

Kapitel 11

Fourier-Entwicklungen

11.1 Hilbert-Raumstrukturen

11.1.1 Definitionen: Skalarprodukt und Norm

Gegeben sei eine $2 \cdot \pi$ -periodische Funktion $f(x)$, d.h., es gelte $f(x + 2 \cdot \pi) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Man kann sich solche Funktionen als über dem „Grundintervall“ $x \in [-\pi, \pi]$ definiert vorstellen, aber es ist für die Intuition meist nützlicher, sich solche Funktionen über ganz \mathbb{R} definiert mit der obigen Periodizität vorzustellen. Die einfachsten $2 \cdot \pi$ -periodischen Funktionen sind

$$1, \sin(x), \cos(x), \sin(2 \cdot x), \cos(2 \cdot x), \sin(3 \cdot x), \cos(3 \cdot x) \text{ etc.}$$

bzw. (mit der Euler-Identität $e^{i \cdot x} = \cos(x) + i \cdot \sin(x)$) die Funktionen

$$1, e^{i \cdot x}, e^{-i \cdot x}, e^{i \cdot 2 \cdot x}, e^{-i \cdot 2 \cdot x}, e^{i \cdot 3 \cdot x}, e^{-i \cdot 3 \cdot x} \text{ etc.}$$

Die grundsätzliche Idee ist nun, eine beliebige $2 \cdot \pi$ -periodische Funktion $f(x)$ zu zerlegen in die obigen Basisfunktionen, d.h., zu versuchen, die Funktion als Linearkombination

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1 \cdot \cos(x) + a_2 \cdot \cos(2 \cdot x) + \dots \\ &\quad + b_1 \cdot \sin(x) + b_2 \cdot \sin(2 \cdot x) + \dots \end{aligned}$$

bzw.

$$f(x) = c_0 + c_1 \cdot e^{i \cdot x} + c_{-1} \cdot e^{-i \cdot x} + c_2 \cdot e^{i \cdot 2 \cdot x} + c_{-2} \cdot e^{-i \cdot 2 \cdot x} + \dots$$

mit geeigneten Koeffizienten a_i, b_i, c_i zu schreiben. In der Tat kann man dies für nicht allzu wilde Funktionen immer machen. Eine dabei besonders angenehme Klasse sind die „quadratintegralen“ Funktionen:

Definition 11.1:

Zu einem Intervall $[a, b] \subset \mathbb{R}$ wird der „**Hilbert-Raum der quadratintegralen Funktionen**“

$$L_2([a, b]) = \left\{ f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}; \int_a^b |f(x)|^2 dx < \infty \right\}$$

mit dem „**Skalarprodukt**“

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b \overline{f(x)} \cdot g(x) dx$$

definiert. Wir betrachten im Folgenden speziell $[a, b] = [-\pi, \pi]$ und bezeichnen den Hilbert-Raum $L_2([-\pi, \pi])$ kurz als L_2 .

Dieses Skalarprodukt hat offensichtlich folgende Eigenschaften:

Eigenschaften 11.2:

Für die Abbildung $\langle \cdot, \cdot \rangle : L_2 \times L_2 \rightarrow \mathbb{C}$ gilt:

a) *Linearität:*

$$\langle f, \alpha \cdot g_1 + \beta \cdot g_2 \rangle = \alpha \cdot \langle f, g_1 \rangle + \beta \cdot \langle f, g_2 \rangle$$

für alle $f, g_1, g_2 \in L_2, \alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

b) $\langle f, g \rangle = \overline{\langle g, f \rangle}$ (komplexe Konjugation) für alle $f, g \in L_2$.

c) $\langle f, f \rangle \geq 0$ für alle $f \in L_2$. (Beachte: b) impliziert $\langle f, f \rangle \in \mathbb{R}$.)

d) $\langle f, f \rangle = 0 \Leftrightarrow f = 0$.

Hierbei muss man bei d) etwas aufpassen: Das Integral $\langle f, f \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx$ merkt nichts davon, wenn man Funktionen an einzelnen Stellen undefiniert. Wir identifizieren daher einfach Funktionen, die bei Integration das selbe Verhalten zeigen, d.h., zwei Funktionen f_1, f_2 werden als die selben Elemente des L_2 angesehen, wenn

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f_1(x) - f_2(x)|^2 dx = 0$$

gilt. Damit ist dann d) trivialerweise per Definition erfüllt, da man z.B. die Funktionen $f(x)$, die überall bis auf endlich viele Stellen x_0, x_1 etc. verschwinden, als Nullfunktion ansieht.

Bemerkung 11.3: Nach b) ergibt das Vertauschen der Einträge im Skalarprodukt den komplex konjugierten Wert. Nach a) kann man einen skalaren Faktor aus dem rechten Eintrag des Skalarprodukts herausziehen. **Achtung:** Beim Herausziehen eines skalaren Faktors aus der linken Seite taucht dieser wegen b) komplex konjugiert vor dem Skalarprodukt auf:

$$\langle \alpha \cdot f, g \rangle = \overline{\langle g, \alpha \cdot f \rangle} = \overline{\alpha \cdot \langle g, f \rangle} = \bar{\alpha} \cdot \overline{\langle g, f \rangle} = \bar{\alpha} \cdot \langle f, g \rangle.$$

Analog ergibt sich die Linearität bezüglich des linken Eintrags im Skalarprodukt in der folgenden Form:

$$\langle \alpha \cdot f_1 + \beta \cdot f_2, g \rangle = \bar{\alpha} \cdot \langle f_1, g \rangle + \bar{\beta} \cdot \langle f_2, g \rangle.$$

Das Konzept eines Skalarproduktes ist auf endlich-dimensionalen Räumen (dem \mathbb{R}^n bzw. \mathbb{C}^n) aus der Schule bereits wohlbekannt. Es geht aber auch auf unendlich dimensionale Räume (Funktionsräume) über, wobei die Summen des Euklidischen Skalarprodukts zu Integralen werden. Einem Skalarprodukt ist stets ein Längen- und damit ein Abstandsbegriff zugeordnet (eine „Norm“). Wir verwenden hier schon den Begriff „Vektorraum“, der erst in Definition 12.1 axiomatisch eingeführt werden wird. An dieser Stelle sei er einfach nur als „Menge von Objekten, die man addieren und mit skalaren Faktoren multiplizieren kann“ zu lesen:

Definition und Satz 11.4:

Sei L ein Vektorraum mit einem Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Dann ist $\|f\|_2 := \sqrt{\langle f, f \rangle}$ eine „Norm“ auf L , d.h., die Abbildung $\|\cdot\|_2 : L \rightarrow [0, \infty)$ erfüllt:

- a) $\|f + g\|_2 \leq \|f\|_2 + \|g\|_2$ für alle $f, g \in L$ („Dreiecksungleichung“).
- b) $\|\alpha \cdot f\|_2 = |\alpha| \cdot \|f\|_2$ für alle $f \in L, \alpha \in \mathbb{C}$ („Homogenität“).
- c) $\|f\|_2 = 0 \Leftrightarrow f = 0$.

Die dem Skalarprodukt $\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(x)} \cdot g(x) dx$ entstammende Norm auf L_2 wird als „ L_2 -Norm“ bezeichnet.

