# Kapitel 6

# Differentialrechnung

## 6.1 Definitionen und Sätze

↓25.11.03

Im Prinzip könnten die meisten der folgenden Überlegungen und Definitionen ohne große Änderungen für komplexe Funktionen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ durchgeführt werden. Wir beschränken uns hier jedoch auf reelle Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Zunächst die Definition einer Ableitung als Grenzwert von „Sekantensteigungen“:

**Definition 6.1:** (Die Ableitung einer Funktion)

*Eine Funktion $f : D \mapsto \mathbb{R}$ heißt* **„differenzierbar am Punkt $x$“**, *wenn der Grenzwert*

$$f'(x) := \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

*existiert. Der Grenzwert $f'(x)$ heißt* **„Ableitung von $f$ am Punkt $x$“**. *Alternative Schreibweisen (mit $y = f(x)$):*

$$\frac{dy}{dx} = y'(x) = \frac{d}{dx} f(x) = f'(x).$$

*Ist $f$ an jedem Punkt $x$ des Definitionsbereichs $D$ differenzierbar, so heißt die Abbildung $f' : x \mapsto f'(x)$* **„Ableitungsfunktion“** *(kurz:* **„Ableitung von $f$“***).*

**Bemerkung 6.2:** *Ist eine Funktion an einem Punkt differenzierbar, so ist sie dort auch stetig:*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \text{ existiert } \Rightarrow f(x+h) - f(x) = O(h)$$

$$\Rightarrow f(x+h) = f(x) + O(h) \Rightarrow \lim_{h \to 0} f(x+h) = f(x).$$

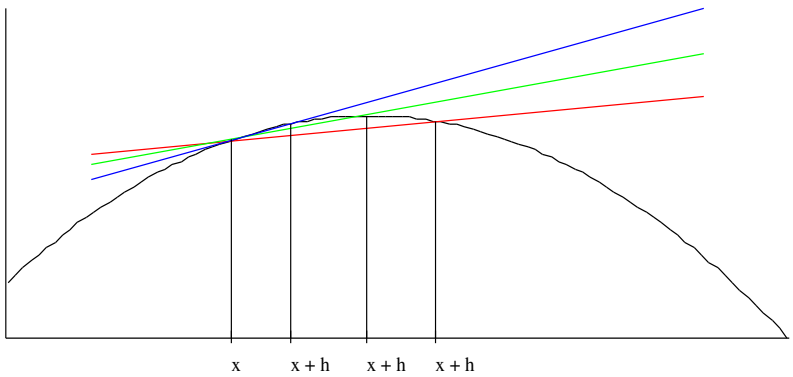
*Damit kann eine Funktion nur an Stetigkeitspunkten differenzierbar sein.*

**Geometrische Interpretation der Ableitung 6.3:**

*Für kleines $\Delta x = h \neq 0$ ist der* **„Differenzenquotient“**

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{(x+\Delta x) - x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \approx f'(x)$$

*die Sekantensteigung vom Punkt $(x, f(x))$ zum Punkt $(x+h, f(x+h))$ auf dem Graphen von $x$:*




*Die Ableitung $f'(x)$ selbst, d.h., der Grenzwert der Sekantensteigung für $\Delta x = h \to 0$,* **ist die Steigung der Tangente an den Graphen von $f$ am Punkt $x$.**

Zur Erinnerung an die Schule: die Tangente $T$ durch den Punkt $(x_0, f(x_0))$ mit der Steigung $f'(x_0)$ ist der Graph der linearen Funktion

$$T(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0).$$

**Interpretation der Ableitung 6.4:**

*Die Ableitung gibt an, wie stark sich $f(x)$ ändert, wenn sich $x$ um einen* **kleinen** *Wert $\Delta x$ ändert:*

$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \approx f'(x),$$

*d.h.*

$$\boxed{f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x) \cdot \Delta x\ .}$$

Die Definition der Ableitung über den Grenzwert von Sekantensteigungen ist praktisch unnütz, da nur in den allereinfachsten Fällen handhabbar, z.B., bei:

---

**Beispiel 6.5:** Betrachte $f(x) = x^2$:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{x^2 + 2\cdot x\cdot h + h^2 - x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2\cdot x\cdot h + h^2}{h} = \lim_{h\to 0}(2\cdot x + h) = 2\cdot x.$$

---

Für das praktische Rechnen verläßt man sich wiederum auf Rechenregeln:

**Satz 6.6:** (Rechenregeln für's Ableiten)

*Ableitungen einiger spezieller Funktionen (sei hierbei $c$ eine konstante Zahl):*

$$\frac{d}{dx}\, c = 0, \quad \frac{d}{dx}\, x^n = n\cdot x^{n-1}, \quad \frac{d}{dx}\, e^x = e^x, \quad \frac{d}{dx}\, \ln(x) = \frac{1}{x},$$

$$\frac{d}{dx}\, \sin(x) = \cos(x), \quad \frac{d}{dx}\, \cos(x) = -\sin(x).$$

*Die Ableitung einer aus einfachen Funktionen zusammengesetzten Funktion ist über folgende Regeln zu berechnen. Seien $f$ und $g$ differenzierbare Funktionen. Die Ableitung der zusammengesetzten Funktion ($f+g$, $f\cdot g$ etc.) existiert jeweils, wenn $f$ und $g$ ableitbar sind:*

- $\frac{d}{dx}\, c\cdot f(x) = c\cdot f'(x)$,
- $\frac{d}{dx}\, \Big(f(x) + g(x)\Big) = f'(x) + g'(x)$ (**„Summenregel“**),
- $\frac{d}{dx}\, f(x)\cdot g(x) = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$ (**„Produktregel“**)
- $\frac{d}{dx}\, \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{g(x)^2}$ (**„Quotientenregel“**).

*Bei der Quotientenregel wird $g(x) \neq 0$ vorausgesetzt (sonst teilt man durch 0).*

**Beweis:** Die Ableitung von $x^n$, $e^x$, $\sin(x)$, $\cos(x)$ wird in Übungsaufgaben behandelt. Die Ableitung von $\ln(x)$ wird später in Beispiel 6.18 hergeleitet. Die Linearität $(c\cdot f)' = c\cdot f'$ und $(f+g)' = f' + g'$ folgt unmittelbar aus den Rechenregeln für Grenzwerte von Funktionen. Die Produktregel ergibt sich durch den Grenzwert von

$$\frac{f(x+h)\cdot g(x+h) - f(x)\cdot g(x)}{h}$$

$$= \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \cdot g(x+h) + f(x) \cdot \frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$

für $h \to 0$. Die Ableitung von $1/g(x)$ ergibt sich aus

$$\frac{\frac{1}{g(x+h)} - \frac{1}{g(x)}}{h} = -\frac{g(x+h)-g(x)}{h} \cdot \frac{1}{g(x+h) \cdot g(x)}$$

zu

$$\left(\frac{1}{g(x)}\right)' = -\frac{g'(x)}{g(x)^2}.$$

Zusammen mit der Produktregel liefert dies die Quotientenregel

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \left(f(x) \cdot \frac{1}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)}{g(x)} - f(x) \cdot \frac{g'(x)}{g(x)^2}.$$

Q.E.D.

