+M_5)\cdot t}}{M_1+M_5}}_{g(t)}\, dt$$

$$= \frac{\overbrace{\cos\Big((M_1+M_4)\cdot M_3\cdot 2\cdot\pi\Big)}^{1} \cdot e^{(M_1+M_5)\cdot M_3\cdot 2\cdot\pi} - 1}{M_1+M_5}$$

$$+ \frac{M_1+M_4}{M_1+M_5} \cdot \int_0^{M_3\cdot 2\cdot\pi} \sin\Big((M_1+M_4)\cdot t\Big) \cdot e^{(M_1+M_5)\cdot t}\, dt.$$

Man findet das Ausgangsintegral I_1 wieder. Insgesamt hat sich die Gleichung

$$I_1 = -\frac{M_1+M_4}{M_1+M_5} \cdot \Big(\frac{e^{(M_1+M_5)\cdot M_3\cdot 2\cdot\pi} - 1}{M_1+M_5} + \frac{M_1+M_4}{M_1+M_5} \cdot I_1\Big)$$

ergeben, also

$$\Big(1 + \Big(\frac{M_1+M_4}{M_1+M_5}\Big)^2\Big) \cdot I_1 = -\frac{M_1+M_4}{(M_1+M_5)^2}\Big(e^{(M_1+M_5)\cdot M_3\cdot 2\cdot\pi} - 1\Big),$$

aus der sich I_1 sofort ergibt:

$$I_1 = \frac{M_1+M_4}{(M_1+M_4)^2 + (M_1+M_5)^2} \cdot \Big(1 - e^{(M_1+M_5)\cdot M_3\cdot 2\cdot\pi}\Big).$$

Für das zweite Integral ergibt sich mit Aufgabe 86 sofort ohne Rechnung

$$\int_{-M_5}^{M_5} t^7 \cdot e^{-M_6\cdot t^2}\, dt = 0,$$

da der Integrand ungerade ist: $(-t)^7 \cdot e^{-M_6\cdot(-t)^2} = -t^7 \cdot e^{-M_6\cdot t^2}$.

Aufgabe 88: (Uneigentliche Integrale. 5 + 5 + 10 + 10 Bonuspunkte)
Für welche Werte von n existieren die folgenden Integrale?

$$a) \int_1^\infty t^n\ dt, \quad b) \int_0^1 t^n\ dt.$$

Berechne

$$c) \int_{-\infty}^\infty t\cdot e^{-t^2}\ dt, \quad d) \int_1^\infty \frac{\ln(t)}{t^2}\ dt.$$

Musterlösung:
Es gilt

$$\int t^n\ dt = \begin{cases} \dfrac{t^{n+1}}{n+1} + c & (n \neq -1), \\ \ln(|t|) + c & (n = -1). \end{cases}$$

a) Für $n \neq -1$ gilt:

$$\int_1^\infty t^n\ dt = \lim_{b\to\infty} \int_1^b t^n\ dt = \lim_{b\to\infty} \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_{t=1}^{t=b} = \frac{1}{n+1}\cdot \lim_{b\to\infty} b^{n+1} - \frac{1}{n+1}.$$

Für $n+1>0$ existiert dieser Grenzwert nicht (bzw. ist ∞). Für $n+1<0$ existiert der Grenzwert und ist $-\frac{1}{n+1}$. Für $n=-1$ gilt:

$$\int_1^\infty \frac{1}{t}\ dt = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{1}{t}\ dt = \lim_{b\to\infty} \Big[\ln(|t|)\Big]_{t=1}^{t=b} = \lim_{b\to\infty} \ln(|b|) = \infty.$$

Ergebnis:

$$\boxed{\int_1^\infty t^n\ dt = \begin{cases} \infty & \text{für } n \geq -1, \\ -\frac{1}{n+1} & \text{für } n < -1. \end{cases}}$$

b) Der Integrand t^n hat für negatives n eine Singularität bei $t=0$. Für $n\neq -1$:

$$\int_0^1 t^n\ dt = \lim_{\epsilon\to 0+0} \int_\epsilon^1 t^n\ dt = \lim_{\epsilon\to 0+0} \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_{t=\epsilon}^{t=1} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1}\cdot \lim_{\epsilon\to 0+0} \epsilon^{n+1}.$$

