Ü b u n g s b l a t t 1

Abgabe von $*$ Aufgaben am 23.10.2003 in der Übung.

Aufgabe 1*: (Aussagenlogik. 5 Bonuspunkte)
Von den folgenden drei Aussagen ist genau eine richtig:

a) Manni besitzt mindestens 100 Bücher.

b) Manni besitzt weniger als 100 Bücher.

c) Manni besitzt mindestens 1 Buch.

Wie viele Bücher besitzt Manni?

Musterlösung:
a) und b) sind Negationen von einander, also ist immer eine von den beiden richtig. Damit muss c) falsch sein, wenn insgesamt nur eine der drei Aussagen richtig sein soll.

Oder auch anders (per Fallunterscheidung):
Hat Manni mindestens 100 Bücher, sind die beiden Aussagen a) und c) wahr, b) ist falsch.
Hat Manni zwischen 1 und 99 Bücher, ist a) falsch, während b) und c) wahr sind.
Hat Manni kein Buch, sind a) und c) falsch und b) wahr.
Nur in der letzen Situation ist genau eine der 3 Aussagen richtig: Manni besitzt kein einziges Buch!

Aufgabe 2*: (Induktion. 5 + 10 + 5 + 20 + 10 Bonuspunkte)
Wir definieren die **Fakultät** von $n \in \mathbb{N}_0$ durch die Rekursionsvorschrift

$$0! = 1, \quad n! = n \cdot (n-1)!$$

a) Beweise durch Induktion: $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$.

Wir definieren den **Binomialkoeffizienten** von $n \in \mathbb{N}$ und $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$ durch

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}.$$

b) Beweise die folgende Konstruktion über das „Pascalsche Dreieck“:

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \quad \forall\ k = 1, 2, \ldots n.$$

c) Beweise durch Induktion nach n, dass alle Binomialkoeffizienten ganze Zahlen sind.

d) Beweise durch Induktion nach n:

$$\boxed{(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot x^k \cdot y^{n-k}, \quad n \in \mathbb{N}_0,\ x, y \in \mathbb{R}.}$$

e) Beweise die Behauptung:

$$\boxed{\textit{Es gibt genau } \binom{n}{k} \textit{ verschiedene } k\textit{-elementige Teilmengen einer } n\textit{-elementigen Menge.}}$$

Anleitung (ein möglicher Beweisgang durch Induktion nach n): Sei x ein ausgezeichnetes Element der Menge. Betrachte einerseits die k-elementigen Teilmengen, die x enthalten, andererseits diejenigen, die x nicht enthalten. Dies liefert mit b) den Induktionsschritt.

Musterlösung:
a) Die Aussage A(1): $1! = 1$ ergibt sich unmitelbar aus der Definition $1! = 1 \cdot 0!$.

Induktionsschritt von n auf $n+1$: Es gelte $A(n)$: $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$. Es folgt

$$(n+1)! = (n+1) \cdot n! \overset{A(n)}{=} (n+1) \cdot 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n \cdot (n+1).$$

b) Nach Definition gilt

$$\binom{n+1}{k} = \frac{(n+1)!}{k! \cdot (n+1-k)!} = \frac{(n+1) \cdot n!}{k \cdot (k-1)! \cdot (n+1-k) \cdot (n-k)!},$$

$$\binom{n}{k-1} = \frac{n!}{(k-1)! \cdot (n-(k-1))!} = \frac{n!}{(k-1)! \cdot (n+1-k) \cdot (n-k)!},$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{n!}{k \cdot (k-1)! \cdot (n-k)!}.$$

Die Behauptung

$$\underbrace{\frac{(n+1) \cdot n!}{k \cdot (k-1)! \cdot (n+1-k) \cdot (n-k)!}}_{\binom{n+1}{k}} = \underbrace{\frac{n!}{(k-1)! \cdot (n+1-k) \cdot (n-k)!}}_{\binom{n}{k-1}} + \underbrace{\frac{n!}{k \cdot (k-1)! \cdot (n-k)!}}_{\binom{n}{k}}$$

ist nach Kürzen der gemeinsamen Faktoren $n!$, $(k-1)!$ und $(n-k)!$ aus der Gleichung äquivalent zu

$$\frac{n+1}{k \cdot (n+1-k)} = \frac{1}{n+1-k} + \frac{1}{k}.$$

Bringt man die rechte Seite auf den Hauptnenner, sieht man, dass diese Gleichung in der Tat für alle $n \in \mathbb{N}$ und $k = 1, \ldots, n$ erfüllt ist.