---

**Beispiel 6.7:**

$$\frac{d}{dx}\ \sqrt[3]{x} = \frac{d}{dx}\ x^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \cdot x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3} \cdot x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}.$$

---

**Beispiel 6.8:** Summen- und Produktregel:

$$\frac{d}{dx}\left(x + x^2 \cdot e^x\right) = \left(\frac{d}{dx}\ x\right) + \frac{d}{dx}\left(x^2 \cdot e^x\right)$$

$$= \left(\frac{d}{dx}\ x\right) + \left(\frac{d}{dx}\ x^2\right) \cdot e^x + x^2 \cdot \left(\frac{d}{dx}\ e^x\right) = 1 + 2 \cdot x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x.$$

---

**Beispiel 6.9:** Quotientenregel:

$$\frac{d}{dx}\ \frac{e^x}{x} = \frac{\left(\frac{d}{dx}\ e^x\right) \cdot x - e^x \cdot \left(\frac{d}{dx}\ x\right)}{x^2} = \frac{e^x \cdot x - e^x \cdot 1}{x^2} = \frac{e^x}{x} - \frac{e^x}{x^2}.$$

---

**Beispiel 6.10:**

$$\frac{d}{dx}\,\frac{\cos(x)\cdot e^x}{x} = \frac{\left(\frac{d}{dx}\,(\cos(x)\cdot e^x)\right)\cdot x - \cos(x)\cdot e^x\cdot\left(\frac{d}{dx}\,x\right)}{x^2}$$

$$= \frac{\left(\left(\frac{d}{dx}\,\cos(x)\right)\cdot e^x + \cos(x)\cdot\left(\frac{d}{dx}\,e^x\right)\right)\cdot x - \cos(x)\cdot e^x\cdot\left(\frac{d}{dx}\,x\right)}{x^2}$$

$$= \frac{\left(-\sin(x)\cdot e^x + \cos(x)\cdot e^x\right)\cdot x - \cos(x)\cdot e^x\cdot 1}{x^2}$$

$$= \frac{-\sin(x)\cdot e^x\cdot x + \cos(x)\cdot e^x\cdot x - \cos(x)\cdot e^x}{x^2}$$

$$= -\frac{\sin(x)\cdot e^x}{x} + \frac{\cos(x)\cdot e^x}{x} - \frac{\cos(x)\cdot e^x}{x^2}.$$

**Beispiel 6.11:** Bequemer geht's mit MuPAD. Die Funktion `diff` ist für's Differenzieren von Ausdrücken zuständig:

```
>> diff(cos(x)*exp(x)/x, x)

         cos(x) exp(x)   cos(x) exp(x)   sin(x) exp(x)
         ------------- - ------------- - -------------
               x               2               x
                              x
```

(Vergleiche mit Beispiel 6.10.) Alternativ können Funktionen (aber keine Ausdrücke) mittels ′ differenziert werden:

```
>> f:= x -> cos(x)*exp(x)/x:
>> f'(x)

         cos(x) exp(x)   cos(x) exp(x)   sin(x) exp(x)
         ------------- - ------------- - -------------
               x               2               x
                              x
```

So setzt man konkrete Werte in die Ableitung ein:

```
>> f'(1), f'(2)

                         cos(2) exp(2)   sin(2) exp(2)
     -sin(1) exp(1), ------------- - -------------
                            4               2
```

```
>> f'(PI) = float(f'(PI))

        exp(PI)   exp(PI)
        ------- - ------- = -5.02126887
            2       PI
          PI
```

26.11.03↓

Wie steht's mit der Ableitung von „Hintereinanderschaltungen" (**„Komposition"**) von Funktionen wie z.B. $\sin(\sqrt{x}\,)$?

**Satz 6.12:** (Die Kettenregel)

*Sei $g : D_g \mapsto D_f \subset \mathbb{R}$ differenzierbar am Punkt $x \in D_g$. Sei $f : D_f \mapsto \mathbb{R}$ differenzierbar am Punkt $g(x) \in D_f$. Dann ist die Funktion $h(x) = f(g(x))$ differenzierbar am Punkt $x$, und es gilt:*

$$\frac{d}{dx}\, h(x) = \frac{d}{dx}\, f(g(x)) = \underbrace{f'(g(x))}_{\substack{\text{„äußere}\\ \text{Ableitung"}}} \cdot \underbrace{g'(x)}_{\substack{\text{„innere}\\ \text{Ableitung"}}} .$$

*Als Merkregel für $y = g(x)$, $z = f(y) = f(g(x))$:*

$$\frac{d}{dx}\, f(g(x)) = \boxed{\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}} = f'(y) \cdot g'(x).$$

**Beweis:** Es gilt

$$\frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h}$$

$$= \frac{f\Big(g(x) + h \cdot \frac{g(x+h)-g(x)}{h}\Big) - f(g(x))}{h \cdot \frac{g(x+h)-g(x)}{h}} \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h}.$$

Für $h \to 0$ konvergiert $\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$ gegen $g'(x)$ und $k := h \cdot \frac{g(x+h)-g(x)}{h}$ gegen 0:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f\Big(g(x) + h \cdot \frac{g(x+h)-g(x)}{h}\Big) - f(g(x))}{h \cdot \frac{g(x+h)-g(x)}{h}}$$

$$= \lim_{k\to 0} \frac{f(g(x) + k) - f(g(x))}{k} = f'(g(x)).$$

Q.E.D.