Beweis: Die Eigenschaften a) – c) folgen unmittelbar aus den geforderten Eigenschaften a) – d) der Definition 11.2.

Die Dreiecksungleichung a) ergibt sich folgendermaßen:

$$\begin{aligned} \|f + g\|_2^2 &= \langle f + g, f + g \rangle = \langle f, f \rangle + \langle f, g \rangle + \langle g, f \rangle + \langle g, g \rangle \\ &= \|f\|_2^2 + \langle f, g \rangle + \overline{\langle f, g \rangle} + \|g\|_2^2 \leq \|f\|_2^2 + 2 \cdot |\langle f, g \rangle| + \|g\|_2^2. \end{aligned}$$

Mit einer Anleihe beim nächsten Satz (der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung $|\langle f, g \rangle| \leq \|f\|_2 \cdot \|g\|_2$) folgt

$$\|f + g\|_2^2 \leq \|f\|_2^2 + 2 \cdot \|f\|_2 \cdot \|g\|_2 + \|g\|_2^2 = (\|f\|_2 + \|g\|_2)^2.$$

b) ergibt sich durch $\|\alpha \cdot f\|_2^2 = \langle \alpha \cdot f, \alpha \cdot f \rangle = \alpha \cdot \underline{\alpha} \cdot \langle f, f \rangle = |\alpha|^2 \cdot \|f\|_2^2$.
c) ist nichts anderes als Definition 11.2.d).

Q.E.D.

Die folgende Aussage ist eher technischer Natur (ein nützliches Hilfsmittel in Beweisen):

Satz 11.5: (Die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung)

Für alle $f, g \in L$ gilt $|\langle f, g \rangle|^2 \leq \langle f, f \rangle \cdot \langle g, g \rangle$, d.h., $|\langle f, g \rangle| \leq \|f\|_2 \cdot \|g\|_2$.
Das Gleichheitszeichen gilt genau dann, wenn f und g bis auf eine multiplikative Konstante übereinstimmen.

Beweis: Übungsaufgabe.

Bemerkung 11.6: Mit der Norm hat man einen Abstandsbegriff: Als Abstand zweier Elemente $f, g \in L$ betrachtet man $\|f - g\|_2$. Mit 11.4.d) haben 2 Elemente genau dann den Abstand 0, wenn sie übereinstimmen.

Definition 11.7: (Konvergenz)

Eine Folge (f_n) von Elementen in L heißt „**konvergent**“ gegen den „**Grenzwert**“ $f^* \in L$, wenn die Abstände zum Grenzwert gegen 0 konvergieren:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f^*\|_2 = 0.$$

Es wird die Notation $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f^*$ benutzt.

Man nennt auf dem Hilbert-Raum $L = L_2$ die Konvergenz bezüglich der L_2 -Norm auch „**Konvergenz im quadratischen Mittel**“.

Beispiel 11.8: Betrachte $L = \{f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ stetig}\}$ mit der L_2 -Norm $\|f\|_2 = \int_{-1}^1 |f(x)|^2 dx$. Betrachte die folgenden Funktionen, die im Bereich $[0, 1/n]$ linear von 0 bis 1 wachsen:

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } -1 \leq x \leq 0, \\ n \cdot x & \text{für } 0 \leq x \leq \frac{1}{n}, \\ 1 & \text{für } \frac{1}{n} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Bei vorgegebenem x konvergieren diese Werte offensichtlich punktweise gegen

$$f^*(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } -1 \leq x \leq 0, \\ 1 & \text{für } 0 < x \leq 1. \end{cases}$$

Mit

$$\begin{aligned}\|f_n - f^*\|_2 &= \int_{-1}^1 (f_n(x) - f^*(x))^2 dx = \int_0^{1/n} (f_n(x) - f^*(x))^2 dx \\ &= \int_0^{1/n} (n \cdot x - 1)^2 dx = \frac{1}{3 \cdot n}\end{aligned}$$

konvergiert die Funktionenfolge f_n auch bezüglich der L_2 -Norm gegen f^* . Aber (Problem!): f^* ist nicht stetig, also $f^* \notin L$.

Das Problem, dass die Grenzfunktion einer Folge stetiger Funktionen nicht mehr stetig zu sein braucht, soll nun etwas erläutert werden. Dazu zunächst eine mehr mathematisch-technische Definition (die in späteren Anwendungen dann nicht mehr so interessant sein wird):

Definition 11.9: (Vollständigkeit)

Eine Folge (f_n) heißt „**Cauchy-Folge**“ bezüglich einer Norm $\|\cdot\|$, wenn zu jedem $\epsilon > 0$ ein $N(\epsilon)$ existiert, sodass $\|f_n - f_m\| < \epsilon$ gilt für alle $n, m \geq N(\epsilon)$.

Ein Raum mit einer Norm heißt „**vollständig**“, wenn jede Cauchy-Folge in diesem Raum einen Grenzwert besitzt, der wieder in diesem Raum liegt.

Definition 11.10: (Hilberträume)

Ein Vektorraum mit einem Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ heißt „**Hilbert-Raum**“, wenn er bezüglich der vom Skalarprodukt stammenden Norm $\|f\|_2 = \sqrt{\langle f, f \rangle}$ vollständig ist.

Bemerkung 11.11: Beispiel 11.8 zeigt, dass der Raum der stetigen Funktionen bezüglich der L_2 -Norm nicht vollständig ist. (Die Funktionenfolge f_n in diesem Beispiel ist eine Cauchy-Folge. Der Grenzwert f^* (es kann nur einen geben) ist aber unstetig.) Es ist daher im Folgenden nicht sinnvoll, den Raum der stetigen Funktionen weiter zu betrachten. Stattdessen sucht man nach dem kleinsten bzgl. der L_2 -Norm vollständigen Raum, der die stetigen Funktionen umfasst. Dieser stellt sich als der Raum der quadratintegrablen Funktionen L_2 heraus (Definition und Satz 11.1).

b) Damit die oben definierten L_2 -Räume wirklich vollständig sind, muss man statt des Riemann-Integrals einen verallgemeinerten Integralbegriff benutzen: das sogenannte **Lebesgue-Integral**. Außer für sehr pathologische (irreguläre) Funktionen stimmt das Lebesgue-Integral aber mit dem Riemann-Integral überein. Wir werden uns daher mit diesen sehr mathematisch-technischen Details nicht abmühen. Einen exakten Beweis für die Vollständigkeit des L_2 -Raums können wir folglich hier nicht führen.

c) Zu jeder L_2 -Funktion f gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ eine stetige Funktion g , die f approximiert: $\|f - g\|_2 < \epsilon$. Das liefert eine einfache Beweistechnik im L_2 :

zeige die behauptete Aussage zunächst nur für stetige Funktionen. Betrachte dann eine konvergente Folge stetiger Funktionen und zeige, dass die Aussage auf den (eventuell unstetigen) Grenzwert in L_2 übergeht.

d) Für endliche Intervalle $[a, b]$ liegen alle auf $[a, b]$ stetigen Funktionen in $L_2([a, b])$. Unstetige Funktionen mit Sprungstellen können ebenfalls integriert werden und liegen im L_2 -Raum. Sogar Funktionen mit (milden) Singularitäten sind quadratintegrabel, z.B.:

$$f(x) = x^{-\frac{1}{3}} \in L_2, \text{ denn } \int_{-\pi}^{\pi} (x^{-1/3})^2 dx = 3 \cdot \pi^{2/3} < \infty.$$

e) Für quadratintegrale Funktionen existiert das Skalarprodukt selbst dann, wenn die Funktionen singulär sind. Dies liegt an der Cauchy–Schwarzschen Ungleichung 11.5. Diese Ungleichung garantiert weiterhin, dass die Summe zweier L_2 -Funktionen wieder eine L_2 -Funktion ist (d.h., L_2 ist in der Tat ein Vektorraum).

f) Die folgende Theorie von (verallgemeinerten) Fourier–Reihen gilt für beliebige L_2 -Funktionen, also auch für unstetige und sogar (mild-)singuläre Funktionen. Gerade diese Allgemeinheit macht die Fourier–Analyse für Anwendungen interessant.

