Kapitel 7

Potenzreihen

7.1 Der Konvergenzradius

Definition 7.1: (Komplexe Potenzreihen)

Eine **„Potenzreihe um den Punkt** $z_0 \in \mathbb{C}$**"** *ist eine Reihe der Form*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (z - z_0)^k, \quad a_k, z, z_0 \in \mathbb{C}.$$

Dort, wo die Reihe konvergiert, definiert sie eine Funktion von z, deren Eigenschaften untersucht werden sollen.

Satz 7.2: (Konvergenz von Potenzreihen)

Zur Potenzreihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (z - z_0)^k$ *existiert ein* $r \geq 0$ *(der* **„Konvergenzradius"***), so dass*

a) die Reihe für alle z *mit* $|z - z_0| < r$ **absolut** *konvergiert,*

b) die Reihe für kein z *mit* $|z - z_0| > r$ *konvergiert.*

Beweis: Gibt es einen Punkt Z, in dem die Reihe $\sum_k a_k \cdot (Z - z_0)^k$ konvergiert, so bildet $a_k \cdot (Z - z_0)^k$ eine Nullfolge. Es gilt also $|a_k \cdot (Z - z_0)^k| \leq 1$ für hinreichend grosses $k \geq k_0$. Mit

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} |a_k \cdot (z - z_0)^k| = \sum_{k=k_0}^{\infty} \underbrace{|a_k \cdot (Z - z_0)^k|}_{\leq 1} \cdot \Big| \frac{z - z_0}{Z - z_0} \Big|^k$$

ist also für jedes z mit $|z - z_0| < |Z - z_0|$ die geometrische Reihe $\sum_k |\frac{z-z_0}{Z-z_0}|^k$ eine konvergente Majorante, d.h., $\sum_k a_k \cdot (z - z_0)^k$ konvergiert absolut. Damit ist

$$r = \sup \Big\{ |Z - z_0|; \;\; \sum_k a_k \cdot (Z - z_0)^k \text{ konvergiert } \Big\},$$

falls die Menge der Konvergenzpunkte beschränkt ist. Konvergiert die Reihe für alle $Z \in \mathbb{C}$, setzt man formal $r = \infty$. Für jedes z mit $|z - z_0| > r$ muss die Reihe nach dieser Konstruktion von r divergieren.

Q.E.D.

Bemerkung 7.3: *Der Konvergenzbereich einer Potenzreihe besteht also prinzipiell aus einer Kreisscheibe um den Entwicklungspunkt z_0. Der Radius r kann allerdings 0 sein (d.h., die Potenzreihe konvergiert nur am Punkt $z = z_0$). Im Folgenden interessieren natürlich nur Potenzreihen mit einem Konvergenzradius $r > 0$. Über den Rand des Konvergenzkreises $\{z \in \mathbb{C};\ |z - z_0| = r\}$ kann man keine allgemeine Aussagen machen. In folgendem Beispiel konvergiert die Reihe für keinen der Randpunkte (denn für $|z| = 1$ ist z^k keine Nullfolge):*

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k \quad (\textit{Konvergenz für } |z| < r = 1.)$$

In folgendem Beispiel konvergiert die Reihe für alle Randpunkte mit $|z| = 1$ außer für $z = 1$ ($z = 1$ führt auf die divergente harmonische Reihe):

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k} \quad (\textit{Konvergenz für } |z| \le r = 1, z \ne 1).$$

Im folgenden Beispiel konvergiert die Reihe für alle Randpunkte:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k^2} \quad (\textit{Konvergenz für } |z| \le r = 1.)$$

Beispiel 7.4: Die geometrische Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z}$$

hat den Konvergenzradius 1. Die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot z^{2 \cdot k} = \sum_{k=0}^{\infty} (-z^2)^k = \frac{1}{1-(-z^2)} = \frac{1}{1+z^2}$$

hat ebenfalls den Konvergenzradius 1.

Der Konvergenzradius eine Potenzreihe kann unmittelbar aus den Koeffizienten a_k der Reihe bestimmt werden:

Satz 7.5: (Cauchy-Hadamard-Formel für den Konvergenzradius)

Der Konvergenzradius der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot (z - z_0)^k$ *ist* $r = \dfrac{1}{\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}}$, *wenn* $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}$ *existiert. Gilt* $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = 0$, *so setze* $r = \infty$. *Gilt* $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \infty$, *so setze* $r = 0$.

Beweis: Der Grenzwert $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}$ existiere. Betrachte ein beliebiges z mit $|z - z_0| < r$. Dann gilt $c := \lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} \cdot |z - z_0| < 1$. Es folgt, dass für alle $k \geq N$ (mit geeignetem N)

$$\sqrt[k]{|a_k|} \cdot |z - z_0| \leq C < 1 \quad \text{mit } C := \tfrac{1+c}{2} \in [\tfrac{1}{2}, 1)$$

gelten muss. Damit kann die Reihe durch eine konvergente geometrische Reihe abgeschätzt werden:

$$\left|a_k \cdot (z - z_0)^k\right| = \left(\sqrt[k]{|a_k|} \cdot |z - z_0|\right)^k \leq C^k \qquad \forall k \geq N.$$

Nach Satz 3.16 konvergiert $\sum_k |a_k| \cdot |z - z_0|^k$, da $\sum_k C^k$ mit $C < 1$ eine konvergente Majorante ist. Dies ist die absolute Konvergenz von $\sum_k a_k \cdot (z - z_0)^k$. Das Argument greift auch für den Grenzfall $r = \infty$.

