Kapitel 4

Funktionen und Stetigkeit

4.1 Funktionen

$\boxed{\downarrow 11.11.03}$

Definition 4.1:

Eine Funktion $f : D \mapsto \mathbb{C}$ ist eine Zuordnung $f : z \mapsto f(z)$ einer Zahl $z \in D \subset \mathbb{C}$ zu einem **„Bildwert“** *$f(z) \in \mathbb{C}$. Der Punkt z heißt auch* **„Urbild“** *von $f(z)$. Die Menge $D \subset \mathbb{C}$ heißt* **„Definitionsbereich“**, *die Menge*

$$f(D) := \Big\{ f(z);\ z \in D \Big\}$$

heißt **„Bildbereich“** *oder auch* **„Wertebereich“** *der Funktion.*

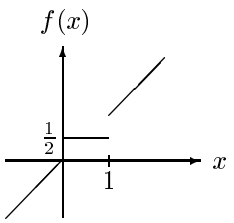
Eine <u>*reelle*</u> *Funktion $f : D \subset \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ heißt*

- **monoton steigend**, *wenn $f(x) \leq f(y)$ gilt*
- **streng monoton steigend**, *wenn $f(x) < f(y)$gilt*
- **monoton fallend**, *wenn $f(x) \geq f(y)$ gilt*
- **streng monoton fallend**, *wenn $f(x) > f(y)$ gilt*

für alle $x, y \in D$ mit $x < y$.

Beispiel 4.2: a) Die (stückweise definierte) Funktion $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{für } x \leq 0, \\ \frac{1}{2} & \text{für } 0 < x < 1, \\ x & \text{für } 1 \leq x \end{cases}$$

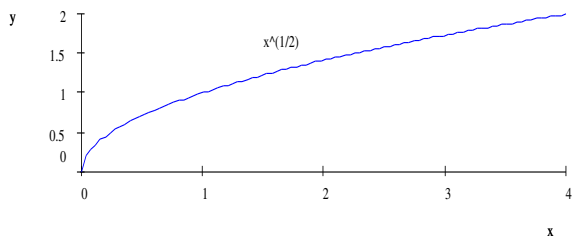


ist monoton steigend (aber nicht streng monoton steigend). Der Definitionsbereich ist $\mathbb{R}$, der Bildbereich ist $f(\mathbb{R}) = (-\infty, 0] \cup \left\{\frac{1}{2}\right\} \cup [1, \infty)$.
Die MuPAD-Graphik dazu (`piecewise` erzeugt stückweise definierte Funktionen):

```
>> f:= piecewise([x <= 0, x],
                 [0 < x and x < 1, 1/2],
                 [1 <= x, x])
>> plotfunc2d(f(x), x = -2..2)
```

b) Die Funktion $f : [0, \infty) \mapsto [0, \infty)$, $f(x) = \sqrt{x}$ ist streng monoton steigend. Die MuPAD-Graphik dazu (`sqrt` ist die Wurzelfunktion):

```
>> plotfunc2d(sqrt(x), x = 0..4)
```



4.2 Stetigkeit

Definition 4.3: (Stetigkeit)

Eine Funktion $f : D \subset \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ heißt **stetig am Punkt** *$z^* \in D$, wenn für* **jede** *gegen z^* konvergierende Folge (z_n) mit $z_n \in D$ gilt:*

$$\lim_{n\to\infty} f(z_n) = f(z^*).$$

Die Funktion f heißt **stetig auf dem Bereich** *D, wenn sie an allen Punkten $x^* \in D$ stetig ist.*

Definition 4.3 ist ein Möglichkeit, die Stetigkeit an einem Punkt zu definieren. Hier eine andere Variante:

Definition 4.4: (Stetigkeit, Version 2)

Eine Funktion $f : D \subset \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ heißt **stetig am Punkt** *$z^* \in D$, wenn für jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass*

$$|f(z) - f(z^*)| < \epsilon$$

gilt für alle z in der Menge $\{z \in D; |z - z^*| < \delta\}$.

Anschaulich: gibt man sich eine Abweichung ϵ der Funktionswerte $f(z)$ vom Wert $f(z^*)$ vor, so gibt es stets eine Umgebung von z^*, auf der die Funktionswerte nicht mehr als ϵ von $f(z^*)$ abweichen.

Satz 4.5: (Äquivalenz der Stetigkeitsdefinitionen)

Die Definitionen 4.3 und 4.4 sind äquivalent.

Beweis: (für technisch Interessierte)

4.3 ⇒ 4.4 Sei f im Sinne von 4.3 an der Stelle z^* stetig. Sei $\epsilon > 0$ vorgegeben. Angenommen, es gäbe kein $\delta > 0$ mit der Eigenschaft, dass $|f(z) - f(z^*)| < \epsilon$ gilt für alle z in D mit $|z - z^*| < \delta$. D.h., zu jedem $\delta > 0$ gibt es (mindestens) ein z in D mit $|z - z^*| < \delta$, für das $|f(z) - f(z^*)| \geq \epsilon$ gilt. Zu jedem $\delta = 1/n$, $n \in \mathbb{N}$, sei z_n ein solches Element. Damit haben wir eine gegen z^* konvergierende Folge (z_n), für die nicht $f(z_n)$ gegen $f(z^*)$ konvergiert. Widerspruch zur Stetigkeit am Punkt z^* nach Definition 4.3.