Für $n+1>0$ existiert dieser Grenzwert (und ist $\frac{1}{n+1}$). Für $n+1<0$ existiert er nicht (bzw. ist ∞; beachte $\frac{1}{n+1}<0$). Für $n=-1$ gilt:

$$\int_0^1 \frac{1}{t}\ dt = \lim_{\epsilon\to 0+0} \int_\epsilon^1 \frac{1}{t}\ dt = \lim_{\epsilon\to 0+0} \Big[\ln(|t|)\Big]_{t=\epsilon}^{t=1} = -\lim_{\epsilon\to 0+0} \ln(|\epsilon|) = \infty.$$

Ergebnis:

$$\boxed{\int_0^1 t^n\ dt = \begin{cases} \frac{1}{n+1} & \text{für } n > -1, \\ \infty & \text{für } n \leq -1. \end{cases}}$$

c) Substitution $y = t^2$, $dy = 2 \cdot t\, dt \Rightarrow t \cdot dt = \frac{dy}{2}$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} t \cdot e^{-t^2}\, dt = \lim_{a \to -\infty} \Big(\lim_{b \to \infty} \int_a^b e^{-t^2} \underbrace{t \cdot dt}_{dy/2} \Big) = \lim_{a \to -\infty} \Big(\lim_{b \to \infty} \frac{1}{2} \cdot \int_{a^2}^{b^2} e^{-y}\, dy \Big)$$

$$= \lim_{a \to -\infty} \Big(\lim_{b \to \infty} \Big[-\frac{e^{-y}}{2} \Big]_{y=a^2}^{y=b^2} \Big) = \lim_{a \to -\infty} \Big(\lim_{b \to \infty} \frac{1}{2} \cdot (e^{-a^2} - e^{-b^2}) \Big)$$

$$= \lim_{a \to -\infty} \frac{1}{2} \cdot \Big(e^{-a^2} - \lim_{b \to \infty} e^{-b^2} \Big) \Big) = \lim_{a \to -\infty} \frac{1}{2} \cdot e^{-a^2} = 0.$$

d) Zunächst die Stammfunktion von $\frac{\ln(t)}{t^2}$. Substituiere $y = \ln(t)$, $dy/dt = \frac{1}{t}$, $dy = dy/t$:

$$\int \frac{\ln(t)}{t^2}\, dt = \int \frac{\ln(t)}{t} \cdot \frac{dt}{t} = \int \frac{y}{t}\, dy = \int \frac{y}{e^y}\, dy = \int y \cdot e^{-y}\, dy.$$

Partielle Integration:

$$\int \underbrace{y}_{f(y)} \cdot \underbrace{e^{-y}}_{g'(y)}\, dy = \underbrace{y}_{f(y)} \cdot \underbrace{(-e^{-y})}_{g(y)} - \int \underbrace{1}_{f'(y)} \cdot \underbrace{(-e^{-y})}_{g(y)}\, dy = -y \cdot e^{-y} + \int e^{-y}\, dy = -y \cdot e^{-y} - e^{-y} + c.$$

Ergebnis:

$$\int \frac{\ln(t)}{t^2}\, dt = -\ln(t) \cdot e^{-\ln(t)} - e^{-\ln(t)} + c = -\frac{\ln(t)}{e^{\ln(t)}} - \frac{1}{e^{\ln(t)}} + c = -\frac{\ln(t)}{t} - \frac{1}{t} + c.$$

Es folgt

$$\int_1^{\infty} \frac{\ln(t)}{t^2}\, dt = \lim_{b \to \infty} \int_1^b \frac{\ln(t)}{t^2}\, dt = \lim_{b \to \infty} \Big[-\frac{\ln(t)}{t} - \frac{1}{t} \Big]_{t=1}^{t=b}$$

$$= \lim_{b \to \infty} \Big(-\frac{\ln(b)}{b} - \frac{1}{b} + \frac{\ln(1)}{1} + \frac{1}{1} \Big).$$