c) Sei $A(n)$ die Behaupung: $\binom{n}{k}$ ist für alle $k \in \{0, 1, \ldots n\}$ eine ganze Zahl. Mit $\binom{1}{1} = 1$ ist die Behauptung $A(1)$ richtig. Der Schritt von n nach $n+1$ wird durch b) geliefert: $\binom{n+1}{k}$ ist für $k = 1, \ldots, n$ als Summe zweier Binomalkoeffizienten mit oberem Eintrag n (per $A(n)$ sind dies ganze Zahlen) wieder ganze Zahlen. Hiermit sind $\binom{n+1}{0}$ und $\binom{n+1}{n+1}$ noch nicht abgedeckt. Nach Definition sind diese Werte aber 1, also auch ganze Zahlen.

d) **Induktionsstart:** für $n = 1$ ist $(x+y)^1 = \binom{1}{0} \cdot x^0 \cdot y^1 + \binom{1}{1} \cdot x^1 \cdot y^0 = y + x$ richtig.
Induktionsschritt von n nach $n+1$: Es gelte $A(n): \ (x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot x^k \cdot y^{n-k}$. Es folgt:

$$(x+y)^{n+1} = (x+y) \cdot (x+y)^n \overset{A(n)}{=} (x+y) \cdot \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot x^k \cdot y^{n-k}$$

$$= x \cdot \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot x^k \cdot y^{n-k} + y \cdot \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot x^k \cdot y^{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot x^{k+1} \cdot y^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot x^k \cdot y^{n+1-k} := \#.$$

Wir ersetzen in der ersten Summe den Laufindex k durch $k' = k+1$, setzen also $k = k' - 1$:

$$\# = \sum_{k'=1}^{n+1} \binom{n}{k'-1} \cdot x^{k'} \cdot y^{n+1-k'} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot x^k \cdot y^{n+1-k}$$

und benennen k' wieder in k um:

$$\# = \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} \cdot x^k \cdot y^{n+1-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot x^k \cdot y^{n+1-k}$$

$$= \binom{n}{0} \cdot x^0 \cdot y^{n+1} \ + \ \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) \cdot x^k \cdot y^{n+1-k} \ + \ \binom{n}{n} \cdot x^{n+1} \cdot y^0.$$

Mit b) ergibt sich:

$$\# = y^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} \cdot x^k \cdot y^{n+1-k} + x^{n+1}$$

$$= \binom{n+1}{0} \cdot x^0 \cdot y^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} \cdot x^k \cdot y^{n+1-k} + \binom{n+1}{n+1} \cdot x^{n+1} \cdot y^0$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \cdot x^k \cdot y^{n+1-k}.$$

Also gilt $A(n+1)$:

$$(x+y)^{n+1} = \# = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \cdot x^k \cdot y^{n+1-k}.$$

d) Induktion nach der Anzahl der Elemente in der Menge. Sei $A(n)$ die Aussage:

Es gibt genau $\binom{n}{k}$ verschiedene k-elementige Teilmengen einer n-elementigen Menge, wobei $k = 0, 1, \ldots, n$.

Induktionsstart: Für $n = 1$ ist diese Aussage richtig: es gibt es genau eine 0-elementige Teilmenge (die leere Menge) und eine 1-elementige Teilmenge (die Menge selbst).

Induktionsschritt von n nach $n+1$: Betrachte eine Menge M mit $n+1$ Elementen. Zeichne irgendein Element aus der Menge aus, nennen wir es x. Wähle ein $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

1) Betrachte alle k-elementigen Teilmengen von M, die x enthalten. Nimmt man x heraus, entstehen offensichtlich alle $(k-1)$-elementigen Teilmengen der n-elementigen Menge $M \setminus \{x\}$. Per $A(n)$ gibt es also $\binom{n}{k-1}$ unterschiedliche Teilmengen von M, die x enthalten.

2) Es gibt noch weitere k-elementige Teilmengen von M, nämlich diejenigen, die x nicht enthalten. Dies sind die $\binom{n}{k}$ unterschiedlichen k-elementigen Teilmengen von $M \setminus \{x\}$.

Für $k = 1, \ldots, n$ folgt also

$$\text{Anzahl der } k\text{-elementigen Teilmengen von } M \ = \ \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}.$$

Nach Aufgabe 2.b) folgt:

$$\text{Anzahl der } k\text{-elementigen Teilmengen von } M \;=\; \binom{n+1}{k}.$$

Für $k = 0$ und $k = n + 1$ ist die Aussage

$$\text{Anzahl der } k\text{-elementigen Teilmengen von } M \;=\; \binom{n+1}{k} = 1$$

auch richtig. Damit ist der Induktionsschritt vollzogen.