4.4 ⇒ 4.3 Sei f im Sinne von 4.4 an der Stelle z^* stetig. Sei z_n eine beliebige gegen z^* konvergierende Folge. Es ist zu zeigen, dass $f(z_n)$ gegen $f(z^*)$ konvergiert. Zu $\epsilon > 0$ existiert nach Definition 4.4 ein δ, so dass $|f(z_n) - f(z^*)| < \epsilon$ gilt für alle z_n in D mit $|z_n - z^*| < \delta$. Da z_n gegen z^* konvergiert, gibt es zu δ ein N, so dass $|z_n - z^*| < \delta$ für alle $n \geq N$. Damit haben wir zu $\epsilon > 0$ ein $N = N(\delta(\epsilon))$ gefunden, so dass $|f(z_n) - f(z^*)| < \epsilon$ gilt für alle $n \geq N$. Also konvergiert $f(z_n)$ gegen $f(z^*)$.

Q.E.D.

Die formale Definition 4.3 der Stetigkeit sollte man sich so merken:

Merkregel 4.6:

Für beliebige konvergente Folgen z_n gilt

$$\lim_{n\to\infty} f(z_n) = f\Big(\lim_{n\to\infty} z_n\Big),$$

wenn die Funktion f an der Stelle $\lim\limits_{n\to\infty} z_n$ stetig ist.

Definition 4.7: (einseitige Stetigkeit)

Für <u>reelle</u> Funktionen $f : D \subset \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ wird zusätzlich definiert:

Die Funktion f heißt **rechtsseitig stetig am Punkt** *$x^* \in D$, wenn $\lim_n f(x_n) = f(x^*)$ gilt für alle gegen x^* konvergierenden Folgen (x_n) mit $x_n \geq x^*$.*

Die Funktion f heißt **linksseitig stetig am Punkt** *$x^* \in D$, wenn $\lim_n f(x_n) = f(x^*)$ gilt für alle gegen x^* konvergierenden Folgen (x_n) mit $x_n \leq x^*$.*

Ähnlich wie die ϵ–$N(\epsilon)$–Definition eines Grenzwertes für Folgen ist diese Definition von Stetigkeit (entweder 4.3 oder 4.4) technisch und nur in sehr einfachen Fällen praktisch handhabbar (zumindestens für Nicht-Mathematiker). Man verläßt sich in der Praxis wiederum auf Rechenregeln, mit denen Stetigkeit vererbt wird, siehe Satz 4.10. Zunächst einige einfache Beispiele mit der formalen Definition:

Beispiel 4.8: a) Betrachte die konstante Funktion $f : z \in \mathbb{C} \mapsto c$ (mit einer konstanten Zahl $c \in \mathbb{C}$). Sei (z_n) eine beliebige gegen z^* konvergierende Folge. Es gilt

$$\lim_{n\to\infty} f(z_n) = \lim_{n\to\infty} c = c = f(z^*).$$

Damit ist f an jedem Punkt $z^* \in \mathbb{C}$ stetig.

b) Betrachte die Funktion $f(z) = z$. Sei (z_n) eine beliebige gegen z^* konvergierende Folge. Es gilt

$$\lim_{n\to\infty} f(z_n) = \lim_{n\to\infty} z_n = z^* = f(z^*).$$

Damit ist f an jedem Punkt $z^* \in \mathbb{C}$ stetig.

c) Betrachte die Funktion $f(z) = z^2+1$. Sei (z_n) eine beliebige gegen z^* konvergierende Folge. Mit den Rechenregeln für Grenzwerte gilt

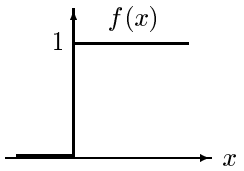
$$\lim_{n\to\infty} f(z_n) = \lim_{n\to\infty} (z_n^2 + 1) = (\lim_{n\to\infty} z_n)^2 + 1 = (z^*)^2 + 1 = f(z^*).$$

Damit ist f an jedem Punkt $z^* \in \mathbb{C}$ stetig.

Man sieht an diesen Beispielen bereits, dass die Rechenregeln für Grenzwerte sofort zu analogen Rechenregeln für die Vererbung von Stetigkeit führen. Vorher aber noch ein Beispiel zur Unstetigkeit und „einseitigen Stetigkeit“:

Beispiel 4.9: Betrachte die reelle Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0, \\ 1 & \text{für } 0 \leq x. \end{cases}$$



Diese Funktion ist überall stetig, außer am Punkt $x = 0$. Dort ist sie aber immer noch rechtsseitig stetig: nähert man sich dem Punkt $x = 0$ von rechts, so sind die Funktionswerte konstant 1. Der Grenzwert der Funktionswerte ist wiederum 1 und stimmt mit dem Funktionswert $f(0) = 1$ überein.
Die Funktion ist aber nicht linksseitig stetig: nähert man sich dem Punkt $x = 0$ von links, so sind die Funktionswerte konstant 0. Der Grenzwert der Funktionswerte ist wiederum 0 und stimmt **nicht** mit dem Funktionswert $f(0) = 1$ überein.
Eine stetige Funktion muss aber offensichtlich sowohl links- als auch rechtsseitig stetig sein, damit ist f am Punkt $x = 0$ unstetig.