11.1.2 Bestapproximation und Konvergenz

Wie aus der Schule bekannt, ist im \mathbb{R}^n mit dem Euklidischen Skalarprodukt (den wir nun als Hilbert–Raum ansehen) die Orthogonalität zweier Vektoren dadurch charakterisiert, dass das Skalarprodukt verschwindet. Wir benutzen die selbe Notation für allgemeine Hilbert–Räume.

Definition 11.12: (Orthogonalität)

Zwei Elemente f, g eines Hilbert–Raums mit $\langle f, g \rangle = 0$ heißen „**orthogonal**“. Eine Familie $\{f_n\}$ von Hilbert–Raumelementen nennt man ein „**orthogonales System**“, wenn alle Paare f_n, f_m mit $m \neq n$ orthogonal sind. Gilt zusätzlich $\langle f_n, f_n \rangle = 1$, so heißt das System „**orthonormal**“.

Beispiel 11.13: Hier ist das entscheidende Beispiel, das uns im Folgenden am meisten interessieren wird:

Die Familie der komplexen Exponentialfunktionen $\{e^{i \cdot n \cdot x}\}, i = \sqrt{-1}, n \in \mathbb{Z}$ ist ein Orthogonalsystem auf $L_2([-\pi, \pi])$.

Dies ist leicht nachgerechnet. Für $n \neq m$ gilt:

$$\langle e^{i \cdot m \cdot x}, e^{i \cdot n \cdot x} \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \overline{e^{i \cdot m \cdot x}} \cdot e^{i \cdot n \cdot x} dx = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i \cdot m \cdot x} \cdot e^{i \cdot n \cdot x} dx$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} e^{i \cdot (n-m) \cdot x} dx = \left[\frac{e^{i \cdot (n-m) \cdot x}}{i \cdot (n-m)} \right]_{x=-\pi}^{x=\pi} = \frac{(-1)^{n-m} - (-1)^{n-m}}{i \cdot (n-m)} = 0.$$

Für $m = n$:

$$\langle e^{i \cdot n \cdot x}, e^{i \cdot n \cdot x} \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i \cdot n \cdot x} \cdot e^{i \cdot n \cdot x} dx = \int_{-\pi}^{\pi} 1 dx = 2 \cdot \pi.$$

Mit der Euler-Identität

$$e^{i \cdot n \cdot x} = \cos(n \cdot x) + i \cdot \sin(n \cdot x)$$

bzw.

$$\cos(n \cdot x) = \frac{e^{i \cdot n \cdot x} + e^{-i \cdot n \cdot x}}{2}, \quad \sin(n \cdot x) = \frac{e^{i \cdot n \cdot x} - e^{-i \cdot n \cdot x}}{2 \cdot i}$$

ergibt sich für die Familie reeller Funktionen $\{1, \cos(x), \sin(x), \cos(2 \cdot x), \sin(2 \cdot x), \dots\}$:

$$\begin{aligned} \langle \cos(m \cdot x), \cos(n \cdot x) \rangle &= 0, & m \neq n, \\ \langle \sin(m \cdot x), \sin(n \cdot x) \rangle &= 0, & m \neq n, \\ \langle \cos(m \cdot x), \sin(n \cdot x) \rangle &= 0 & (\text{auch für } m = n). \end{aligned}$$

Die konstante Funktion 1 ist dabei $\cos(m \cdot x)$ mit $m = 0$. Für $m = n$ gilt:

$$\begin{aligned} \langle 1, 1 \rangle &= 2 \cdot \pi, \\ \langle \cos(n \cdot x), \cos(n \cdot x) \rangle &= \pi & (n > 0), \\ \langle \sin(n \cdot x), \sin(n \cdot x) \rangle &= \pi & (n > 0). \end{aligned}$$

Die trigonometrischen Funktionen $\{1, \cos(x), \sin(x), \cos(2 \cdot x), \sin(2 \cdot x), \dots\}$ bilden ein Orthogonalsystem auf $L_2([-\pi, \pi])$.

Will man Entwicklungen nach „einfachen Basisfunktionen“ f_0, f_1, \dots vornehmen, so ist es technisch sehr vorteilhaft, wenn diese ein Orthogonalsystem bilden. Ist dies nicht der Fall, so kann die Folge f_0, f_1, \dots mit einem sehr einfachen Algorithmus durch Linearkombinationen in ein Orthogonalsystem verwandelt werden („Gram-Schmidt-Orthogonalisierung“, siehe Übungen).

Bemerkung 11.14: Aus einem Orthogonalsystem $\{f_0, f_1, \dots\}$ kann man sofort ein Orthonormalsystem $\{\tilde{f}_0, \tilde{f}_1, \dots\}$ machen, indem man $\tilde{f}_n = f_n / \|f_n\|_2$ setzt.

Wir betrachten ein Orthogonalsystem $\{f_0, f_1, \dots\}$ und versuchen zunächst, ein Hilbert-Raumelement f durch eine endliche Linearkombination

$$f \approx \sum_{k=0}^n c_k \cdot f_k$$

zu approximieren. Welche Koeffizienten c_k sollte man wählen, damit der Abstand zwischen f und der Summe im L_2 -Sinne möglichst klein wird? Als

Vorüberlegung betrachten wir zunächst, wie man für ein exakt darstellbares f die Entwicklungskoeffizienten c_k aus f ermittelt:

$$f = \sum_{k=0}^n c_k \cdot f_k \quad \Rightarrow \quad \langle f_m, f \rangle = \langle f_m, \sum_{k=0}^n c_k \cdot f_k \rangle = \sum_{k=0}^n c_k \cdot \langle f_m, f_k \rangle.$$

Wegen der Orthogonalität verbleibt für $m \in \{0, \dots, n\}$ von der Summe nur der Term mit $k = m$:

$$\langle f_m, f \rangle = c_m \cdot \langle f_m, f_m \rangle, \quad \text{also} \quad c_m = \frac{\langle f_m, f \rangle}{\langle f_m, f_m \rangle}.$$

Definition 11.15: (Verallgemeinerte Fourier-Koeffizienten)

Für eine L_2 -Funktion f heißen

$$c_k = \frac{\langle f_k, f \rangle}{\langle f_k, f_k \rangle}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

die (verallgemeinerten) „**Fourier-Koeffizienten bezüglich des Orthogonalsystems** $\{f_0, f_1, \dots\}$ “. Die Linearkombination

$$S_n = \sum_{k=0}^n c_k \cdot f_k$$

heißt (verallgemeinerte) „**Fourier-Approximation von f bezüglich des Orthogonalsystems**“.