Mit $\ln(1) = 0$, $\lim\limits_{b \to \infty} \dfrac{1}{b} = 0$ und

$$\lim_{b \to \infty} \frac{\ln(b)}{b} \overset{(c=\ln(b))}{=} \lim_{c \to \infty} \frac{c}{e^c} = 0$$

folgt:

$$\int_1^{\infty} \frac{\ln(t)}{t^2}\, dt = 1.$$

Aufgabe 89: (Substitution und partielle Integration. 0 Bonuspunkte)
Zeige

$$\int_0^{\infty} \sqrt{t} \cdot e^{-t}\, dt = \int_0^{\infty} e^{-y^2}\, dy.$$

(Anleitung: Substitution $y = \sqrt{t}$, dann geeignete partielle Integration). Welchen Wert liefert MuPAD für das Integral?

Musterlösung:
Mit $y = \sqrt{t}$ ($\Rightarrow dy = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{t}}\ dt = \frac{1}{2 \cdot y}\ dt$):

$$\int_0^\infty \sqrt{t} \cdot e^{-t}\ dt = \int_0^\infty y \cdot e^{-y^2} \cdot \underbrace{2 \cdot y\ dy}_{dt}.$$

Nun partielle Integration (hier braucht man „Augenmaß“, was zu tun ist):

$$\int_0^\infty \underbrace{y}_{f(y)} \cdot \underbrace{e^{-y^2} \cdot 2 \cdot y}_{g'(y)}\ dy = \Big[\underbrace{y}_{f(y)} \cdot \underbrace{(-e^{-y^2})}_{g(y)}\Big]_{y=0}^{y=\infty} - \int_0^\infty \underbrace{1}_{f'(y)} \cdot \underbrace{(-e^{-y^2})}_{g(y)}\ dy = \int_0^\infty e^{-y^2}\ dy$$

Die Randterme fallen dabei weg:

$$\Big[y \cdot (-e^{-y^2})\Big]_{y=0}^{y=\infty} = \lim_{b \to \infty} \Big[y \cdot (-e^{-y^2})\Big]_{y=0}^{y=b} = \lim_{b \to \infty} \Big(- b \cdot e^{-b^2}\Big) - 0 \cdot (-e^{-0^2}) = 0$$

(denn e^{-b^2} fällt für $b \to \infty$ schneller als z.B. $1/b^2$). MuPAD liefert als Wert:

```
>> int(sqrt(t)*exp(-t), t = 0..infinity)

                               1/2
                             PI
                             -----
                               2

>> int(exp(-y^2), y = 0..infinity)

                               1/2
                             PI
                             -----
                               2
```

Aufgabe 90: (MuPAD und numerische Integration. 0 Bonuspunkte)
Studiere einige Beispiele der Hilfeseiten zu MuPAD's numerischen Integrierern `numeric::int` und `numeric::quadrature`. Berechne den Wert von $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-t^2}}{\pi + \sqrt{t} + \sin(t)}\ dt$ auf 10 Dezimalstellen genau!

Musterlösung:

```
>> numeric::int(exp(-t^2)/(PI + sqrt(t) + sin(t)), t = 0..infinity)

                            0.2094116015
```

Gibt es den Weihnachtsmann?

(Eine Analyse aus Physikersicht)

1) Keine bekannte Spezies der Gattung Rentier kann fliegen. Aber: es gibt 300 000 Spezies von lebenden Organismen, die noch klassifiziert werden müssen. Obwohl es sich dabei haupsächlich um Insekten und Bakterien handelt, schließt dies nicht mit letzter Sicherheit fliegende Rentiere aus, die nur der Weihnachtsmann bisher gesehen hat.

2) Es gibt 2 Milliarden Kinder (= Menschen unter 18) auf der Welt. Aber da der Weihnachtsmann (scheinbar) keine Moslems, Hindus, Juden und Buddhisten beliefert, reduziert sich seine Arbeit auf etwa 15% der Gesamtzahl - 378 Millionen Kinder (laut Volkszählungsbüro). Bei einer durchschnittlichen Kinderzahl von 3.5 pro Haushalt ergibt das 91.8 Millionen Häuser. Wir nehmen an, dass in jedem Haus mindestens ein braves Kind lebt.