Nun die Rechenregeln:

Satz 4.10: (Rechenregeln zur Stetigkeit)

Seien f und g Funktionen. Sei z^* ein Punkt aus dem Schnitt der Definitionsbereiche von f und g (d.h., sowohl $f(z^*)$ als auch $g(z^*)$ ist definiert). Seien f und g am Punkt z^* stetig. Sei c eine Konstante. Dann gilt:

- *Die Funktion $z \mapsto c \cdot f(z)$ ist am Punkt z^* stetig.*
- *Die Funktion $z \mapsto f(z) + g(z)$ ist am Punkt z^* stetig.*
- *Die Funktion $z \mapsto f(z) - g(z)$ ist am Punkt z^* stetig.*
- *Die Funktion $z \mapsto f(z) \cdot g(z)$ ist am Punkt z^* stetig.*
- *Die Funktion $z \mapsto \frac{f(z)}{g(z)}$ ist am Punkt z^* stetig,* $\boxed{\textbf{falls } g(z^*) \neq 0}$.
- *Die Funktion $z \mapsto \sqrt{f(z)}$ ist am Punkt z^* stetig.*

Weiterhin gilt: ist g am Punkt z^* stetig und f am Punkt $g(z^*)$, so ist $z \mapsto f(g(z))$ am Punkt z^* stetig.

Beweis: Betrachte eine beliebige Folge $(z_n) \to z^*$ und wende die Rechenregeln 2.13 an.

Q.E.D.

Beispiel 4.11: Die Funktion $f(x) = \frac{x+1}{x^2+1}$ ist überall auf $\mathbb{R}$ stetig: Da konstante Funktionen sowie $g(x) = x$ stetig sind, ist auch $h(x) = x + 1$ stetig. Analog ist $k(x) = x^2$ und damit auch $j(x) = x^2 + 1$ stetig. Außerdem gilt $j(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, womit der Quotient $f(x) = \frac{h(x)}{j(x)}$ ebenfalls überall stetig ist.
Betrachtet man die Funktion in der komplexen Ebene, so ist sie überall stetig bis auf die beiden Punkte $\pm i$, wo der Nenner verschwindet.

An diesem Beispiel merkt man, dass folgende „Pi mal Daumen-Regel“ gilt:

Merkregel 4.12:

Aus stetigen Funktionen „zusammengesetzte“ Funktionen sind wieder stetig. Lediglich an den Stellen, wo man durch 0 teilt, kann die Funktion unstetig sein.

Manchmal helfen die Rechenregeln nicht, und man muss technisch abschätzen:

Beispiel 4.13: Die in Definition 2.20/Beispiel 3.24 eingeführte Exponentialfunktion $z \mapsto \exp(z)$ ist stetig am Nullpunkt. Betrachte dazu eine beliebige Nullfolge h_n, für die o.B.d.A. $|h_n| \leq 1$ gelte. Wegen

$$|e^{h_n} - 1| = \left|1 + h_n + \frac{h_n^2}{2!} + \frac{h_n^3}{3!} + \cdots \; - \; 1\right| = |h_n| \cdot \left|1 + \frac{h_n}{2!} + \frac{h_n^2}{3!} + \cdots\right|$$

$$\leq |h_n| \cdot \left(1 + \frac{|h_n|}{2!} + \frac{|h_n|^2}{3!} + \cdots\right) \leq |h_n| \cdot \left(1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots\right) = |h_n| \cdot (e^1 - 1) \leq 2 \cdot |h_n|$$

ist $e^{h_n} - 1$ eine Nullfolge, also $\lim\limits_{n\to\infty} e^{h_n} = 1 = e^0$. Dies ist die Stetigkeit am Nullpunkt.

Satz 4.14: (Stetigkeit der Exponentialfunktion)

Die in Definition 2.20/Beispiel 3.24 eingeführte Exponentialfunktion $z \mapsto \exp(z)$ mit dem Definitionsbereich $\mathbb{C}$ ist an allen Punkten $z \in \mathbb{C}$ stetig.

Beweis: Sei (h_n) eine beliebige Nullfolge. Wegen der Funktionalgleichung 2.22 $e^{a+b} = e^a \cdot e^b$ und der gerade gezeigten Stetigkeit im Nullpunkt folgt

$$\lim_{n\to\infty} e^{z+h_n} = \lim_{n\to\infty} e^z \cdot e^{h_n} = e^z \cdot \lim_{n\to\infty} e^{h_n} = e^z \cdot e^{\lim\limits_{n\to\infty} h_n} = e^z \cdot e^0 = e^z.$$

Q.E.D.

12.11.03↓

Die Merkregel 4.12 besagt, dass es potentielle Unstetigkeiten gibt, wenn man durch 0 teilt. **Aber:** es kann auch passieren, dass an diesen Stellen Stetigkeit vorliegt (nämlich bei speziellen $\frac{0}{0}$ –Situation):

Beispiel 4.15: Die Funktion

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{z^2 - 1}{z - 1} & \text{für } z \neq 1, \\ 2 & \text{für } z = 1 \end{cases}$$

ist überall (auch an der Stelle $z = 1$) stetig. Dies ist leicht gezeigt: Wegen $z^2 - 1 = (z + 1) \cdot (z - 1)$ ist f nichts anderes als eine komplizierte Schreibweise für $f(z) = z + 1$.