Betrachte nun ein beliebiges z mit $|z - z_0| > r$. Diesmal gilt

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} \cdot |z - z_0| > 1,$$

also

$$\left|a_k \cdot (z - z_0)^k\right| = \left(\sqrt[k]{|a_k|} \cdot |z - z_0|\right)^k > 1$$

für große k, d.h., die Reihenglieder von $\sum_k a_k \cdot (z - z_0)^k$ bilden keine Nullfolge. Nach Satz 3.8 kann die Reihe $\sum_k a_k \cdot (z - z_0)^k$ nicht konvergieren. Das Argument greift auch für den Grenzfall $r = 0$.

Q.E.D.

Bemerkung 7.6: *Die allgemeine Form der Cauchy-Hadamard-Formel ist*

$$\textit{Konvergenzradius} = \frac{1}{\limsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}},$$

wo $\limsup$ *(**„Limes superior“**) der größte Häufungspunkt der Folge* $\sqrt[k]{|a_k|}$ *ist. Der Limes superior existiert für jede reelle Folge (bei unbeschränkten Folgen definiert man ihn formal als* ∞*).*

7.2 Eigenschaften von Potenzreihen

Auf dem Inneren des Konvergenzkreises sind durch Potenzreihen dargestellte Funktionen „beliebig harmlos und angenehm“. Sie sind automatisch unendlich oft diff'bar und werden durch ihre Taylor-Entwicklung dargestellt (Funktionen, die durch ihre Taylor-Reihen dargestellt werden, nennt man **analytisch**). Dies darf nicht verwundern, denn (gliedweise Differenzierbarkeit mal vorausgesetzt):

$$\frac{d^n}{dz^n}\Big|_{z=z_0} \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (z-z_0)^k}_{f(z)} = \Big(n! \cdot a_n + (..) \cdot (z-z_0) + (..) \cdot (z-z_0)^2 + \ldots \Big)_{z=z_0}$$

$$= n! \cdot a_n,$$

also $a_n = f^{(n)}(z_0)/n!$.

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Damit ist die Potenzreihe ihre eigene Taylor-Reihe:}\\ \displaystyle f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (z-z_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} \cdot (z-z_0)^k.\end{array}}$$

Diese heuristische Überlegung gilt in der Tat:

Satz 7.7: (Potenzreihen stellen analytische Funktionen dar)

Auf dem Inneren des Konvergenzkreises $\{z \in \mathbb{C};\ |z-z_0| < r\}$ *einer Potenzreihe mit Konvergenzradius* $r > 0$ *stellt*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (z-z_0)^k$$

eine unendlich oft differenzierbare Funktion dar. Es gilt

$$\frac{d^n}{dz^n}\, f(z) = \sum_{k=n}^{\infty} a_k \cdot k \cdot (k-1) \cdot \ldots \cdot (k-n+1) \cdot (z-z_0)^{k-n},$$

d.h., die Potenzreihe kann gliedweise differenziert werden. Der Konvergenzradius der abgeleiteten Reihen ist wiederum r. *Speziell gilt* $a_k = f^{(k)}(z_0)/k!$.

Beweis: Für die Potenzreihe ist der Differenzenquotient

$$\frac{f(z+h)-f(z)}{h} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot \frac{(z+h-z_0)^k - (z-z_0)^k}{h}.$$

Mit der Binomialentwicklung

$$\frac{(z+h-z_0)^k-(z-z_0)^k}{h} = \frac{1}{h}\cdot\sum_{j=1}^{k}\binom{k}{j}\cdot h^j\cdot(z-z_0)^{k-j}$$

$$= k\cdot(z-z_0)^{k-1} + h\cdot\sum_{j=2}^{k}\binom{k}{j}\cdot h^{j-2}\cdot(z-z_0)^{k-j}$$

folgt

$$\frac{f(z+h)-f(z)}{h} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k\cdot k\cdot(z-z_0)^{k-1} + h\cdot\underbrace{\sum_{k=2}^{\infty}\sum_{j=2}^{k} a_k\cdot\binom{k}{j}\cdot h^{j-2}\cdot(z-z_0)^{k-j}}_{g(h)}.$$