Aufgabe 3*: (Bernoullische Ungleichung. Induktion. 10 Bonuspunkte)
Zeige: für jedes $x \in [-1, \infty)$ und jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt die "Bernoullische Ungleichung":

$$(1 + x)^n \geq 1 + n \cdot x.$$

Musterlösung:
Induktionsstart: Für $n = 1$ ist $(1 + x)^1 = 1 + x \geq 1 + 1 \cdot x$ richtig.
Induktionsschritt von n nach $n + 1$:
Es gelte A(n): $(1 + x)^n \geq 1 + n \cdot x$. Wir müssen zeigen, dass $(1 + x)^{n+1} \geq 1 + (n + 1) \cdot x$ gilt:

$$\begin{aligned}
(1+x)^{n+1} &= (1+x)^n \cdot (1+x) \\
&\geq (1 + n \cdot x) \cdot (1 + x) \quad \text{(nach Induktionsvoraussetzung A(n))} \\
&= 1 + x + n \cdot x + n \cdot x^2 \\
&= 1 + (n+1) \cdot x + n \cdot x^2 \\
&= (1 + (n+1) \cdot x) + \underbrace{n \cdot x^2}_{\geq 0} \\
&\geq 1 + (n+1) \cdot x.
\end{aligned}$$

Aufgabe 4*: (Alle Katzen sind grau. Induktion. 5 Bonuspunkte)
Wir beweisen, dass alle Katzen dieser Welt die selbe Farbe haben. Sei $A(n)$ die Aussage:

„In einer Menge aus n Katzen haben alle Katzen die selbe Farbe“.

Die Aussage $A(1)$ ist trivialerweise richtig. Hier ist der Schritt von n auf $n + 1$:
1) Entferne aus einer Menge mit $n + 1$ Katzen eine Katze.
2) Per $A(n)$ gilt, dass alle n in der Menge verbleibenden Katzen die selbe Farbe haben. Es bleibt zu zeigen, dass die ausgesonderte Katze die selbe Farbe wie alle anderen hat.
3) Wir entfernen dazu eine weitere Katze aus der Menge und stecken dafür die in 1) ausgesonderte Katze wieder hinein. Per $A(n)$ hat auch diese Katze die selbe Farbe wie alle anderen in der Menge. Die momentan ausgesonderte Katze hat nach 2) ebenfalls diese Farbe.
4) Damit haben alle $n + 1$ Katzen die selbe Farbe.

Per Induktion ist gezeigt, dass alle Katzen dieser Welt die selbe Farbe haben. Diese ist 'grau', denn heute morgen lief mir eine graue Katze über den Weg. Wo liegt der Fehler?

Musterlösung:
Der Schritt von $A(n)$ nach $A(n+1)$ ist zwar durchaus stichhaltig, aber erst ab $n = 2$. Könnten wir $A(2)$ beweisen, hätten in der Tat alle Katzen die selbe Farbe. Die Erfahrung besagt, dass $A(2)$ schwer zu beweisen sein dürfte.

Aufgabe 5*: (Abzählbare Mengen. 10 Bonuspunkte)
Eine unendliche Menge A heißt **abzählbar**, wenn es eine invertierbare Abbildung $x : \mathbb{N} \to A$ gibt. Zeige formal:

Die Vereinigung endlich vieler abzählbarer Mengen ist wieder abzählbar.

Notation: abzählbare Mengen schreibt man typischerweise in der Form $A = \{x(1), x(2), \dots\}$ oder (eleganter) $A = \{x_1, x_2, \dots\}$.

Musterlösung:
Seien $x : \mathbb{N} \to \{x_1, x_2, \dots\}$ und $y : \mathbb{N} \to \{y_1, y_2, \dots\}$ die Indizierungen zweier abzählbarer Mengen. Die Indizierung

$$z_n = \begin{cases} x_{(n+1)/2} & \text{für ungerades } n, \\ y_{n/2} & \text{für gerades } n \end{cases}$$

liefert die Abbildung von $\mathbb{N}$ in die Vereinigungsmenge

$$\{z_1, z_2, z_3, z_4, \dots\} = \{x_1, y_1, x_2, y_2, \dots\} = \{x_1, x_2, \dots\} \cup \{y_1, y_2, \dots\}.$$

Die Vereinigung $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ beliebig vieler abzählbarer Mengen ist damit ebenfalls abzählbar ($A_{12} = A_1 \cup A_2$ ist abzählbar, damit dann auch $A_{123} = A_{12} \cup A_3$, $A_{1234} = A_{123} \cup A_4$ usw.)