Etwas komplizierter ist

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{e^z - 1}{z} & \text{für } z \neq 0, \\ 1 & \text{für } z = 0. \end{cases}$$

Auch diese Funktion ist überall (auch an der Stelle $z = 0$) stetig, was durch folgende Betrachtung plausibel wird:

$$\frac{e^z - 1}{z} = \frac{1}{z} \cdot \left(1 + z + \frac{z^2}{2!} + \cdots \; - \; 1\right) = \frac{1}{z} \cdot \left(z + \frac{z^2}{2!} + \cdots\right) = 1 + \frac{z}{2!} + \cdots .$$

Eine $\frac{0}{0}$–Situation läßt sich mit Hilfe der „l'Hospitalschen Regel“ systematisch untersuchen, siehe Beispiel 6.36.

4.3 Grenzwerte

Betrachtet man $f(z) = (e^z - 1)/z$, so ist diese Funktion zunächst mal für $z = 0$ nicht definiert, sie hat dort eine **„Definitionslücke“**. In Beispiel 4.15 haben wir einen geeigneten Wert definiert, der die Funktion insgesamt stetig macht. Dieser Wert ergibt sich als „Grenzwert“ der Funktion, wenn das Argument gegen den kritischen Wert strebt.

Definition 4.16: (Grenzwerte bei Funktionen)

Betrachte eine Funktion f auf dem Defintionsbereich $D = \mathbb{C} \setminus \{z^*\}$. Der Wert f^* heißt **„Grenzwert (Limes)“** *von f für $z \to z^*$, wenn für* **jede** *gegen z^* konvergierende Folge (z_n) mit $z_n \in D$ gilt:*

$$\lim_{n\to\infty} f(z_n) = f^*.$$

Die Schreibweise ist dann: $\quad f^* = \lim_{z\to z^*} f(z).$

Die Funktion

$$z \in D \cup \{z^*\} \mapsto \begin{cases} f(z) & \text{für } z \in D, \\ f^* & \text{für } z = z^* \end{cases}$$

nennt man die **„stetige Fortsetzung“** *von f auf den erweiterten Definitionsbereich $D \cup \{z^*\}$. Nach Konstruktion ist die Fortsetzung stetig am Punkt z^*.*

Definition 4.17: (Einseitige Grenzwerte bei reellen Funktionen)

Für <u>*reelle*</u> *Funktionen $f : D \setminus \{x^*\} \subset \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ wird weiterhin definiert::*

Der Wert f^* heißt **„rechtsseitiger Grenzwert“** *von f für $x \to x^*$, wenn $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f^*$ gilt für alle gegen x^* konvergierende Folgen (x_n) mit $x_n > x^*$. Schreibweise:*

$$f^* = \lim_{x\to x^*+0} f(x).$$

Der Wert f^* heißt **„linksseitiger Grenzwert“** *von f für $x \to x^*$, wenn $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f^*$ gilt für alle gegen x^* konvergierende Folgen (x_n) mit $x_n < x^*$. Schreibweise:*

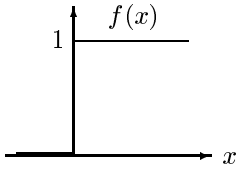
$$f^* = \lim_{x\to x^*-0} f(x).$$

Beispiel 4.18: Für eine am Punkt x^* definierte und dort stetige reelle Funktion gilt immer

$$\lim_{x\to x^*-0} f(x) = \lim_{x\to x^*+0} f(x) = \lim_{x\to x^*} f(x) = f(x^*).$$

Beispiel 4.19: Betrachte

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0, \\ 1 & \text{für } 0 \leq x. \end{cases}$$



Hier gilt für die Sprungstelle $x^* = 0$:

$$\lim_{x \to 0-0} f(x) = 0, \quad \lim_{x \to 0+0} f(x) = 1, \quad \lim_{x \to 0} f(x) \text{ existiert nicht.}$$

Beispiel 4.20: Für die reelle Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ gilt

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = 0.$$

Formale Begründung: Sei (x_n) eine beliebige gegen ∞ konvergierende Folge:

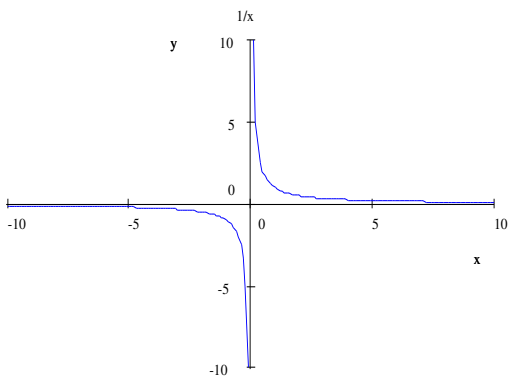
$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{x_n} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

Am Punkt $x = 0$ ist f unstetig („singulär"): die Funktion hat eine sogenannte Polstelle. Wir lassen die Werte $\pm\infty$ wieder als Grenzwerte zu. Dann existieren einseitige Grenzwerte:

$$\lim_{x \to 0+0} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \to 0-0} f(x) = -\infty.$$