Die die Funktion $g(h)$ definierende Reihe ist dabei wohldefiniert, da die linke Seite der Gleichung für hinreichend kleines h definiert ist ($z+h$ muss im Konvergenzkreis von $f(z)$ liegen) und die Reihe $\sum_k a_k\cdot k\cdot(z-z_0)^{k-1}$ konvergiert (in den Übungen wird gezeigt, dass $f(z)=\sum_k a_k(z-z_0)^k$ und $f(z)=\sum_k a_k\cdot k\cdot(z-z_0)^k$ den selben Konvergenzradius haben). Die Funktion $g(h)$ ist beschränkt in h, denn für $|h|\le|h_0|$ (mit noch zu wählendem h_0) gilt:

$$|g(h)| = \left|\sum_{k=2}^{\infty}\sum_{j=2}^{k} a_k\cdot\binom{k}{j}\cdot h^{j-2}\cdot(z-z_0)^{k-j}\right| \le \sum_{k=2}^{\infty}\sum_{j=2}^{k}|a_k|\cdot\binom{k}{j}\cdot|h_0|^{j-2}\cdot|z-z_0|^{k-j}$$

$$\le \sum_{k=2}^{\infty}|a_k|\sum_{j=2}^{k}\binom{k}{j}\cdot|h_0|^{j-2}\cdot|z-z_0|^{k-j} \le \frac{1}{|h_0|^2}\sum_{k=2}^{\infty}|a_k|\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\cdot|h_0|^{j}\cdot|z-z_0|^{k-j}$$

$$= \frac{1}{|h_0|^2}\sum_{k=2}^{\infty}|a_k|(|z-z_0|+|h_0|)^k.$$

Ist $r>0$ der Konvergenzradius von $\sum_k a_k\cdot(z-z_0)^k$ (und damit auch von $\sum_k|a_k|\cdot|z-z_0|^k$), so wähle $|h_0|=(r-|z-z_0|)/2$, womit $|z-z_0|+|h_0|<r$ gilt, d.h., die obige Reihe konvergiert und liefert eine Schranke für $|g(h)|$.
Damit folgt $h\cdot g(h)=O(h)$:

$$f'(z) = \lim_{h\to 0}\frac{f(z+h)-f(z)}{h} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k\cdot k\cdot(z-z_0)^{k-1} + \lim_{h\to 0} O(h)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} a_k\cdot k\cdot(z-z_0)^{k-1}.$$

Damit ist gezeigt, dass die Potenzreihe einmal differenzierbar ist. Die Ableitung ist wieder als Potenzreihe dargestellt.
Die höheren Ableitungen folgen nun sofort per Induktion nach der Ableitungsordnung.

Q.E.D.

Bemerkung 7.8: *Die Formel*

$$\frac{d^n}{dz^n}\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (z-z_0)^k = \sum_{k=n}^{\infty} a_k \cdot k \cdot (k-1) \cdot \ldots \cdot (k-n+1) \cdot (z-z_0)^{k-n}$$

ist leicht zu merken. Sie besagt lediglich, dass man Differentiation und Summation vertauschen darf:

$$\frac{d^n}{dz^n}\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (z-z_0)^k \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot \frac{d^n}{dz^n}\,(z-z_0)^k$$

$$= \sum_{k=n}^{\infty} a_k \cdot k \cdot (k-1) \cdot \ldots \cdot (k-n+1) \cdot (z-z_0)^{k-n}.$$

Beispiel 7.9: Die in Beispiel 3.24 bzw. Definition 5.10 eingeführten Funktionen

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}, \quad \sin(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot z^{2\cdot k+1}}{(2\cdot k+1)!}, \quad \cos(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot z^{2\cdot k}}{(2\cdot k)!}$$

haben den Konvergenzradius $r = \infty$ und sind damit auf ganz $\mathbb{C}$ differenzierbar. Aus diesen Darstellungen erhält man sofort:

$$\frac{d}{dz}\,e^z = e^z, \quad \frac{d}{dz}\,\sin(z) = \cos(z), \quad \frac{d}{dz}\,\cos(z) = -\sin(z).$$

Bemerkung 7.10: *Die (reelle) Reihe*

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \cdot x^{2\cdot k}$$

um $x_0 = 0$ hat offensichtlich den Konvergenzradius 1. Für $|x| < 1$ stellt sie nach Konstruktion die Funktion $1/(1+x^2)$ da, die längs der reellen Achse eine „harmlose“ Funktion darstellt (überall stetig, beliebig oft differenzierbar). Warum konvergiert die Reihe aber nur für Werte von x mit $|x| < 1$, wo doch $1/(1+x^2)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ wohldefiniert ist?

Im Komplexen ist die Theorie der Differentiation und Taylor-Entwickelbarkeit wesentlich weitreichender (und einfacher) als im Reellen. Man muss sich in der Tat $1/(1+x^2)$ *im Komplexen vorstellen. Die Funktion* $z \in \mathbb{C} \to 1/(1+z^2) \in \mathbb{C}$ *hat Singularitäten (Polstellen) bei* $z = \pm i$. *In der Tat ist der Konvergenzradius* 1 *bei Entwicklung um den Nullpunkt der Abstand vom Entwicklungspunkt* 0 *zur nächsten Singularität! Im Komplexen ist der „kleine" Konvergenzradius* 1 *der Reihe daher unmittelbar verständlich. Im Reellen sieht man die komplexen Singularitäten nicht und wundert sich, dass die nette Funktion* $1/(1+x^2)$ *nicht überall durch ihre Taylor-Reihe dargestellt wird.*