Anmerkung: Auch abzählbare Vereinigungen unendlich vieler abzählbarer Mengen $\cup_{k\in\mathbb{N}} A_k$ sind wieder abzählbar. Den Beweis kann man genauso wie den Beweis der Abzählbarkeit von $\mathbb{Q}$ führen.

Aufgabe 6*: (Die Dreiecksungleichung. 5 Bonuspunkte)
Zeige, dass für alle $x, y \in \mathbb{R}$ die "**Dreiecksungleichung**" $|x + y| \le |x| + |y|$ gilt. (Fallunterscheidung!)

Musterlösung:
1-ter Fall: $x \ge 0$, $y \ge 0$: Hier gilt $x + y \ge 0$, also

$$|x + y| = x + y, \ |x| + |y| = x + y \ , \text{ also } |x + y| = |x| + |y|.$$

2-ter Fall: $x \ge 0$, $y < 0$, $x + y \ge 0$: Hier gilt $|x + y| = x + y$, $|x| = x$, $|y| = -y$, also

$$|x + y| = x + y, \ |x| + |y| = x - y \ , \text{ also } |x + y| < |x| + |y|.$$

3-ter Fall: $x \ge 0$, $y < 0$, $x + y < 0$: Hier gilt $|x + y| = -x - y$, $|x| = x$, $|y| = -y$, also

$$|x + y| = -x - y, \ |x| + |y| = x - y \ , \text{ also } |x + y| < |x| + |y|.$$

4-ter Fall: $x < 0$, $y \ge 0$, $x + y \ge 0$: Hier gilt $|x + y| = x + y$, $|x| = -x$, $|y| = y$, also

$$|x + y| = x + y, \ |x| + |y| = -x + y \ , \text{ also } |x + y| < |x| + |y|.$$

5-ter Fall: $x < 0$, $y \geq 0$, $x + y < 0$: Hier gilt $|x + y| = -x - y$, $|x| = -x$, $|y| = y$, also

$$|x + y| = -x - y,\ |x| + |y| = -x + y\ ,\ \text{also } |x + y| < |x| + |y|.$$

6-ter Fall: $x < 0$, $y < 0$: Hier gilt $x + y < 0$, also

$$|x + y| = -x - y,\ |x| + |y| = -x - y\ ,\ \text{also } |x + y| = |x| + |y|.$$

Aufgabe 7*: (Modellierungsaufgabe. Schulphysik und -mathematik. 30 Bonuspunkte)
Manni fährt Manta. Gern und schnell. Nun ist ihm aber Folgendes passiert: Kurz vor Erreichen einer grünen Ampel springt diese auf 'gelb'. Mit geübtem Auge erkennt er, dass er die Ampel nicht mehr bei 'gelb' erreichen kann. Mit einer Vollbremsung kann er gerade noch vor der Ampel anhalten. Wie schnell war er mindestens (man gebe einen halbwegs realistischen Wert an)?

Anleitung: Fährt man langsam auf eine grüne Ampel zu, kann man beim Umspringen auf 'gelb' je nach Abstand stets entweder noch sicher durchfahren, oder sicher abbremsen, oder man hat die Wahl. Ab einer kritischen Geschwindigkeit gibt es einen Abstandsbereich, in dem man weder durchfahren noch abbremsen kann. Bestimme diese kritische Geschwindigkeit in Abhängigkeit vom Beschleunigungsvermögen b_+ des Autos, der Bremsverzögerung b_-, der Dauer t_g der Gelbphase und Mannis Reaktionszeit t_r.

Musterlösung:
Manni fährt mit konstanter Geschwindigkeit v_0, bis die Ampel auf 'gelb' springt und er reagiert. Ab nun läuft die Uhr.

Bei konstanter Beschleunigung/Verzögerung b und Anfangsgeschwindigkeit v_0 ist die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt t:

$$v(t) = v_0 + b \cdot t,$$

der zurückgelegte Weg ist:

$$s(t) = v_0 \cdot t + \frac{b \cdot t^2}{2}.$$

Manni kann durch eine Vollbremsung vor der Ampel anhalten, wenn sein Abstand zum Zeitpunkt 0 mindestens s_{min} beträgt, das durch die beiden Gleichungen

$$0 = v_0 - |b_-| \cdot t, \quad s_{min} = v_0 \cdot t - \frac{|b_-| \cdot t^2}{2}$$

gegeben ist (wir setzen hier für mehr Klarheit die Verzögerung als negative Beschleunigung $b_- = -|b_-|$ an). Nach Elimination von t:

$$s_{min} = \frac{v_0^2}{|b_-|} - \frac{|b_-| \cdot v_0^2}{2 \cdot |b_-|^2} = \frac{v_0^2}{2 \cdot |b_-|}.$$