Das Argument `ViewingBox = [-10..10, -10..10]` im folgenden Befehl weist MuPAD an, alles außerhalb der angegebenen Bereiche zu ignorieren, wodurch sich eine gut skalierte Graphik ergibt:

```
>> plotfunc2d(1/x, x = -10..10,
              ViewingBox = [-10..10, -10..10])
```



Mit dem Grenzwertbegriff für Funktionen können wir die Stetigkeit an einem Punkt auch folgendermaßen charakterisieren:

Satz 4.21: (Stetigkeit von Funktionen über $\mathbb{R}$)

Eine auf einem Intervall $D = (a, b) \subset \mathbb{R}$ definierte Funktion f ist am Punkt $x^* \in D$ genau dann linksseitig stetig, wenn

$$\lim_{x \to x^* - 0} f(x) = f(x^*)$$

gilt. Sie ist genau dann rechtsseitig stetig, wenn

$$\lim_{x \to x^* + 0} f(x) = f(x^*)$$

gilt. Sie ist genau dann stetig, wenn der links- und rechtsseitige Grenzwert existiert und beide Grenzwerte mit dem Funktionswert übereinstimmen:

$$\lim_{x \to x^* - 0} f(x) = \lim_{x \to x^* - 0} f(x) = f(x^*).$$

Beweis: Das folgt unmittelbar aus den Definitionen. Für die letzte Aussage beachte, dass eine beliebige gegen x^* konvergierende Folge aufgespalten werden kann in die Teilfolge aller Elemente, die kleiner sind als x^* und die Teilfolge aller Elemente, die größer als x^* sind. Die Konvergenz der Teilfolgen gegen $f(x^*)$ ist die links- bzw. rechtsseitige Stetigkeit, die Konvergenz der Gesamtfolge gegen $f(x^*)$ ist die Stetigkeit.

Q.E.D.

4.4 Der Zwischenwertsatz, das Min/Max-Prinzip

Es folgen zwei sehr wichtige und fundamentale Sätze für <u>reelle</u> stetige Funktionen.

Satz 4.22: (Der Zwischenwertsatz für stetige Funktionen)

Sei $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ auf dem Intervall $[a, b] \subset \mathbb{R}$ stetig. Dann nimmt f auf dem Intervall alle Werte zwischen $f(a)$ und $f(b)$ an: zu jedem y zwischen den Werten $f(a)$ und $f(b)$ existiert mindestens ein $x \in [a, b]$ mit $f(x) = y$.

Beweis: (nicht nur für technisch Interessierte)
Wir benutzen einen expliziten Algorithmus (**„Intervallhalbierung“**), um die Lösung von $f(x) = y$ zu finden.
Sei $f(a) \neq f(b)$ (sonst gibt es nichts zu zeigen). O.B.d.A. gelte $f(a) < f(b)$ (sonst betrachte statt $-f$ statt f). Gegeben sei y mit $f(a) \leq y \leq f(b)$. Für $y = f(a)$ bzw. $y = f(b)$ ist die Behauptung sicher mit $x = a$ bzw.$x = b$ erfüllt. Es gelte also nun $f(a) < y < f(b)$.

Betrachte den Mittelpunkt $m = (a+b)/2$ des Intervalls. Gilt $f(m) = y$, sind wir fertig. Für $f(m) > y$ betrachten wir die linke Intervallhälfte $[a_1, b_1] := [a, m]$, für $f(m) < y$ betrachten wir die rechte Intervallhälfte $[a_1, b_1] := [m, b]$. Nach Konstruktion ist die Ausgangssituation

$$f(a_1) \leq y \leq f(b_1)$$

für das neue Intervall $[a_1, b_1]$ wieder hergestellt. Das betrachtete Intervall $[a_1, b_1]$ wird nun erneut zu einem Intervall $[a_2, b_2]$ halbiert usw.
Es ergibt sich eine Folge von immer kleineren Intervallen $[a_n, b_n]$, deren linke Enden a_n eine monoton steigende und deren rechten Enden b_n eine monoton fallende Folge bildet. Nach Konstruktion gilt für alle Intervallenden

$$f(a_n) \leq y \leq f(b_n).$$

Nach Satz 2.24 konvergieren die monotonen beschränkten Folgen (a_n) und (b_n) gegen Grenzwerte a^* bzw b^*, die übereinstimmen müssen, da die Intervalllängen $b_n - a_n = (b-a)/2^n$ gegen Null konvergieren. Da f am Punkt $x := a^* = b^*$ stetig ist, folgt

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(\lim_{n\to\infty} a_n) \leq y \leq f(\lim_{n\to\infty} b_n) = \lim_{n\to\infty} f(b_n) = f(x),$$

also $f(x) = y$.

Q.E.D.