Das folgende elementare Ergebnis zeigt, dass diese Fourier-Koeffizienten in der Tat die beste Koeffizientenwahl darstellen, um den Abstand zwischen f und einer Linearkombination $\sum_k \alpha_k \cdot f_k$ im L_2 -Sinne möglichst klein zu machen:

Lemma 11.16: (Besselsche (Un-)Gleichung)

Sei $\{f_0, \dots, f_n\}$ ein Orthogonalsystem.

a) Für jede Wahl von Koeffizienten $\alpha_k \in \mathbb{C}$ gilt die „**allgemeine Besselsche Gleichung**“

$$\left\| f - \sum_{k=0}^n \alpha_k \cdot f_k \right\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \sum_{k=0}^n |c_k|^2 \cdot \|f_k\|_2^2 + \sum_{k=0}^n |\alpha_k - c_k|^2 \cdot \|f_k\|_2^2,$$

wo die c_k die Fourier-Koeffizienten aus Definition 11.15 sind.

b) Für die Wahl $\alpha_k = c_k$ folgt die „**spezielle Besselsche Gleichung**“

$$\left\| f - \sum_{k=0}^n c_k \cdot f_k \right\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \sum_{k=0}^n |c_k|^2 \cdot \|f_k\|_2^2.$$

c) Es folgt die „**Besselsche Ungleichung**“

$$\sum_{k=0}^n |c_k|^2 \cdot \|f_k\|_2^2 \leq \|f\|_2^2.$$

Beweis: Die allgemeine Besselsche Gleichung a) wird als Übungsaufgabe nachgerechnet. Hieraus folgen sofort b) und c).

Q.E.D.

Interpretation 11.17:

Die allgemeine Besselsche Gleichung liefert sofort, dass der Abstand

$$\left\| f - \sum_{k=0}^n \alpha_k \cdot f_k \right\|_2$$

durch die Wahl der Koeffizienten $\alpha_k = c_k$ minimiert wird. Die Fourier-Approximation von f wird daher als „**Bestapproximation von f im quadratischen Mittel**“ bezüglich des Orthogonalsystems bezeichnet. Der Abstand zwischen f und dieser Bestapproximation (der „**Approximationsfehler**“) ist durch

$$\left\| f - \sum_{k=0}^n c_k \cdot f_k \right\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \sum_{k=0}^n |c_k|^2 \cdot \|f_k\|_2^2$$

gegeben. Eine Besonderheit dieser L_2 -Bestapproximation ist, dass die Entwicklungskoeffizienten c_k nicht von der Anzahl n der benutzten Entwicklungselemente f_0, \dots, f_n abhängen! Man kann den Approximationsfehler kleiner und kleiner machen, indem man einfach immer mehr Elemente im Orthogonalsystem hinzunimmt (also n anwachsen läßt), ohne dass man die Koeffizienten anpassen muss!

Nun geht es um die Frage, was passiert, wenn man den Grenzwert $n \rightarrow \infty$ betrachtet. Konvergiert die Fourier-Approximation (im L_2 -Sinne) gegen f ? Dies kann nicht allgemein beantwortet werden, sondern hängt vom betrachteten Orthogonalsystem $\{f_0, f_1, \dots\}$ ab:

Definition 11.18: (Vollständige Orthonormalsysteme)

Ein Orthogonalsystem $\{f_0, f_1, \dots\}$ heißt „**vollständig**“, wenn für jedes f im Hilbert-Raum die Fourier-Approximation im L_2 -Sinne gegen f konvergiert:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n c_k \cdot f_k = f,$$

d.h.,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| f - \sum_{k=0}^n c_k \cdot f_k \right\|_2^2 = 0.$$

Mit der Besselschen Gleichung ergibt sich sofort die folgende Charakterisierung vollständiger Orthogonalsysteme, die mathematisch aber recht trivial ist und keinerlei effektives Hilfsmittel liefert, die Vollständigkeit eines Orthogonalsystems zu überprüfen:

Satz 11.19: (Parsevalsche Gleichung)

Ein Orthogonalsystem $\{f_0, f_1, \dots\}$ ist genau dann vollständig, wenn für jedes Hilbert-Raumelement f die folgende „Parsevalsche Gleichung“ gilt:

$$\sum_{k=0}^{\infty} |c_k| \cdot \|f_k\|_2^2 = \|f\|_2^2.$$

Beweis: Die Gleichung folgt sofort aus Lemma 11.16.b).

Q.E.D.

Das einzig für uns Interessante an dieser Aussage ist die folgende Interpretation:

Physikalische Interpretation 11.20:

In vielen physikalischen Anwendungen stellt das „Signal“ f ein Feld (Strom, Spannung, elektrisches oder magnetisches Feld) dar, dessen Quadrat als eine physikalische Leistung oder als lokale Energiedichte zu interpretieren ist. Das die L_2 -Norm definierende Integral hat dann die Interpretation einer Energie, genauer, einer über eine Periode des Signals „gemittelten Energie“.

Bei einer Fourier-Entwicklung $f = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \cdot f_k$ sprechen Physiker auch von einer „Zerlegung des Signals“ in die „Fourier-Moden“ f_k .

Die Parsevalsche Gleichung besagt, dass sich die Energie des Signals **vollständig** auf die Fourier-Moden verteilen muss. Ist dies nicht der Fall (d.h., ist das Orthogonalsystem nicht vollständig), so muss es weitere Anteile des Signals geben, die durch die Fourier-Moden nicht erfasst werden.

11.2 Trigonometrische Fourier-Reihen

14.1.04↓

Die allgemeinen Hilbert-Raumstrukturen der Fourier-Reihen wurde im letzten Abschnitt in etwas abstrakter Art und Weise zusammengetragen. Nun wird

es endlich konkret. Wir betrachten das in Beispiel 11.13 diskutierte spezielle Orthogonalsystem

$$\{e^{i \cdot k \cdot x}\}_{k \in \mathbb{Z}} \quad (i = \sqrt{-1})$$

auf dem Hilbert–Raum $L_2 = L_2([-\pi, \pi])$. Ziel ist es, eine auf dem Intervall $[-\pi, \pi]$ gegebene Funktion nach dem obigen Orthogonalsystem zu zerlegen und zu studieren, ob und wie die Fourier–Approximationen gegen die Funktion konvergieren.

Rechentechnisch ist es meist einfacher, die komplexen Exponentialfunktionen zu verwenden. Äquivalenterweise kann man die trigonometrischen Funktionen

$$\{1, \cos(x), \sin(x), \cos(2 \cdot x), \sin(2 \cdot x), \dots\}$$

betrachten, die für reelle Funktionen zu reellen Formeln führen und daher im Anwendungskontext oft physikalisch direkter zu interpretieren sind.