Er kann durch Gasgeben die Ampel noch vor dem Zeitpunkt $t_g - t_r$ erreichen (zu dieser Zeit wird die Ampel rot), wenn sein Abstand maximal s_{max} ist, welches durch

$$s_{max} = v_0 \cdot (t_g - t_r) + \frac{b_+ \cdot (t_g - t_r)^2}{2}$$

gegeben ist. Solange

$$s_{min} \leq s_{max}$$

gilt, ist er sicher: er kann bei kleinem Abstand ($\leq s_{max}$) durchfahren, bei großem Abstand ($\geq s_{min}$) bremsen und hat bei

$$s_{min} \leq \text{ Abstand } \leq s_{max}$$

die Wahl, sich für eins von beiden entscheiden (vermutlich gibt er Gas). Kritisch wird es für Geschwindigkeiten v_0, für die

$$s_{max} < s_{min}$$

gilt, da er dann in der Situation

$$s_{max} < \text{ Abstand } < s_{min}$$

keine Chance hat, durch Abbremsen oder Gasgeben zu vermeiden, bei Rot mitten auf der Kreuzung zu sein. Die kritische Geschwindigkeit ist durch die Gleichung $s_{min} = s_{max}$ gegeben, also

$$s_{min} = \frac{v_0^2}{2 \cdot |b_-|} = s_{max} = v_0 \cdot (t_g - t_r) + \frac{b_+ \cdot (t_g - t_r)^2}{2}.$$

Die quadratische Gleichung für v_0

$$v_0^2 - 2 \cdot |b_-| \cdot (t_g - t_r) \cdot v_0 - \frac{2 \cdot |b_-| \cdot b_+ \cdot (t_g - t_r)^2}{2} = 0$$

liefert (mit der aus der Schule bekannten Lösungsformel für quadratische Gleichungen)

$$v_0 = |b_-| \cdot (t_g - t_r) \ \pm \ \sqrt{|b_-|^2 \cdot (t_g - t_r)^2 + |b_-| \cdot b_+ \cdot (t_g - t_r)^2}.$$

Die physikalische Lösung ist die mit dem +-Zeichen vor der Wurzel (die andere Geschwindigkeit ist negativ):

$$\begin{aligned} v_0 &= |b_-| \cdot (t_g - t_r) \ + \ \sqrt{|b_-|^2 \cdot (t_g - t_r)^2 + |b_-| \cdot b_+ \cdot (t_g - t_r)^2} \\ &= |b_-| \cdot (t_g - t_r) \ + \ \sqrt{\Big(|b_-| \cdot (t_g - t_r)\Big)^2 + |b_-|^2 \cdot (t_g - t_r)^2 \cdot \frac{b_+}{|b_-|}} \\ &= |b_-| \cdot (t_g - t_r) \ + \ \sqrt{\Big(|b_-| \cdot (t_g - t_r)\Big)^2} \cdot \sqrt{1 + \frac{b_+}{|b_-|}} \\ &\Rightarrow \ \boxed{v_0 \ = \ |b_-| \cdot (t_g - t_r) \cdot \left(1 + \sqrt{1 + \frac{b_+}{|b_-|}}\right).} \end{aligned}$$

Vernachlässigt man das Beschleunigungsvermögen ($b_+ = 0$), ergibt sich die kritische Geschwindigkeit, die man beim Anfahren an eine Ampel nicht überschreiten sollte, zu:

$$v_0 \approx 2 \cdot |b_-| \cdot (t_g - t_r).$$

Man findet im Internet, dass heutige Mittelklasseautos bei einer Geschwindigkeit von 100 km/h einen Bremsweg von etwa 50 m haben (die –veraltete– Faustformel der Führerscheinprüfung liefert etwa 100 m Bremsweg). Mit $Bremsweg = \frac{Geschwindigkeit^2}{2 \cdot |b_-|}$ liefert dies einen heute typischen Verzögerungswert von

$$|b_-| = \frac{100^2 \cdot km^2/h^2}{2 \cdot 50 \cdot m} = 10^5 \ \frac{km}{h^2} = \frac{10^5}{3600} \frac{km}{h \cdot sec} \approx 55.5 \ \frac{km}{h \cdot sec}$$

(man baut pro Sekunde 55.5 km/h ab). Setzt man (etwas willkürlich) $t_g - t_r \approx 1 \ sec$, ergibt sich

$$v_0 \approx 2 \cdot |b_-| \cdot (t_g - t_r) \approx 2 \cdot 55.5 \ \frac{km}{h} = 111 \ \frac{km}{h}.$$