**Beispiel 6.13:** Für $g(x) = \sqrt{x}$ gilt

$$g'(x) = \frac{d}{dx}\, x^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Zusammen mit $f(y) = \sin(y)$, $f'(y) = \cos(y)$ folgt:

$$\frac{d}{dx}\, \sin(\underbrace{\sqrt{x}}_{y}) = \Big(\frac{d}{dy}\, \sin(y)\Big) \cdot \Big(\frac{d}{dx}\, \sqrt{x}\Big) = \cos(y) \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{\cos(\sqrt{x}\,)}{2 \cdot \sqrt{x}}.$$

**Definition 6.14:** (Höhere Ableitungen)

*Die Funktion $f$ sei differenzierbar, sei $f'$ die Ableitungsfunktion. Ist diese wiederum differenzierbar, so heißt $f'' = (f')'$ die* **„zweite Ableitung von $f$“**. *Ist diese wiederum differenzierbar, so heißt $f''' = (f'')'$ die* **„dritte Ableitung von $f$“**. *Usw. Schreibweisen für die $n$-te Ableitung einer Funktion $f$:*

$$\frac{d^n}{dx^n}\, f(x) = f^{(n)}(x) = f^{\overbrace{''\cdots''}^{n}}(x).$$

*Die „nullte“ Ableitung $f^{(0)}$ ist die Funktion $f$ selbst. Ist die $n$-te Ableitung $f^{(n)}$ eine stetige Funktion in $x$, so heißt $f$* **„$n$-fach stetig differenzierbar“**.

**Beispiel 6.15:** Offensichtlich gilt $\exp = \exp' = \exp'' = \exp'''$ etc. Die 4-te Ableitung der trigonometrischen Funktionen ist jeweils wieder die Ausgangsfunktion:

$$\frac{d}{dx}\, \sin(x) = \cos(x), \quad \frac{d^2}{dx^2}\, \sin(x) = -\sin(x),$$

$$\frac{d^3}{dx^3}\, \sin(x) = -\cos(x), \quad \frac{d^4}{dx^4}\, \sin(x) = \sin(x),$$

$$\frac{d}{dx}\, \cos(x) = -\sin(x)\ , \quad \frac{d^2}{dx^2}\, \cos(x) = -\cos(x),$$

$$\frac{d^3}{dx^3}\, \cos(x) = \sin(x), \quad \frac{d^4}{dx^4}\, \cos(x) = \cos(x).$$

**Beispiel 6.16:** Höhere Ableitungen in MuPAD:

```
>> diff(exp(x^2), x, x) // zweite Ableitung

                          2       2      2
                  2 exp(x ) + 4 x  exp(x )

>> n := 6:
>> diff(exp(x^2), x $ n) // n-te Ableitung

          2          2      2          4      2         6      2
 120 exp(x ) + 720 x  exp(x ) + 480 x  exp(x ) + 64 x  exp(x )
```

Mit der Funktion `subs` (engl.: substitute = ersetze; gemeint ist: ersetze $x$ durch einen Wert) kann man konkrete Werte in Ausdrücke einsetzen. Berechne den Wert der 50-ten Ableitung von $\sin(x^2)\, e^x$ an der Stelle $x = 0$:

```
>> diff(sin(x^2)*exp(x), x $ 50):
>> subs(%, x = 0)

- 32812427642492524028780884258717885804750 cos(0) exp(0) -

   96811567017744384334797380010983921675 99 sin(0) exp(0)
```

Hier kommt eine Besonderheit von `subs` zutage: der ersetzte Ausdruck wird nicht sofort „ausgewertet“. D.h. in diesem Fall, dass die Vereinfachungen $\cos(0) = 1, \exp(0) = 1, \sin(0) = 0$ nicht automatisch geschehen. Die Funktion `eval` (engl.: evaluate = werte aus) erzwingt die Evaluation:

```
>> eval(%)

          -32812427642492524028780884258717885804750
```

Kennt man die Ableitung einer invertierbaren Funktion $f$, so kennt man auch die Ableitung der Umkehrabbildung $f^{-1}$. Es gilt

$$f^{-1}(f(y)) = y.$$

Leitet man beide Seiten der Gleichung nach $y$ ab, so liefert die Kettenregel

$$f^{-1\prime}(f(y)) \cdot f'(y) = \frac{d}{dy}\, y = 1 \quad \Longrightarrow \quad f^{-1\prime}(f(y)) = \frac{1}{f'(y)}.$$

**Satz 6.17:** (Ableitung der Inversen)

*Sei $f$ differenzierbar und invertierbar, sei $f^{-1}$ die Umkehrfunktion. Ist $f'(y) \neq 0$, so ist $f^{-1}$ an der Stelle $x = f(y)$ differenzierbar, und es gilt*

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

*Merkregel: mit $y = f^{-1}(x)$, $x = f(y)$:* $\boxed{(f^{-1})'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{f'(y)}.}$

---

**Beispiel 6.18:** Für $f^{-1} = \ln$ als Umkehrfunktion der Funktion $f = \exp$ mit $f' = \exp$ folgt mit $x = \exp(y)$, $y = \ln(x)$:

$$\frac{d}{dx}\ \ln(x) = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{\exp(y)} = \frac{1}{\exp(\ln(x)} = \frac{1}{x}.$$

Hierbei ist $x > 0$ vorausgesetzt (damit $\ln(x)$ definiert ist). Für $x < 0$ gilt

$$\frac{d}{dx}\ \ln(-x) = \ln'(-x) \cdot \frac{d}{dx}\ (-x) = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}.$$

Für $x > 0$ ist $|x| = x$, für $x < 0$ ist $|x| = -x$. Zusammengefasst gilt damit:

$$\boxed{\frac{d}{dx}\ \ln(|x|) = \frac{1}{x} \quad \text{für alle } x \neq 0.}$$

An der Stelle $x = 0$ ist $\ln(|x|)$ unstetig und damit erst recht nicht differenzierbar.

---

## 6.2 Der Mittelwertsatz

**Satz 6.19:** (Der Satz von Rolle)

*Sei $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ differenzierbar auf dem Intervall $[a, b]$. Es gelte $f(a) = f(b)$. Dann gibt es ein $\xi \in (a, b)$ mit $f'(\xi) = 0$.*

**Beweis:** O.b.d.A. sei $f$ nicht konstant (sonst ist die Behauptung sicherlich richtig: Für <u>jedes</u> $\xi \in (a, b)$ gilt $f'(\xi) = 0$). Da $f$ differenzierbar ist, ist $f$ auch stetig. Nach Satz 4.25 gibt es ein Minimum oder ein Maximum $\xi$ von $f$ im Inneren des Intervalls (liegen sowohl das Minimum als auch das Maximum am Rand, müsste die Funktion konstant sein). Sei o.B.d.A. $\xi$ ein Maximum (sonst betrachte $-f$). Mit $f(\xi + h) \leq f(\xi)$ für jedes $h$ folgt für die einseitigen Grenzwerte

$$\lim_{h \to 0+0} \frac{f(\xi + h) - f(\xi)}{h} \leq 0, \qquad \lim_{h \to 0-0} \frac{f(\xi + h) - f(\xi)}{h} \geq 0.$$

Es folgt $f'(\xi) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(\xi + h) - f(\xi)}{h} = 0.$

Q.E.D.