Bemerkung 4.23: *Der im Beweis des Zwischenwertsatzes verwendete Algorithmus (***„Intervallhalbierung“, „Bi-Sektion“***) ist ein auch in der Praxis anwendbarer Suchalgorithmus zum approximativen Lösen einer Gleichung $f(x) = y$. Er liefert eine Folge von Intervallschachtelungen $[a_n, b_n]$ für die Lösung. Die Genauigkeit ist die Länge des Intervalls, auf das die Lösung eingeschränkt werden konnte. Mit $2^{10} = 1024 \approx 10^3$ gilt die*

Faustregel: *Durch je 10 Halbierungsschritte gewinnt man jeweils etwa 3 Dezimalstellen Genauigkeit hinzu.*

Bemerkung 4.24: *Der Beweis verwendet über Satz 2.24 das Supremumsaxiom für $\mathbb{R}$. In der Tat hat beispielsweise die stetige Funktion $f(x) = x^2 - 2$ auf dem Intervall $[0, 2] \cap \mathbb{Q}$ keine Nullstelle, obwohl $f(0) = -2 < 0 < f(2) = 2$ gilt, da die Nullstelle $x = \sqrt{2}$ nicht rational ist.*

Ein weiteres wichtiges Ergebnis für stetige reelle Funktionen ist, dass der Bildbereich eines beschränkten abgeschlossenen Intervalls wieder ein beschränktes abgeschlossenes Intervall ist. Mit anderen Worten: die Funktion nimmt auf einem abgeschlossenen Intervall immer (mindestens) ein globales Minimum und ein globales Maximum an:

Satz 4.25: (Das Min/Max–Prinzip für stetige Funktionen)

Sei $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ stetig auf dem Intervall $[a,b] \subset \mathbb{R}$. Dann existiert ein $x_{min} \in [a,b]$ und ein $x_{max} \in [a,b]$ mit

$$f(x_{min}) \leq f(x) \leq f(x_{max})$$

für alle $x \in [a,b]$.

Beweis: (für technisch Interessierte) Wir konstruieren x_{max}. Die Bildmenge $f([a,b]) := \{f(x); x \in [a,b]\}$ ist nach oben beschränkt. Sonst gäbe es nämlich eine uneigentlich nach ∞ konvergierende Folge (y_n) in $f([a,b])$ mit (nicht unbedingt eindeutig bestimmten) Urbildern $x_n \in [a,b]$. Nach Bolzano-Weierstrass 2.39/Bemerkung 2.40 gibt es eine gegen einen Grenzwert $x^* \in [a,b]$ konvergierende Teilfolge (x_{n_k}) in $[a,b]$, für die

$$\infty = \lim_{k\to\infty} y_{n_k} = \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(\lim_{k\to\infty} x_{n_k}) = f(x^*)$$

gelten müsste. Widerspruch!
Da $f([a,b])$ nach oben beschränkt ist, existiert gemäß des Supremumsaxioms 1.10 das Supremum $Y = \sup f([a,b])$ aller Bildpunkte. Es gilt zu zeigen, dass dieses Supremum in der Menge $f([a,b])$ liegt, also ein Maximum ist:
Da $Y - \frac{1}{n}$ keine obere Schranke von $f([a,b])$ sein kann (Y ist als Supremum die kleinste obere Schranke), gibt es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in [a,b]$ mit

$$Y - \frac{1}{n} < f(x_n) \leq Y.$$

Wiederum existiert nach Bolzano-Weierstrass 2.39/Bemerkung 2.40 eine gegen einen Grenzwert $x^* \in [a,b]$ konvergente Teilfolge (x_{n_k}), für die

$$Y = \lim_{k\to\infty} \left(Y - \frac{1}{n_k}\right) \leq \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) \leq Y$$

gilt. Mit der Stetigkeit von f folgt

$$Y = \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f\left(\lim_{k\to\infty} x_{n_k}\right) = f(x^*).$$

Also ist $f(x^*) = \max f([a,b])$, d.h., $x_{max} = x^*$ ist die gesuchte Maximumsstelle.

Die Minimumstelle x_{min} mit $f(x_{min}) = \min f([a,b])$ ergibt sich sofort als die Maximumsstelle von $-f$.

Q.E.D.

Bemerkung 4.26: *Die Abgeschlossenheit des Intervalls $[a, b]$ ist wesentlich für die Existenz von Minimum und Maximum. Beispielsweise hat für das offene Intervall $(0, 1)$ die auf $(0, 1)$ stetige Funktion $f(x) = 1/x$ offensichtlich weder ein Maximum noch ein Minimum!*

4.5 Umkehrfunktionen

Definition 4.27: (Invertierbarkeit von Funktionen)

Eine Funktion $f : D \mapsto W$ von einem Definitionsbereich D in den Wertebereich $W = f(D) = \{f(x); x \in D\}$ heißt **invertierbar**, *wenn zu jedem Wert $y \in W$* **genau ein** *Urbild $x \in D$ mit $f(x) = y$ existiert.*

Beispiel 4.28: Die Funktion $f(x) = x^2$ auf dem Definitionsbereich $D = [0, \infty)$ mit dem Wertebereich $f(D) = [0, \infty)$ ist invertierbar: zu $y = f(x) = x^2$ gehört genau ein Urbild $x = \sqrt{y}$ im Definitionsbereich D.

Die Funktion $f(x) = x^2$ auf dem Definitionsbereich $D = (-\infty, 0]$ mit dem Wertebereich $f(D) = [0, \infty)$ ist invertierbar: zu $y = f(x) = x^2$ gehört genau ein Urbild $x = -\sqrt{y}$ im Definitionsbereich D.