11.2.1 Definition der trigonometrischen Fourier–Reihen

Wir fassen zunächst die Ergebnisse von Beispiel 11.13 zusammen. Der Unterschied zwischen der „komplexen“ und der „reellen“ Darstellung besteht lediglich darin, dass statt des komplexen Pärchens $(e^{i \cdot k \cdot x}, e^{-i \cdot k \cdot x})$ in der reellen Darstellung das Pärchen $(\cos(k \cdot x), \sin(k \cdot x))$ benutzt wird, das mit der Euler–Formel

$$e^{i \cdot k \cdot x} = \cos(k \cdot x) + i \cdot \sin(k \cdot x)$$

bzw.

$$\cos(k \cdot x) = \frac{e^{i \cdot k \cdot x} + e^{-i \cdot k \cdot x}}{2}, \quad \sin(k \cdot x) = \frac{e^{i \cdot k \cdot x} - e^{-i \cdot k \cdot x}}{2 \cdot i}$$

dem komplexen Pärchen äquivalent ist:

Definition 11.21: (Die trigonometrische Fourier–Entwicklung)

Zu einer Funktion $f \in L_2([-\pi, \pi])$ definiere die „**Fourier–Koeffizienten**“

$$c_k = \frac{\langle e^{i \cdot k \cdot x}, f \rangle}{\langle e^{i \cdot k \cdot x}, e^{i \cdot k \cdot x} \rangle} = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot e^{-i \cdot k \cdot x} dx$$

mit $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Alternativ definiere

$$a_k = \frac{\langle \cos(k \cdot x), f \rangle}{\langle \cos(k \cdot x), \cos(k \cdot x) \rangle} = \begin{cases} \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, & k = 0, \\ \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \cos(k \cdot x) dx, & k = 1, 2, \dots \end{cases}$$

sowie

$$b_k = \frac{\langle \sin(k \cdot x), f \rangle}{\langle \sin(k \cdot x), \sin(k \cdot x) \rangle} = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \sin(k \cdot x) dx, \quad k = 1, 2, \dots$$

Die entsprechenden „Fourier-Approximationen“ sind

$$S_n(x) = \sum_{k=-n}^n c_k \cdot e^{i \cdot k \cdot x} = a_0 + \sum_{k=1}^n \left(a_k \cdot \cos(k \cdot x) + b_k \cdot \sin(k \cdot x) \right)$$

mit $n = 0, 1, 2, \dots$.

Mit der Euler-Formel ergibt sich folgender Zusammenhang zwischen den beiden Darstellungen:

$$\begin{aligned} \sum_{k=-n}^n c_k \cdot e^{i \cdot k \cdot x} &= c_0 + \sum_{k=1}^n \left(c_k \cdot e^{i \cdot k \cdot x} + c_{-k} \cdot e^{-i \cdot k \cdot x} \right) \\ &= c_0 + \sum_{k=1}^n \left(c_k \cdot \left(\cos(k \cdot x) + i \cdot \sin(k \cdot x) \right) + c_{-k} \cdot \left(\cos(k \cdot x) - i \cdot \sin(k \cdot x) \right) \right) \\ &= \underbrace{c_0}_{a_0} + \sum_{k=1}^n \left(\underbrace{(c_k + c_{-k})}_{a_k} \cdot \cos(k \cdot x) + \underbrace{i \cdot (c_k - c_{-k})}_{b_k} \cdot \sin(k \cdot x) \right). \end{aligned}$$

Zusammenhang 11.22:

Der Zusammenhang zwischen den komplexen Fourier-Koeffizienten c_k und den reellen Koeffizienten a_k, b_k ist gegeben durch:

$a_k = c_k + c_{-k}$	$c_k = \frac{1}{2} \cdot (a_k - i \cdot b_k)$
$b_k = i \cdot (c_k - c_{-k})$	$c_{-k} = \frac{1}{2} \cdot (a_k + i \cdot b_k)$

mit $k = 1, 2, \dots$ und zusätzlich $a_0 = c_0$.

Bemerkung 11.23: Ist die Funktion f reell, so sind die Fourier-Koeffizienten a_k, b_k reell. In der komplexen Entwicklung entspricht dies der Bedingung

$$c_{-k} = \overline{c_k}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Bemerkung 11.24: Für die Definition der Fourier-Koeffizienten a_k, b_k bzw. c_k sind nur die Werte der Funktion f auf dem Intervall $[-\pi, \pi]$ von Belang. Man sollte sich aber gleich angewöhnen, sich die Funktion f als $2 \cdot \pi$ -periodisch auf ganz \mathbb{R} fortgesetzt vorzustellen, denn die Fourier-Approximationen

$$S_n(x) = \sum_{k=-n}^n c_k \cdot e^{i \cdot k \cdot x} = a_0 + \sum_{k=1}^n \left(a_k \cdot \cos(k \cdot x) + b_k \cdot \sin(k \cdot x) \right)$$

sind ja ebenfalls $2 \cdot \pi$ -periodisch. Das liefert gleich die richtige Sichtweise für die im Abschnitt 11.2.3 folgenden Betrachtungen zur punktweisen Konvergenz.

Bemerkung 11.25: Ist die Funktion f gerade oder ungerade, so lassen sich die Integrale $\int_{-\pi}^{\pi}$, die die Fourier-Koeffizienten bestimmen, vereinfachen. Die Teilintegrale $\int_{-\pi}^0$ stimmen (eventuell bis auf ein Vorzeichen) mit den Teilintegralen \int_0^{π} überein und verdoppeln diesen Wert oder löschen ihn zu 0 aus:

Für gerade Funktionen f (also $f(x) = f(-x)$) gilt

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx, \quad a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cdot \cos(k \cdot x) dx, \quad b_k = 0$$

mit $k = 1, 2, \dots$.

Für ungerade Funktionen f (also $f(x) = -f(-x)$) gilt

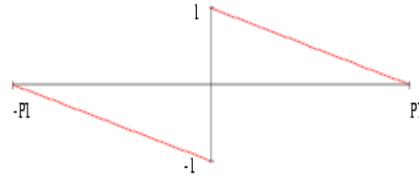
$$a_0 = 0, \quad a_k = 0, \quad b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cdot \sin(k \cdot x) dx$$

mit $k = 1, 2, \dots$.

Beispiel 11.26: Einige Beispiele von Fourier-Reihen:

a) Die („Sägezahn“-) Funktion

$$f(x) = \begin{cases} -1 - \frac{x}{\pi} & \text{für } x \in [-\pi, 0), \\ 1 - \frac{x}{\pi} & \text{für } x \in [0, \pi] \end{cases}$$



ist ungerade, also $a_k = 0 \forall k = 0, 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \sin(k \cdot x) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left(1 - \frac{x}{\pi}\right) \cdot \sin(k \cdot x) dx \\ &= \frac{1}{k} - \frac{\sin(k \cdot \pi)}{\pi \cdot k^2} = \frac{1}{k} \quad \forall k = 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

also

$$f(x) \sim \sum_{k=1,2,\dots} \frac{\sin(k \cdot x)}{k}.$$

b) Die Funktion $f(x) = |x|$ ist gerade, also $b_k = 0 \forall k = 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2 \cdot \pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x dx = \frac{\pi}{2}, \\ a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \cos(k \cdot x) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cdot \cos(k \cdot x) dx \\ &= \frac{2}{\pi} \cdot \left[\frac{\cos(k \cdot x)}{k^2} + \frac{x \cdot \sin(k \cdot x)}{k} \right]_{x=0}^{x=\pi} = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{(-1)^k - 1}{k^2} = \begin{cases} -\frac{4}{\pi \cdot k^2}, & k = 1, 3, 5, \dots, \\ 0, & k = 2, 4, 6, \dots, \end{cases} \end{aligned}$$

also

$$|x| \sim \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \cdot \sum_{k=1,3,5,\dots} \frac{\cos(k \cdot x)}{k^2}.$$