**Satz 6.20:** (Der Mittelwertsatz)

*Sei $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ differenzierbar auf dem Intervall $[a, b]$. Dann gibt es ein $\xi \in (a, b)$ mit*

$$\frac{f(a) - f(b)}{a - b} = f'(\xi).$$

**Beweis:** Betrachte $g(x) = f(x) - (f(a) - f(b)) \cdot \frac{x-b}{a-b}$. Diese Funktion erfüllt $g(a) = g(b) = f(b)$. Nach Satz 6.19 existiert $\xi \in (a, b)$ mit

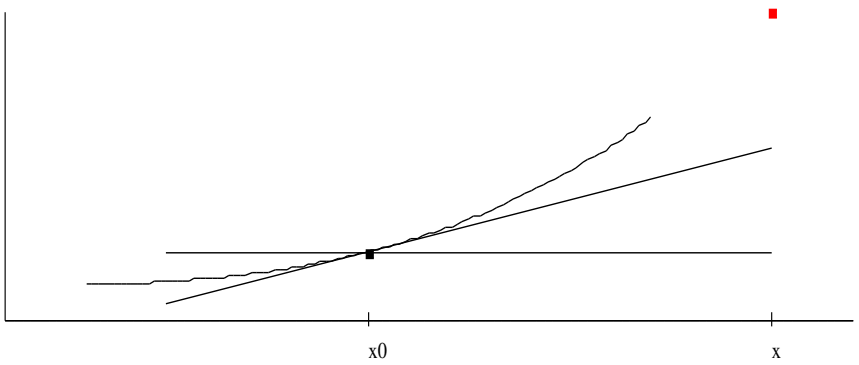
$$g'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(a) - f(b)}{a - b} = 0.$$

Q.E.D.

## 6.3 Taylor–Reihen

27.11.03↓

Betrachte folgende Funktion, die nur in einer kleinen Umgebung eines Punktes $x_0$ bekannt ist (genauer: es sind $f(x_0)$, $f'(x_0)$, $f''(x_0)$ etc. bekannt). Man interessiert sich für den Funktionswert an einem Punkt $x$ in der Nähe von $x_0$:




In allereinfachster Näherung würde man (für $x$ dicht bei $x_0$)

$$f(x) \approx f(x_0)$$

setzen. Die nächstbessere Approximation besteht darin, der Tangente am Punkt $x_0$ zu folgen:

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0).$$

Im obigen Fall ist deutlich, dass der Funktionswert oberhalb der Tangente zu suchen ist (die Funktion ist „gebogen“: es gilt $f''(x_0) > 0$). Es bietet sich an, einen quadratischen Term hinzuzufügen, um eine bessere Approximation zu erreichen:

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + c \cdot (x - x_0)^2.$$

Wie sollte die Konstante $c$ gewählt werden, wie geht es weiter?

**Vorüberlegung zu Taylor-Polynomen 6.21:**

*Zu einer mehrfach differenzierbaren Funktion $f$ finde ein Polynom*

$$T_n(x) = c_0 + c_1 \cdot (x - x_0) + \cdots + c_n \cdot (x - x_0)^n,$$

*dass sich an einem Punkt $x_0$ „möglichst eng an den Graphen von $f$ anschmiegt“. D.h., es soll gelten:*

$$f(x_0) = T_n(x_0), \quad f'(x_0) = T_n'(x_0), \quad \ldots \quad , f^{(n)}(x_0) = T_n^{(n)}(x_0).$$

*Hierdurch ist das Polynom eindeutig bestimmt als*

$$T_n(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} \cdot (x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x - x_0)^n.$$

**Begründung:** Die $k$-te Ableitung von $T_n$ an der Stelle $x_0$ ist

$$f^{(k)}(x_0) \overset{(!)}{=} T_n^{(k)}(x_0)$$

$$= c_k \cdot k! \cdot (x - x_0)^0 + c_{k+1} \cdot (k+1) \cdot k \cdot \ldots \cdot 2 \cdot (x - x_0)^1 \Big|_{x=x_0} + \cdots = c_k \cdot k!$$

$$\Rightarrow \quad c_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}.$$

**Definition 6.22:** (Taylor–Polynome und –Reihen)

*Sei $f$ mehrfach am Punkt $x_0$ differenzierbar. Das Polynom*

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k$$

*heißt* **„Taylor–Polynom“** *$n$-ten Grades von $f$ am* **Entwicklungspunkt** *$x_0$. Die unendliche Reihe*

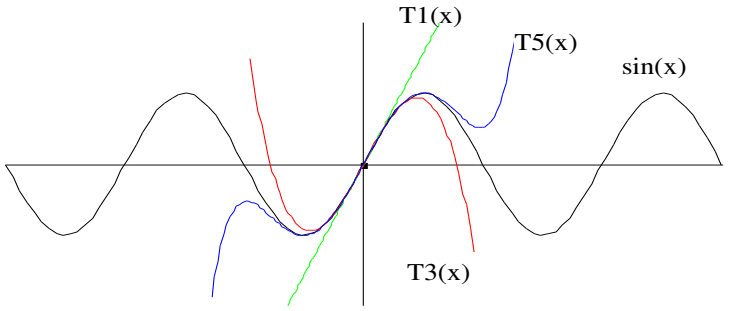
$$T(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k$$

*heißt* **„Taylor–Reihe“** *von $f$ am Entwicklungspunkt $x_0$.*

Wozu Taylor–Polynome? Taylor–Polynome dienen dazu, komplizierte Funktionen in unmittelbarer Umgebung eines Punktes $x_0$ durch einfache Funktionen, nämlich Polynome, zu approximieren. Dadurch kann man oft das Verhalten der Funktion in der Nähe spezieller Punkte einfach studieren. Es gilt die

> **Faustregel:** Taylor–Polynome nähern die Funktion an für Werte $x$, die dicht beim Entwicklungspunkt $x_0$ liegen: $T_n(x) \approx f(x)$. Je höher $n$ und je kleiner der Abstand $x - x_0$, um so besser ist die Approximation.