Die Funktion $f(x) = x^2$ ist nicht invertierbar, wenn man sie auf dem Definitionsbereich $D = \mathbb{R}$ betrachtet: Jetzt gibt es zu jedem $y = f(x) = x^2$ aus dem Wertebereich $f(D) = [0, \infty)$ **zwei Urbilder** $x = \sqrt{y}$ und $x = -\sqrt{y}$.

Definition 4.29: (Inverse einer Funktion)

Die Funktion $f : D \mapsto W$ von einem Definitionsbereich D in den Wertebereich $W = f(D) = \{f(x); x \in D\}$ sei invertierbar. Die **„Umkehrabbildung“ („Inverse“)** *von f ist die Funktion $f^{-1} : W \mapsto D$, die dem Punkt $y = f(x) \in W$ den (eindeutig bestimmten) Wert x zuordnet.*

Beispiel 4.30: Die Funktion $f(x) = x^2$ auf dem Definitionsbereich $D = [0, \infty)$ mit dem Wertebereich $W = f(D) = [0, \infty)$ hat die durch $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$ gegebene Inverse $f^{-1} : W \mapsto D$.

Die Funktion $f(x) = x^2$ auf dem Definitionsbereich $D = (-\infty, 0]$ mit dem Wertebereich $f(D) = [0, \infty)$ hat die durch $f^{-1}(y) = -\sqrt{y}$ gegebene Inverse $f^{-1} : W \mapsto D$.

Die Funktion $f(x) = x^2$ auf dem Definitionsbereich $D = \mathbb{R}$ hat keine Inverse.

Die Funktion $f(x) = 2 - 3 \cdot x$ auf dem Wertebereich $D = \mathbb{R}$ hat die Inverse $f^{-1}(y) = \frac{2-y}{3}$.

Um die Inverse zu bestimmen, muss man $y = f(x)$ nach x auflösen:

$$y = 2 - 3 \cdot x \quad \Longrightarrow \quad 3 \cdot x = 2 - y \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{2-y}{3}.$$

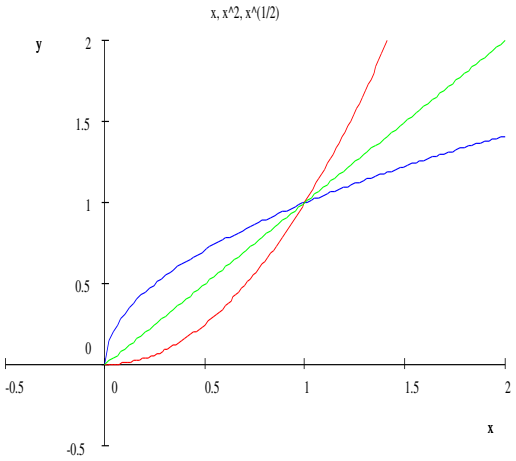
Graphische Darstellung der Inversen 4.31:

Hat man eine invertierbare Funktion f graphisch dargestellt, so hat man auch sofort den Graphen von f^{-1}. Der Graph von f ist eine Punktmenge (x, y) mit $y = f(x)$ in der x-y-Ebene. Der Graph von f^{-1} ist die Punktmenge (y, x) mit $y = f(x)$. Diese ergibt sich einfach durch Spiegelung an der „ersten Winkelhalbierenden“ (dies ist die durch $y = x$ gegebene Gerade).

Der Graph der Umkehrfunktion f^{-1} ist die Spiegelung des Graphen der Funktion f an der ersten Winkelhalbierenden.

Beispiel 4.32: Zur Demonstration hierzu einige MuPAD Graphiken. Betrachte $f(x) = x^2$ auf $D = [0, \infty)$, $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$. Statt $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$ wird $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ eingegeben (Goethe sagt dazu treffend: „Name ist Schall und Rauch“). Die Winkelhalbierende $y = x$ wird zusätzlich eingezeichnet:

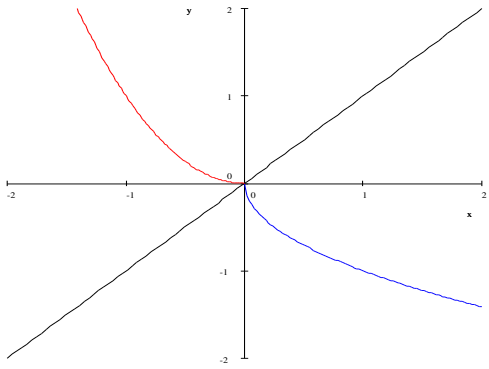
```
>> plotfunc2d(x, x^2, sqrt(x), x = 0..2,
              ViewingBox = [-0.5..2, -0.5..2])
```



Das selbe noch einmal, diesmal wird $f(x) = x^2$ aber auf dem Definitionsbereich $D = (-\infty, 0]$ betrachtet. Da die Inverse $f^{-1}(y) = -\sqrt{y}$ auf einem anderen Definitionsbereich

lebt ($y \geq 0, x \leq 0$), `plotfunc2d` aber alle Funktionen über einem gemeinsamen Bereich zeichnet, wird nun das folgende flexiblere plot-Konstrukt benutzt:

```
>> plot(// die Winkelhalbierende:
        plot::Function2d(x, x = -2..2, Color = RGB::Black),
        // f(x):
        plot::Function2d(x^2, x = -2..0, Color = RGB::Red),
        // die Inverse von f:
        plot::Function2d(-sqrt(y), y = 0..2, Color = RGB::Blue),
        ViewingBox = [-2..2, -2..2])
```