11.2.2 Konvergenz im quadratischen Mittel

Satz 11.27: (Die trigonometrischen Funktionen sind vollständig)

Die trigonometrischen Funktionen $\{e^{i \cdot k \cdot x}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ bzw.

$$\{1, \cos(x), \sin(x), \cos(2 \cdot x), \sin(2 \cdot x), \dots\}$$

bilden ein vollständiges Orthogonalsystem in $L_2([-\pi, \pi])$ im Sinne von Definition 11.18. Also: für jedes $f \in L_2([-\pi, \pi])$ gilt im L_2 -Sinne

$$f = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n,$$

wo S_n die endlichen Fourier-Approximationen

$$S_n(x) = \sum_{k=-n}^n c_k \cdot e^{i \cdot k \cdot x} = a_0 + \sum_{k=1}^n \left(a_k \cdot \cos(k \cdot x) + b_k \cdot \sin(k \cdot x) \right)$$

sind.

Wir haben hier nicht den technischen Apparat, einen sauberen Beweis zu führen, daher nur die grobe Beweisidee:

Beweisidee: Wir werden im Abschnitt 11.2.3 die punktweise Konvergenz von $S_n(x)$ gegen $f(x)$ betrachten und herausbekommen, dass

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x)$$

an allen Stellen $x \in [-\pi, \pi]$ gilt, wenn f nur genügend glatt ist (z.B. stetig und beidseitig differenzierbar, siehe Satz 11.34). Diese punktweise Konvergenz impliziert natürlich die L_2 -Konvergenz von S_n gegen f . Die Funktionen in L_2 lassen sich durch solche glatten Funktionen im L_2 -Sinne beliebig genau approximieren, woraus (nach einigen technischen Abschätzungen) dann folgt, dass die L_2 -Konvergenz für die glatten Funktionen auch auf die weniger glatten Funktionen in L_2 übergeht.

Q.E.D.

11.2.3 Punktweise Konvergenz

Die Vollständigkeit der trigonometrischen Funktionen nach Satz 11.27 garantiert uns die Konvergenz der trigonometrischen Fourier-Reihen S_n gegen die Ausgangsfunktion f im L_2 -Sinne. Intuitiv besagt dies, dass die Fourier-Approximationen $S_n(x)$ für „die meisten Punkte“ $x \in [-\pi, \pi]$ gegen den Wert $f(x)$ konvergieren muss, es bleibt aber hinreichend viel Spielraum für Stellen x ,

an denen $S_n(x)$ nicht gegen $f(x)$ konvergiert. In diesem Abschnitt soll der Frage nach der punktweisen Konvergenz genauer nachgegangen werden: an welchen Punkten x kann garantiert werden, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = f(x)$ gilt? Zunächst eine allgemeine Aussage zur Konvergenz von Funktionenreihen:

Satz 11.28: (Weierstraßsches Majorantenkriterium)

Sei (f_k) eine Folge stetiger Funktionen über $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} y_k$ mit $y_k := \sup\{|f_k(x)|; x \in [a, b]\}$, so konvergiert

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^n f_k(x)$$

für jedes $x \in [a, b]$. Die punktweise durch $S^*(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x)$ definierte Grenzfunktion ist wiederum stetig.

Beweis: technisch.

Beispiel 11.29: Da $\sum_k \frac{1}{k^2}$ konvergiert, erhalten wir sofort für das Beispiel 11.26.b), dass die Reihe

$$S^*(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \cdot \sum_{k=1,3,5,\dots} \frac{\cos(k \cdot x)}{k^2} \stackrel{(k=2 \cdot m+1)}{=} \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\cos((2 \cdot m + 1) \cdot x)}{(2 \cdot m + 1)^2}$$

für jedes $x \in [\pi, \pi]$ konvergiert und dass die Grenzfunktion $S^*(x)$ stetig ist. Aus der punktweisen Konvergenz folgt auch die Konvergenz von S_n gegen S^* im L_2 -Sinne, denn

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \|S_n - S^*\|_2 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} (S_n(x) - S^*(x))^2 dx \\ &\stackrel{(*)}{=} \int_{-\pi}^{\pi} \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n(x) - S^*(x))^2 dx = \int_{-\pi}^{\pi} 0 dx = 0. \end{aligned}$$

(Mathematisch ist der Schritt $(*)$ (Vertauschen von Limes und Integral) alles andere als trivial. Hier müssten wir den Begriff der „gleichmäßigen Konvergenz“ einführen. Als Physiker machen wir das einfach skrupellos.)

Dem Vollständigkeitsatz 11.27 nach konvergiert S_n im L_2 -Sinne gegen die Ausgangsfunktion $f(x) = |x|$, welche die Fourier-Entwicklung

$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \cdot \sum_{k=1,3,5,\dots} \frac{\cos(k \cdot x)}{k^2}$$

erzeugte. Andererseits ist auch S^* der Grenzwert von S_n im L_2 -Sinne. Da Grenzwerte eindeutig sind, folgt $f = S^*$ im L_2 -Sinne (d.h., „fast überall“)¹. Da weiterhin sowohl

¹Der Begriff „fast überall“ sollte hier intuitiv als „überall bis auf endliche viele Ausnahmestellen“ verstanden werden. Es gibt eine exakte maßtheoretische Definition dieses Begriffes, der jedoch recht technischer Natur ist und hier nicht weiter vorgestellt werden soll.

f als auch S^* stetige Funktionen sind, bedeutet „ $f = S^*$ im L_2 -Sinne“, dass auch punktweise $f(x) = S^*(x)$ für alle $x \in [-\pi, \pi]$ gelten muss, also

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\cos((2 \cdot m + 1) \cdot x)}{(2 \cdot m + 1)^2} \quad \text{für alle } x \in [-\pi, \pi].$$

Wir haben damit ein erstes Beispiel, in dem die (unendliche) Fourier-Reihe punktweise die Ausgangsfunktion darstellt.

Zunächst technisches Vorgeplänkel:

Definition 11.30: (Die integrierbaren Funktionen)

Die Funktionen des Raums

$$L_1([a, b]) = \left\{ f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}; \int_a^b |f(x)| dx < \infty \right\}$$

nennt man die „über $[a, b]$ integrierbaren Funktionen“. Die trigonometrischen Fourier-Koeffizienten

$$c_k = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot e^{-i \cdot k \cdot x} dx$$

existieren wegen

$$\left| \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot e^{-i \cdot k \cdot x} dx \right| \leq \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) \cdot e^{-i \cdot k \cdot x}| dx = \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)| dx < \infty$$

für jedes $f \in L_1([-\pi, \pi])$.