Genaueres liefert später Satz 6.27. Hier eine Graphik einiger Taylor–Polynome der Funktion $f(x) = \sin(x)$ um den Punkt $x_0 = 0$:




Eine erste Taylor–Reihenberechnung:

---

**Beispiel 6.23:** Wir berechnen die Taylor–Reihe von $f(x) = e^x$ um $x_0 = 0$. Wegen $f(x_0) = f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = e^{x_0} = e^0 = 1$ ist die Taylor–Reihe

$$e^x = 1 + \frac{1}{1!} \cdot (x-0) + \frac{1}{2!} \cdot (x-0)^2 + \cdots = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots .$$

**Die in Beispiel 3.24 vorgestellte Reihendarstellung der Exponentialfunktion ist also nichts anderes als die Taylor–Entwicklung um den Nullpunkt!** Das selbe gilt für die Reihendarstellung der trigonometrischen Funktionen aus Definition 5.10: Mit

$$f(x) = \sin(x),\ f'(x) = \cos(x),\ f''(x) = -\sin(x),\ f^{(3)}(x) = -\cos(x),\ f^{(4)}(x) = \sin(x)$$

folgt

$$\begin{array}{lllllllll}
f^{(0)}(0) & = & f^{(4)}(0) & = & f^{(8)}(0) & = & \ldots & = & 0, \\
f^{(1)}(0) & = & f^{(5)}(0) & = & f^{(9)}(0) & = & \ldots & = & 1, \\
f^{(2)}(0) & = & f^{(6)}(0) & = & f^{(10)}(0) & = & \ldots & = & 0, \\
f^{(3)}(0) & = & f^{(7)}(0) & = & f^{(11)}(0) & = & \ldots & = & -1
\end{array}$$

$$\Rightarrow \quad \sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \cdot x^k = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \mp \cdots .$$

Analog für $f(x) = \cos(x)$:

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \cdot x^k = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \mp \cdots .$$

---

Nun eine Anwendung der Taylor–Entwicklung:

---

**Beispiel 6.24:** (Vergleiche auch mit Beispiel 4.15) Betrachte die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos(x)}{x^2} & \text{für } x \neq 0, \\ \dfrac{1}{2} & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

Wir behaupten, dass $f$ auch an der Stelle $x = 0$ stetig ist. Wir approximieren $\cos(x)$ durch die Taylor–Entwicklung um den Punkt $x_0 = 0$. Für $x \neq 0$ gilt

$$f(x) = \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1 - \left(1 - \frac{x^2}{2} + O(x^4)\right)}{x^2} = \frac{\frac{x^2}{2} + O(x^4)}{x^2} = \frac{1}{2} + \frac{O(x^4)}{x^2} = \frac{1}{2} + O(x^2).$$

Hiermit ist nun klar: $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{2} + O(x^2)\right) = \frac{1}{2}$.

---

**Beispiel 6.25:** In MuPAD ist die Funktion `taylor` dafür zuständig, den Beginn einer Taylor–Entwicklung zu berechnen:

```
>> taylor(exp(x), x = 0)

                    2    3    4    5
                   x    x    x    x         6
1 + x + -- + -- + -- + --- + O(x )
                   2    6    24   120
```

Die Taylor–Entwicklung von $f(x) = \frac{1}{1-x}$ um $x_0 = 0$ ist die geometrische Reihe aus Beispiel 3.3. Es werden 10 Terme berechnet:

```
>> taylor(1/(1 - x), x = 0, 10)

                2    3    4    5    6    7    8    9      10
1 + x + x  + x  + x  + x  + x  + x  + x  + x  + x  + O(x  )
```

Der folgende Befehl berechnet eine Taylor–Entwicklung um $x_0 = \pi$:

```
>> taylor(2 + sin(x)*cos(x), x = PI)

                                3              5
                     2 (x - PI)    2 (x - PI)                6
    2 + (x - PI) - ----------- + ----------- + O((x - PI) )
                          3            15
```

---

**Beispiel 6.26:** Betrachte $f(x) = 1 - \sqrt{1-x} = 1 - (1-x)^{\frac{1}{2}}$. Wie kann man Werte $f(x)$ für kleines $x$ ohne technische Hilfsmittel ausrechnen? Zunächst die Berechnung der ersten Taylor–Polynome. Als Entwicklungspunkt wählen wir $x_0 = 0$, da wir uns für **kleine** Werte von $x$ interessieren. Man braucht Ableitungen von $f(x)$ am Entwicklungspunkt $x_0 = 0$:

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 - (1-x)^{\frac{1}{2}}, & f(0) = 0, \\ f'(x) &= \tfrac{1}{2} \cdot (1-x)^{-\frac{1}{2}}, & f'(0) = \tfrac{1}{2}, \\ f''(x) &= \tfrac{1}{4} \cdot (1-x)^{-\frac{3}{2}}, & f''(0) = \tfrac{1}{4}, \\ &\ldots \end{aligned}$$

Hiermit folgt die Entwicklung

$$\begin{aligned} f(x) = 1 - \sqrt{1-x} &\approx f(0) + f'(0) \cdot (x - x_0) + \frac{f''(0)}{2!} \cdot (x - x_0)^2 + \cdots \\ &= 0 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} + \cdots . \end{aligned}$$

Nun ja, die Terme der Entwicklung sind in der Tat so alle berechenbar, aber das ist ziemlich mühselig. Bequemer mit MuPAD:

```
>> taylor(1 - sqrt(1 - x), x)

                2     3       4       5
    x    x     x     x    5 x     7 x        6
    - + -- + -- + ---- + ---- + O(x )
    2    8     16    128     256
```

Aus diesen Taylor–Approximationen bekommt man z.B. für $x = 0.1$:

$$\begin{aligned} f(0.1) &= \tfrac{0.1}{2} + \tfrac{0.1^2}{8} + \tfrac{0.1^3}{16} + \cdots \\ &= \phantom{+}\ 0.05 \\ &\quad + \ 0.00125 \\ &\quad + \ 0.0000625 \\ &\quad + \ \cdots \\ &= \phantom{+}\ 0.05131... \end{aligned}$$

Man sieht der Entwicklung geradezu an, dass die noch nicht berücksichtigten Terme der Entwicklung die angegebenen Dezimalstellen nicht mehr beeinflussen, d.h., die ersten 3 bis 4 Ziffern sind korrekt. Probe mit MuPAD:

```
>> 1 - sqrt(0.9)
                    0.05131670195
```

Für Taylor–Polynome endlichen Grades ist es zumindestens intuitiv klar, dass sie eine Approximation der Funktion liefern, wenn nur $x$ dicht genug beim Entwicklungspunkt $x_0$ liegt. Es verbleibt jedoch zu klären, ob die unendliche Reihe gegen $f(x)$ konvergiert (bzw., wie weit entfernt $x$ von $x_0$ liegen darf, damit $f(x)$ durch die Taylor–Reihe dargestellt wird).