3) Der Weihnachtsmann hat einen 31-Stunden-Weihnachtstag, bedingt durch die verschiedenen Zeitzonen, wenn er von Osten nach Westen reist (was logisch erscheint). Damit ergeben sich 822.6 Besuche pro Sekunde.

Somit hat der Weihnachtsmann für jeden christlichen Haushalt mit braven Kindern 1/1000 Sekunde Zeit für seine Arbeit: Parken, aus dem Schlitten springen, den Schornstein runterklettern, die Socken füllen, die übrigen Geschenke unter dem Weihnachtsbaum verteilen, alle übriggebliebenen Reste des Weihnachtsessens vertilgen, den Schornstein wieder raufklettern und zum nächsten Haus fliegen. Angenommen, dass jeder dieser 91.8 Millionen Stops gleichmäßig auf die ganze Erde verteilt sind (was natürlich, wie wir wissen, nicht stimmt, aber als Berechnungsgrundlage akzeptieren wir dies), erhalten wir nunmehr 1.3 km Entfernung von Haushalt zu Haushalt, eine Gesamtentfernung von 120.8 Millionen km, nicht mitgerechnet die Unterbrechungen für das, was jeder von uns mindestens einmal in 31 Stunden tun muss, plus Essen usw.

Das bedeutet, dass der Schlitten des Weihnachtsmannes mit 1040 km pro Sekunde fliegt, also der 3 000-fachen Schallgeschwindigkeit. Zum Vergleich: das schnellste von Menschen gebaute Fahrzeug auf der Erde, der Ulysses Space Probe, fliegt mit lächerlichen 43.8 km pro Sekunde. Ein gewöhnliches Rentier schafft höchstens 24 km pro Stunde.

4) Die Ladung des Schlittens führt zu einem weiteren interessanten Effekt. Angenommen, jedes Kind bekommt nicht mehr als ein mittelgroßes Lego–Set (etwa 1 kg), dann hat der Schlitten ein Gewicht von 378 000 Tonnen geladen, nicht gerechnet den Weihnachtsmann, der übereinstimmend als übergewichtig beschrieben wird.

Ein gewöhnliches Rentier kann nicht mehr als 175 kg ziehen. Selbst bei der Annahme, dass ein fliegendes Rentier (siehe Punkt 1) das zehnfache normale Gewicht ziehen kann, braucht man für den Schlitten nicht nur acht oder vielleicht neun Rentiere: man braucht 216 000 Rentiere. Das erhöht das Gewicht - den Schlitten selbst noch nicht einmal eingerechnet - auf 410 400 Tonnen. Nochmals ein Vergleich: das ist mehr als das vierfache Gewicht des Ozeandampfers „Queen Elizabeth“.

5) 410 400 Tonnen bei einer Geschwindigkeit von 1040 km/s erzeugen einen ungeheuren Luftwiderstand - dadurch werden die Rentiere aufgeheizt, genauso wie ein Raumschiff, das wieder in die Erdatmosphäre eintritt. Das vorderste Paar Rentiere muss dadurch 16.6 Trillionen Joule Energie absorbieren. Pro Sekunde. Jedes. Anders ausgedrückt: sie werden praktisch augenblicklich in Flammen aufgehen, das nächste Paar Rentiere wird dem Luftwiderstand preisgegeben, und es wird ein ohrenbetäubender Knall erzeugt.

Das gesamte Team von Rentieren wird innerhalb von 5 Tausendstel Sekunden vaporisiert. Der Weihnachtsmann wird währenddessen einer Beschleunigung von der Größe der 17 500-fachen Erdbeschleunigung ausgesetzt. Ein 120 kg schwerer Weihnachtsmann (was der Beschreibung nach lächerlich wenig sein muss) würde an das Ende seines Schlittens genagelt - mit einer Kraft von 20.6 Millionen

Newton.

Damit kommen wir zu dem traurigen Schluss: Wenn der Weihnachtsmann irgendwann einmal die Geschenke gebracht hat, ist er heute tot.

Trotzdem: Allen ein Frohe Weihnacht!