Bemerkung 11.31: Der Raum $L_2([a, b])$ der quadratintegrierbaren Funktionen 11.1 ist ein Unterraum von $L_1([a, b])$, wenn $[a, b]$ ein endliches Intervall ist. Dies liegt an der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung 11.5. Für endliche Intervalle liegt nämlich

$$g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{|f(x)|} & \text{für } f(x) \neq 0, \\ 1 & \text{für } f(x) = 0 \end{cases}$$

in $L_2([a, b])$, da $|g(x)| \equiv 1$ gilt:

$$\|g\|_2 = \sqrt{\int_a^b |g(x)|^2 dx} = \sqrt{b-a}.$$

Per Cauchy-Schwarz folgt mit $\overline{f(x)} \cdot g(x) = \overline{f(x)} \cdot f(x)/|f(x)| = |f(x)|$:

$$\int_a^b |f(x)| dx = \int_a^b \overline{f(x)} \cdot g(x) dx = \langle f, g \rangle \leq \|f\|_2 \cdot \|g\|_2 = \sqrt{b-a} \cdot \|f\|_2 < \infty.$$

Lemma 11.32: (Riemann–Lebesgue–Lemma)

Die Fourier–Koeffizienten jeder integrierbaren Funktion $f \in L_1([-\pi, \pi])$ bilden eine Nullfolge:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \cos(k \cdot x) \, dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \sin(k \cdot x) \, dx = 0.$$

Beweisskizze (technisch): Wir stellen uns f als $2 \cdot \pi$ -periodisch fortgesetzt vor. Für $2 \cdot \pi$ -periodische Funktionen $g(x)$ gilt

$$\int_{-\pi+\alpha}^{\pi+\alpha} g(x) \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \, dx$$

für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$. Mit der Substitution $x = y - \pi/k$ folgt:

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot e^{-i \cdot k \cdot x} \, dx = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{-\pi+\frac{\pi}{k}}^{\pi+\frac{\pi}{k}} f\left(y - \frac{\pi}{k}\right) \cdot e^{-i \cdot k \cdot \left(y - \frac{\pi}{k}\right)} \, dy \\ &= \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f\left(y - \frac{\pi}{k}\right) \cdot e^{-i \cdot k \cdot y} \cdot \underbrace{e^{i \cdot k \cdot \frac{\pi}{k}}}_{-1} \, dy = -\frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f\left(y - \frac{\pi}{k}\right) \cdot e^{-i \cdot k \cdot y} \, dy. \end{aligned}$$

Es folgt

$$c_k = \frac{1}{2} \cdot (c_k + c_k) = \frac{1}{4 \cdot \pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \left(f(x) - f\left(x - \frac{\pi}{k}\right) \right) \cdot e^{-i \cdot k \cdot x} \, dx,$$

also

$$|c_k| \leq \frac{1}{4 \cdot \pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \left| f(x) - f\left(x - \frac{\pi}{k}\right) \right| \, dx. \quad (\#)$$

Für stetiges f ist nun alles klar:

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} |c_k| &\leq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{4 \cdot \pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \left| f(x) - f\left(x - \frac{\pi}{k}\right) \right| \, dx \\ &\stackrel{(*)}{=} \int_{-\pi}^{\pi} \lim_{k \rightarrow \infty} \left| f(x) - f\left(x - \frac{\pi}{k}\right) \right| \, dx = 0. \end{aligned}$$

(Für einen mathematisch sauberen Beweis ist die Vertauschung von Limes und Integral im Schritt $(*)$ natürlich genauer zu untersuchen.) Für eine unstetige integrierbare Funktion benutzt man, dass man integrierbare Funktionen beliebig genau durch eine stetige Funktion approximieren kann, d.h., zu jedem $\epsilon > 0$ existiert eine stetige Funktion $s(x)$ mit

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - s(x)| \, dx < \epsilon.$$

Mit (#) folgt

$$\begin{aligned}
 |c_k| &\leq \frac{1}{4 \cdot \pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \left| \underbrace{f(x) - s(x) + s(x)}_0 - \underbrace{s\left(x - \frac{\pi}{k}\right) + s\left(x - \frac{\pi}{k}\right)}_0 - f\left(x - \frac{\pi}{k}\right) \right| dx \\
 &\leq \frac{1}{4 \cdot \pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - s(x)| dx + \frac{1}{4 \cdot \pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \left| s(x) - s\left(x - \frac{\pi}{k}\right) \right| dx \\
 &\quad + \frac{1}{4 \cdot \pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \left| s\left(x - \frac{\pi}{k}\right) - f\left(x - \frac{\pi}{k}\right) \right| dx \\
 &\stackrel{(**)}{=} \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - s(x)| dx + \frac{1}{4 \cdot \pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \left| s(x) - s\left(x - \frac{\pi}{k}\right) \right| dx \\
 &\leq \epsilon + \text{Nullfolge}_k.
 \end{aligned}$$

(Zu Schritt (**): das dritte Integral stimmt mit dem ersten überein, da der Integrand $2 \cdot \pi$ -periodisch ist).

Zu jedem ϵ kann man damit für alle hinreichend großen k garantieren, dass $|c_k| \leq \epsilon + \epsilon$ gilt. Damit ist $|c_k|$ eine Nullfolge.

Q.E.D.

Um die punktweise Konvergenz genauer zu untersuchen, brauchen wir zunächst ein starkes technisches Hilfsmittel. Die endlichen Fourier-Reihen stellen sich als die Wirkung eines Integraloperators auf die Ausgangsfunktion dar:

Satz 11.33: (Integraldarstellung per Dirichlet-Kern)

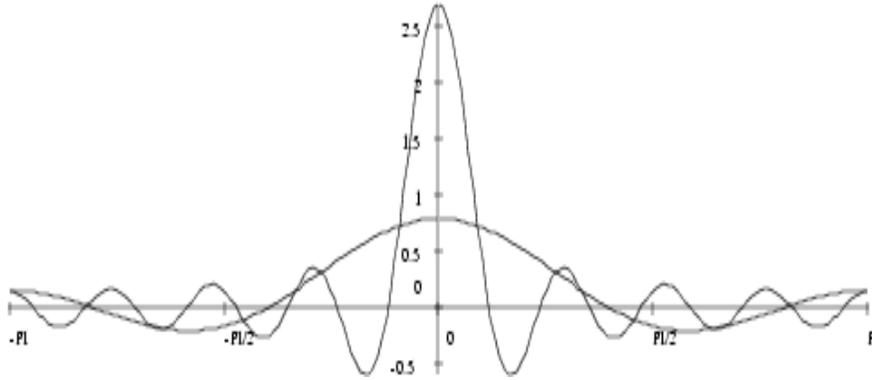
Interpretiere eine auf dem Intervall $[-\pi, \pi]$ gegebene Funktion $f \in L_1([-\pi, \pi])$ als $2 \cdot \pi$ -periodisch auf \mathbb{R} fortgesetzt (also $f(x + 2 \cdot \pi) = f(x)$). Für die Fourier-Approximation von f gilt

$$\begin{aligned}
 S_n(x) &= \sum_{k=-n}^n c_k \cdot e^{i \cdot k \cdot x} = \int_{-\pi}^{\pi} D_n(x-t) \cdot f(t) dt = \int_{-\pi}^{\pi} D_n(t) \cdot f(x+t) dt \\
 &= \int_0^{\pi} D_n(t) \cdot (f(x+t) + f(x-t)) dt
 \end{aligned}$$

mit dem sogenannten „Dirichlet-Kern“

$$D_n(y) = \begin{cases} \frac{1}{2 \cdot \pi} \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right) \cdot y\right)}{\sin\left(\frac{y}{2}\right)} & \text{für } y \neq 0 \\ \frac{n + \frac{1}{2}}{\pi} & \text{für } y = 0. \end{cases}$$