**Satz 6.27:** (Restgliedformel der Taylor–Approximation)

*Sei $f(x)$ in einer Umgebung des Punktes $x_0$ $(n+1)$-fach stetig differenzierbar. Sei $x$ aus dieser Umgebung. Dann existiert ein Punkt $\xi$ im offenen Intervall zwischen $x$ und $x_0$, so dass gilt:*

$$f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x-x_0)^k}_{\textit{Taylor–Polynom vom Grad } n} + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot (x-x_0)^{n+1}}_{\textbf{„Restglied“}}.$$

**Beweis:** (für technisch Interessierte) Wir halten $x$ fest und fassen das Taylor–Polynom als Funktion des Entwicklungspunkts $x_0$ auf:

$$T_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k!} \cdot (x-t)^k.$$

Die Ableitung dieser Funktion ist eine Teleskopsumme:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} T_n(t) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!} \cdot (x-t)^k - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k!} \cdot k \cdot (x-t)^{k-1} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!} \cdot (x-t)^k - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{(k-1)!} \cdot (x-t)^{k-1} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!} \cdot (x-t)^k - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!} \cdot (x-t)^k \\
&= \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} \cdot (x-t)^n.
\end{aligned}$$

Betrachte die Hilfsfunktion

$$g(t) = (x-x_0)^{n+1} \cdot T_n(t) + (x-t)^{n+1} \cdot (f(x) - T_n(x_0))$$

mit festem $x$ und $x_0$, für die

$$\begin{aligned}
g(x_0) &= (x-x_0)^{n+1} \cdot T_n(x_0) + (x-x_0)^{n+1} \cdot (f(x) - T_n(x_0)) \\
&= (x-x_0)^{n+1} \cdot f(x), \\
g(x) &= (x-x_0)^{n+1} \cdot T_n(x) = (x-x_0)^{n+1} \cdot f(x)
\end{aligned}$$

gilt, also $g(x) = g(x_0)$. Nach dem Satz von Rolle 6.19 gibt es ein $\xi$ im offenen Intervall zwischen $x$ und $x_0$, wo die Ableitung

$$\frac{d}{dt}\, g(t) = (x - x_0)^{n+1} \cdot \frac{d}{dt}\, T_n(t) - (n+1) \cdot (x-t)^n \cdot (f(x) - T_n(x_0))$$

$$= (x - x_0)^{n+1} \cdot \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} \cdot (x-t)^n - (n+1) \cdot (x-t)^n \cdot (f(x) - T_n(x_0))$$

$$= (x-t)^n \cdot \Big( (x - x_0)^{n+1} \cdot \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} - (n+1) \cdot (f(x) - T_n(x_0)) \Big)$$

verschwindet:

$$0 = (x-\xi)^n \cdot \Big( (x - x_0)^{n+1} \cdot \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!} - (n+1) \cdot (f(x) - T_n(x_0)) \Big)$$

$$\Rightarrow \quad f(x) - T_n(x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot (x - x_0)^{n+1}.$$

Q.E.D.

2.11.03↓ **Interpretation 6.28:**

*Das Restglied*

$$\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot (x - x_0)^{n+1} = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k$$

*ist die Differenz zwischen der Funktion $f(x)$ und dem $n$-ten Taylor–Polynom um $x_0$. Die Funktion wird genau dann durch die unendliche Taylor–Reihe dargestellt, wenn das Restglied bei festem $x$, $x_0$ für $n \to \infty$ gegen 0 konvergiert. Sind z.B. alle Ableitungen $f^{(n)}$ beschränkt bzgl. $n$, so ist dies für beliebiges $x$ und $x_0$ der Fall, denn $n!$ wächst schneller gegen $\infty$ als $|x - x_0|^n$ für jeden Wert von $|x - x_0|$. Dies erklärt z.B., dass die trigonometrischen Funktionen* sin *und* cos*, deren Ableitungen nur Werte in $[-1, 1]$ annehmen, global durch ihre Taylor–Reihen dargestellt werden (wir haben sie in Definition 5.10 ja auch über diese Reihen eingeführt). Dies gilt auch für* exp*, da $f^{(n)}(x) = e^x$ gar nicht von $n$ abhängt.*

---

**Beispiel 6.29:** Wir betrachten die Taylor–Entwicklung von $f(x) = \ln(1+x)$ um den Punkt $x_0 = 0$:

$$f(x) = \ln(1+x), \quad f'(x) = \frac{1}{1+x}, \quad f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2},$$

$$f^{(3)}(x) = \frac{2}{(1+x)^3}, \quad \ldots, \quad f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k-1} \cdot (k-1)!}{(1+x)^k}.$$

Mit $f^{(k)}(0) = (-1)^{k-1} \cdot (k-1)!$ folgt als Taylor–Reihe

$$\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \cdot x^k = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \cdot \frac{x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \mp \cdots,$$

die die Funktion darstellt, solange die Restglieder

$$\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot x^{n+1} = \frac{(-1)^n \cdot x^{n+1}}{(1+\xi)^{n+1} \cdot (n+1)}$$

gegen 0 konvergieren. Dies ist für positives $x \leq 1$ mit $0 < \xi < x \leq 1$ offensichtlich der Fall:

$$\frac{x^{n+1}}{(1+\xi)^{n+1} \cdot (n+1)} \leq \frac{x^{n+1}}{n+1} \leq \frac{1}{n+1} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Speziell für $x = 1$ ergibt sich der Wert der alternierenden harmonischen Reihe:

$$\ln(2) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \pm \cdots.$$

Für negatives $x \geq -\frac{1}{2}$ gilt $-\frac{1}{2} \leq x < \xi < 0$:

$$\left| \frac{x^{n+1}}{(1+\xi)^{n+1} \cdot (n+1)} \right| = \frac{|x|^{n+1}}{(1+\xi)^{n+1} \cdot (n+1)} \leq \frac{(1/2)^{n+1}}{(1/2)^{n+1} \cdot (n+1)} = \frac{1}{n+1} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

d.h., auch hier konvergiert das Restglied gegen 0. Weiterhin konvergiert die Taylor–Reihe auch für $-1 < x < -\frac{1}{2}$ gegen $\ln(1+x)$, was wir aus unserer Restgliedformel allerdings nicht herausbekommen (es gibt alternative Restgliedformeln, die dieses Resultat liefern). Zusammengefasst:

$$\boxed{\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \pm \cdots \text{ für } x \in (-1, 1].}$$

Für $|x| > 1$ sowie für $x = -1$ divergiert die Taylor–Reihe.