Bei streng monotonen Funktionen ist die Invertierbarkeit garantiert:

Satz 4.33: (Invertierbarkeit bei Monotonie)

Streng monotone <u>*reelle*</u> *Funktionen* $f : [a, b] \mapsto f([a, b])$ *sind immer invertierbar. Ist* f *streng monoton steigend, dann auch* f^{-1}*. Ist* f *streng monoton fallend, dann auch* f^{-1}*. Ist* f *monton und stetig, dann auch* f^{-1}*.*

Beweis: (für technisch Interessierte) Die Eindeutigkeit der Urbilder folgt unmittelbar aus der Monotonie, denn aus $x_1 \neq x_2$ (also entweder $x_1 < x_2$ oder $x_1 > x_2$) folgt per strenger Monotonie $f(x_1) \neq f(x_2)$. Die Monotonie von f^{-1} ist offensichtlich.
Zur Stetigkeit von f^{-1}. Sei o.B.d.A. f streng monoton wachsend (sonst betrachte $-f$). Wähle einen beliebigen Punkt y aus dem Wertebereich $f([a, b]) = [f(a), f(b)]$. Sei (y_n) eine beliebige gegen y konvergierende Folge, sei $x = f^{-1}(y)$. Wegen $(y_n) \to y$ gibt es zu jedem $\delta > 0$ ein $N(\delta)$, so dass

$$y_n \in [y - \delta, y + \delta]$$

gilt für alle $n \geq N(\delta)$. Zu $\epsilon > 0$ setze

$$\delta(\epsilon) = \min(y - f(x - \epsilon), f(x + \epsilon) - y) > 0.$$

Für alle $n \geq N(\delta(\epsilon))$ folgt dann

$$y_n \in [y - \delta(\epsilon), y + \delta(\epsilon)] \subset [f(x - \epsilon), f(x + \epsilon)],$$

also

$$f^{-1}(y_n) \in f^{-1}([f(x - \epsilon), f(x + \epsilon)]) = [f^{-1}(f(x - \epsilon)), f^{-1}(f(x + \epsilon))]$$
$$= [x - \epsilon, x + \epsilon].$$

Also: zu $\epsilon > 0$ haben wir ein $N(\delta(\epsilon))$ konstruiert, so dass

$$|f^{-1}(y_n) - x| = |f^{-1}(y_n) - f^{-1}(y)| \leq \epsilon$$

gilt für alle $n \geq N(\delta(\epsilon))$. Also ist f^{-1} stetig: $\lim\limits_{n\to\infty} f^{-1}(y_n) = f^{-1}(\lim\limits_{n\to\infty} y_n)$.

Q.E.D.

4.6 Wachstum von Funktionen, Landau-Symbole

Es gibt eine nützliche Schreibweise, mit der das Wachstum von Funktionen an interessanten Stellen elegant und schreibtechnisch äußerst effizient beschrieben wird. „Interessante Stellen“ sind dabei meist Nullstellen, Extrema oder Singularitäten.

Notation 4.34:

Seien f und g Funktionen, die in der Umgebung eines Punktes z_0 definiert seien. Bei reellen Funktionen betrachtet man oft auch die Punkte $z_0 = \pm\infty$.

- *$f(z) = O(g(z))$ im Limes $z \to z_0$ bedeutet, dass die Funktion $|f(z)|/|g(z)|$ auf einer Umgebung von z_0 nach oben beschränkt ist.*
- *$f(z) = o(g(z))$ im Limes $z \to z_0$ bedeutet $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)/g(z) = 0$.*

Beispiel 4.35:

$$e^z = O(1) \text{ im Limes } z \to 0, \quad e^z = 1 + O(z) \text{ im Limes } z \to 0,$$

$$e^z = 1 + z + O(z^2) \text{ im Limes } z \to 0, \quad e^z = 1 + z + o(z) \text{ im Limes } z \to 0,$$

$$\frac{x}{x+1} = O(x) \text{ im Limes } x \to 0, \quad \frac{x}{x+1} = O(1) \text{ im Limes } x \to \infty,$$

Beispiel 4.36: Für alle positiven k gilt

$$x^k = o(e^x) \text{ im Limes } x \to \infty$$

sowie

$$e^{-x} = o\Big(\frac{1}{x^k}\Big) \text{ im Limes } x \to \infty,$$

denn

$$\Big|\frac{e^{-x}}{1/x^k}\Big| = \Big|\frac{x^k}{e^x}\Big| = \Big|\frac{x^k}{1 + x + \cdots + \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} + \cdots}\Big| \leq \Big|\frac{(k+1)!}{x}\Big| \to 0 \quad \text{für } x \to \infty.$$

Anschaulich: die Funktion e^x wächst für gegen ∞ wachsendes x schneller als jede positive Potenz von x. Die Funktion e^{-x} fällt für gegen ∞ wachsendes x schneller ab als jede negative Potenz von x.