---

## 6.4 Monotonie, Extremwerte

↓3.12.03

Eine der wichtigsten Anwendungen der Differentiation ist das Auffinden von Extremwerten. Dazu stellen wir zunächst fest, dass Ableitungswerte (= Tangentensteigungen) auf ansteigendes oder abfallendes Verhalten der Funktion hinweisen:

**Satz 6.30:** (Ableitungen weisen auf Monotonie hin)

*Sei $f$ differenzierbar, die Ableitungsfunktion $f'$ sei stetig. Gilt $f'(x_0) > 0$, so ist $f$ auf einer Umgebung von $x_0$ streng monoton steigend. Gilt $f'(x_0) < 0$, so ist $f$ auf einer Umgebung von $x_0$ streng monoton fallend.*

**Beweis:** Da $f'$ stetig ist, gilt für $f'(x_0) > 0$, dass $f'$ auch noch auf einer Umgebung von $x_0$ positiv ist. Für $x$, $y$ aus dieser Umgebung von $x_0$ mit $x < y$ liefert der Mittelwertsatz 6.20

$$f(y) - f(x) = f'(\xi) \cdot (y - x) > 0$$

mit einem Zwischenwert $\xi$ zwischen $x$ und $y$. Damit ist $f(x)$ streng monoton steigend auf einer Umgebung des Punktes $x$, auf der für den Zwischenwert $f'(\xi) > 0$ gilt.
Analog folgt, dass $f(x)$ streng monoton fallend ist, wenn mit $f'(x_0) < 0$ die Ableitung auf einer Umgebung von $x_0$ negative Werte annimmt.

Q.E.D.

Intuitiv: mit der Interpretation der Ableitung 6.4 ist dies unmittelbar klar. Für kleines $\Delta x$ gilt:

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x.$$

Extrema sind die Stellen, wo die Funktion „auf der einen Seite“ steigend, „auf der anderen Seite“ fallend ist:

**Satz 6.31:** (An Extremstellen verschwindet die Ableitung)

*Sei $f$ differenzierbar. Ist die Stelle $x_0$ ein (lokales) Maximum oder Minimum, so gilt $f'(x_0) = 0$.*

| |
|---|
| *Man findet also alle Kandidaten für Extremstellen einer Funktion $f$, indem man die Nullstellen von $f'$ sucht.* |

**Beweis:** Genau wie im Beweis des Satzes von Rolle 6.19.

Q.E.D.

---

**Beispiel 6.32:** Betrachte $f(x) = 2 \cdot x - x^2$:

$$\frac{d}{dx} f(x) = \frac{d}{dx} (2 \cdot x - x^2) = 2 - 2 \cdot x \overset{(!)}{=} 0 \quad \Longrightarrow \quad x = 1.$$

Damit ist $x_0 = 1$ der einzige Punkt, an dem (möglicherweise) ein Extremum vorliegen kann.

---

Es gibt allerdings Stellen $x_0$ mit $f'(x_0) = 0$, die keine Extremstellen (sondern sogenannte „Sattelpunkte“) sind. Beispiel: die Funktion $f(x) = x^3$ ist streng monoton steigend. Am Punkt $x_0 = 0$ gilt $f'(x_0) = 3 \cdot x_0^2 = 0$, aber $x_0$ ist kein Extremum.

**Satz 6.33:** (Hinreichende Kriterien für Extrema)

*Sei $f$ mehrfach differenzierbar. Gilt an einer Stelle $x_0$*

$$f'(x_0) = 0, \quad f''(x_0) < 0,$$

*so ist $x_0$ ein lokales Maximum. Gilt*

$$f'(x_0) = 0, \quad f''(x_0) > 0,$$

*so ist $x_0$ ein lokales Minimum.*

**„Beweis“:** Approximiere $f(x)$ in einer Umgebung von $x_0$ durch das Taylor–Polynom zweiten Grades:

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2} \cdot (x - x_0)^2.$$

An einem Punkt $x_0$ mit $f'(x_0) = 0$ gilt näherungsweise:

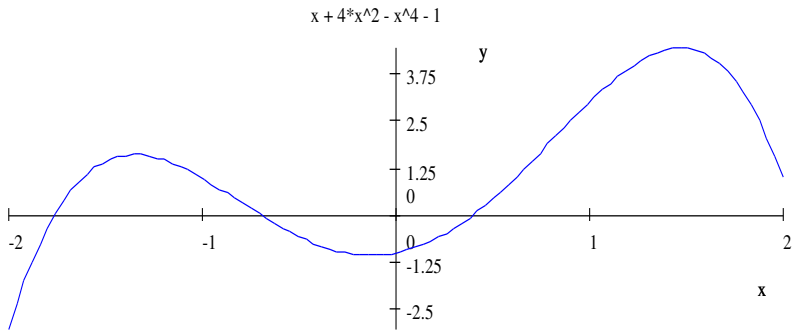
$$f(x) \approx f(x_0) + \frac{f''(x_0)}{2} \cdot (x - x_0)^2.$$

Da $(x - x_0)^2 > 0$ für $x \neq x_0$ ist, sind die Funktionswerte in der Umgebung größer als $f(x_0)$, wenn $f''(x_0) > 0$ gilt (Minimum). Für $f''(x_0) < 0$ sind die Funktionswerte in der Umgebung kleiner als $f(x_0)$ (Maximum).

---

**Beispiel 6.34:** Betrachte $f(x) = x + 4\,x^2 - x^4 - 1$:

```
>> f:= x -> x + 4*x^2 - x^4 - 1:
>> plotfunc2d(f(x), x = -2..2)
```




Um die Kandidaten für die Extrema zu finden, werden (numerische Approximationen der) Lösungen der Gleichung $f'(x) = 0$ berechnet. Für numerische Lösungen sind die MuPAD-Funktionen `numeric::solve` oder auch `numeric::fsolve` zuständig. Für polynomiale Gleichungen wird eine Menge aller Lösungen geliefert. Die einzelnen Lösungen lassen sich durch „indizierten Zugriff“ `Kandidaten[1]` etc. auswählen:

```
>> Kandidaten:= numeric::solve(f'(x) = 0, x)

          {-1.346997409, -0.1260001926, 1.472997601}
```

Diese Werte werden in die 2-te Ableitung von $f$ eingesetzt:

```
>> f''(Kandidaten[1])
                          -13.77282422
>> f''(Kandidaten[2])
                           7.809487418
>> f''(Kandidaten[3])
                           -18.0366632
```

Nach Satz 6.33 ist der erste Kandidat ein Maximum, der zweite Kandidat ein Minimum, der dritte Kandidat ein Maximum. Die Graphik bestätigt dies.

---

## 6.5 Die de l'Hospitalsche Regel

In $\frac{0}{0}$–Situationen kann man durch Ableiten auch Grenzwerte bestimmen.

**Satz 6.35:** (de l'Hospitalsche Regel)

*Seien $f$ und $g$ differenzierbar, es gelte $f(x_0) = g(x_0) = 0$. Dann gilt*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

*falls der rechte Grenzwert existiert.*

**„Beweis:“** Intuitiv: Approximiere Zähler und Nenner durch das Taylor–Polynom ersten Grades:

$$\frac{f(x)}{g(x)} \approx \frac{f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)}{g(x_0) + g'(x_0) \cdot (x - x_0)} = \frac{f'(x_0) \cdot (x - x_0)}{g'(x_0) \cdot (x - x_0)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}.$$

Für eine saubere Durchführung des Beweises benutze man den Mittelwertsatz 6.20 (unter der Zusatzannahme, dass $f'$ und $g'$ stetig seien. Die Regel gilt aber auch ohne diese Stetigkeit.)

Q.E.D.

---

**Beispiel 6.36:** Betrachte erneut die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - 1}{x} & \text{für } x \neq 0, \\ 1 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

aus Beispiel 4.15. Für den Punkt $x_0 = 0$ liegt eine $\frac{0}{0}$–Situation vor. Mit de l'Hospital folgt

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{d}{dx}\,(e^x - 1)}{\frac{d}{dx}\,x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{1} = \lim_{x\to 0} e^x = e^0 = 1,$$

wobei in jedem Schritt die Existenz des jeweils rechts stehenden Grenzwerts vorausgesetzt wird (was gerechtfertigt ist, sobald man ganz rechts angekommen ist).

---

Die de l'Hospitalsche Regel kann auch mehrfach hintereinander angewendet werden:

---

**Beispiel 6.37:** Betrachte $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{2\cdot x} - 1 - 2\cdot x}{x^2}$. Nach einer Anwendung von de l'Hospital trifft man beim Quotienten der Ableitungen wieder auf eine $\frac{0}{0}$–Situation und kann de l'Hospital erneut anwenden:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{2\cdot x} - 1 - 2\cdot x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{d}{dx}\,(e^{2\cdot x} - 1 - 2\cdot x)}{\frac{d}{dx}\,x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2\cdot e^{2\cdot x} - 2}{2\cdot x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{e^{2\cdot x} - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{d}{dx}\,(e^{2\cdot x} - 1)}{\frac{d}{dx}\,x} = \lim_{x\to 0} \frac{2\cdot e^{2\cdot x}}{1} = 2\cdot e^{2\cdot 0} = 2.$$

---

**Bemerkung 6.38:** *Die de l'Hospitalsche Regel*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

*gilt auch für* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \infty$.

---

**Beispiel 6.39:** Mit $f(x) = \ln(x+1)$, $g(x) = \ln(x)$, $f'(x) = \frac{1}{x+1}$, $g'(x) = \frac{1}{x}$:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x+1)}{\ln(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x+1} \overset{(*)}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1} = 1,$$

wobei in $(*)$ de l'Hospital ein zweites Mal angewendet wurde.

---

**Beispiel 6.40:** Mit kleinen Tricks bekommt man eine de l'Hospital-Technik auch sofort für Situationen wie z.B. $0\cdot\infty$ oder auch $1^\infty$.

Für $0\cdot\infty$ ist der Standardtrick, $\infty$ als $1/0$ (oder manchmal $0$ als $1/\infty$) zu schreiben. Z.B.:

$$\lim_{x\to\infty} x\cdot(e^{1/x} - 1) = \lim_{x\to\infty} \frac{e^{1/x} - 1}{1/x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{d}{dx}\,(e^{1/x} - 1)}{\frac{d}{dx}\,\frac{1}{x}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{-\frac{1}{x^2}\cdot e^{1/x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} e^{1/x} = 1.$$

Hierbei wurde die ursprüngliche $\infty \cdot 0$–Situation durch das Umschreiben $x = \frac{1}{1/x}$ in eine $\frac{0}{0}$–Situation verwandelt, auf die de l'Hospital anwendbar ist.

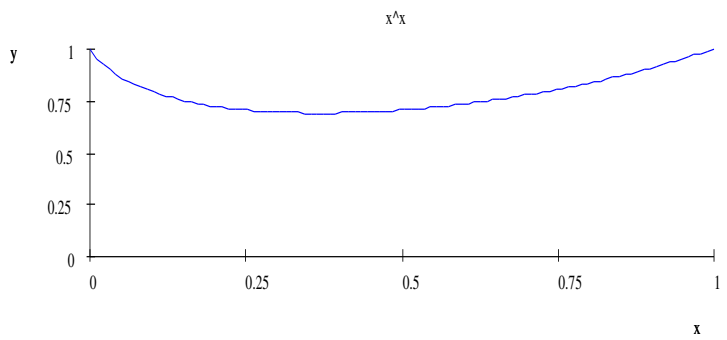
Für eine $1^\infty$–Situation ist der Standardtrick, die identische Abbildung in der Form $y = \exp(\ln(y))$ einzubringen, was die $1^\infty$–Situation in ein $0 \cdot \infty$–Problem verwandelt (welches dann wie oben zu behandeln ist). Beispiel:

$$\lim_{x\to 0+0} x^x = \lim_{x\to 0+0} e^{\ln(x^x)} = \lim_{x\to 0+0} e^{x\cdot\ln(x)} = e^{\lim\limits_{x\to 0+0}(x\cdot\ln(x))}.$$

Hier ist das $0\cdot(-\infty)$–Problem $\lim\limits_{x\to 0+0} x\cdot\ln(x)$ entstanden, was wie oben per de l'Hospital gelöst wird, indem es in ein $\frac{\infty}{\infty}$–Problem (genauer: in ein $\frac{-\infty}{\infty}$–Problem) umgeschrieben wird:

$$\lim_{x\to 0+0} x\cdot\ln(x) = \lim_{x\to 0+0} \frac{\ln(x)}{1/x} = \lim_{x\to 0+0} \frac{\frac{d}{dx}\ln(x)}{\frac{d}{dx}\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0+0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0+0}(-x) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{x\to 0+0} x^x = e^{\lim\limits_{x\to 0+0} x\cdot\ln(x)} = e^0 = 1.$$

Der Grenzwert wird durch die folgende MuPAD–Graphik bestätigt:

```
>> plotfunc2d(x^x, x = 0..1, ViewingBox = [0..1, 0..1])
```