Es gilt $\int_{-\pi}^{\pi} D_n(y) dy = 1$. Hier eine Graphik von D_n mit $n = 2$ und $n = 8$:



Beweis:

$$\begin{aligned}
 S_n(x) &= \sum_{k=-n}^n c_k \cdot e^{i \cdot k \cdot x} = \sum_{k=-n}^n \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cdot e^{-i \cdot k \cdot t} dt \cdot e^{i \cdot k \cdot x} \\
 &= \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cdot \underbrace{\frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \sum_{k=-n}^n e^{i \cdot k \cdot (x-t)}}_{D_n(x-t)} dt.
 \end{aligned}$$

Es gilt

$$\begin{aligned}
 D_n(y) &= \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \sum_{k=-n}^n e^{i \cdot k \cdot y} = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \left(\sum_{k=0}^n e^{i \cdot k \cdot y} + \sum_{k=0}^n e^{-i \cdot k \cdot y} - 1 \right) \\
 &= \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \left(\sum_{k=0}^n (e^{i \cdot y})^k + \sum_{k=0}^n (e^{-i \cdot y})^k - 1 \right).
 \end{aligned}$$

Mit der Summenformel $\sum_{k=0}^n x^k = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$ für geometrische Reihen erhält man:

$$\begin{aligned}
 D_n(y) &= \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \left(\frac{e^{i \cdot (n+1) \cdot y} - 1}{e^{i \cdot y} - 1} + \frac{e^{-i \cdot (n+1) \cdot y} - 1}{e^{-i \cdot y} - 1} - 1 \right) \\
 &= \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{2 \cdot \cos(n \cdot y) - 2 \cdot \cos((n+1) \cdot y)}{2 - 2 \cdot \cos(y)} \\
 &\stackrel{(*)}{=} \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{4 \cdot \sin((n + \frac{1}{2}) \cdot y) \cdot \sin(\frac{1}{2} \cdot y)}{4 \cdot \sin^2(\frac{y}{2})} = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{\sin((n + \frac{1}{2}) \cdot y)}{\sin(\frac{y}{2})}.
 \end{aligned}$$

Hierbei werden in (*) die üblichen Additionstheoreme auf

$$\cos(n \cdot y) - \cos((n+1) \cdot y) = \cos((n + \frac{1}{2}) \cdot y - \frac{1}{2} \cdot y) - \cos((n + \frac{1}{2}) \cdot y + \frac{1}{2} \cdot y)$$

angewendet. Weiterhin gilt mit der Substitution $\xi = x - t$

$$\int_{-\pi}^{\pi} D_n(x-t) \cdot f(t) dt = \int_{x-\pi}^{x+\pi} D_n(\xi) \cdot f(x+\xi) d\xi = \int_{-\pi}^{\pi} D_n(\xi) \cdot f(x+\xi) d\xi,$$

wobei im letzten Schritt die $2 \cdot \pi$ -Periodizität von f und D_n verwendet wird. Letztlich folgt mit $D_n(-\xi) = D_n(\xi)$:

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(\xi) \cdot f(x+\xi) d\xi &= \int_{-\pi}^0 D_n(\xi) \cdot f(x+\xi) d\xi + \int_0^{\pi} D_n(\xi) \cdot f(x+\xi) d\xi \\ &= \int_0^{\pi} D_n(-\xi) \cdot f(x-\xi) d\xi + \int_0^{\pi} D_n(\xi) \cdot f(x+\xi) d\xi \\ &= \int_0^{\pi} D_n(\xi) \cdot (f(x-\xi) + f(x+\xi)) d\xi \end{aligned}$$

und

$$\int_{-\pi}^{\pi} D_n(y) dy = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \sum_{k=-n}^n e^{i \cdot k \cdot y} dy = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \sum_{k=-n}^n \int_{-\pi}^{\pi} e^{i \cdot k \cdot y} dy = 1$$

(alle Terme außer $k = 0$ ergeben 0).

Q.E.D.

Hier nun der entscheidende Satz, der für die in praktischen Anwendungen relevanten Funktionen die Frage der punktweisen Konvergenz klärt:

Satz 11.34: (Das Dirichlet-Kriterium für punktweise Konvergenz)

Sei $f \in L_1([-\pi, \pi])$. Gilt an einer Stelle $x_0 \in (-\pi, \pi)$, dass sowohl der links- als auch der rechtsseitige Grenzwert

$$f(x_0 - 0) := \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} f(x_0 - h) \quad f(x_0 + 0) := \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} f(x_0 + h)$$

existiert und ebenfalls die links- und rechtsseitigen Ableitungen

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} \frac{f(x_0 - 0) - f(x_0 - h)}{h}, \quad \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 + 0)}{h},$$

so konvergieren die Fourier-Approximationen gegen den Mittelwert des links- und rechtsseitigen Grenzwerts:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x_0) = \boxed{\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot e^{i \cdot k \cdot x_0} = \frac{f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)}{2}}.$$

Dies gilt auch für $x_0 = -\pi$ und $x_0 = \pi$, wenn die $2 \cdot \pi$ -periodisch fortgesetzte Funktion f die obigen Glattheitseigenschaften hat.

Beweis (technisch): Mit $D_n(-t) = D_n(t)$ und $\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t) dt = 1$ (aus Symmetriegründen folgt $\int_0^{\pi} D_n(t) dt = \frac{1}{2}$) ergibt sich

$$\begin{aligned}
& S_n(x_0) - \frac{f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)}{2} \\
&= \int_0^{\pi} D_n(t) \cdot (f(x_0 + t) + f(x_0 - t)) dt - \int_0^{\pi} D_n(t) \cdot (f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)) dt \\
&= \int_0^{\pi} D_n(t) \cdot ((f(x_0 + t) - f(x_0 + 0)) + (f(x_0 - t) - f(x_0 - 0))) dt \\
&= \int_0^{\pi} \frac{1}{2 \cdot \pi} \frac{\sin((n + \frac{1}{2}) \cdot t)}{\sin(\frac{t}{2})} \cdot ((f(x_0 + t) - f(x_0 + 0)) + (f(x_0 - t) - f(x_0 - 0))) dt \\
&= \int_0^{\pi} \sin((n + \frac{1}{2}) \cdot t) \cdot \underbrace{\frac{1}{\pi} \cdot \frac{t}{2} \cdot \left(\frac{f(x_0 + t) - f(x_0 + 0)}{t} + \frac{f(x_0 - t) - f(x_0 - 0)}{t} \right)}_{g(t)} dt \\
&= \int_0^{\pi} \left(\sin(n \cdot t) \cdot \cos(\frac{1}{2} \cdot t) + \cos(n \cdot t) \cdot \sin(\frac{1}{2} \cdot t) \right) \cdot g(t) dt \\
&= \frac{1}{2} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \sin(n \cdot t) \cdot \cos(\frac{1}{2} \cdot t) \cdot (g(t) - g(-t)) dt \\
&\quad + \frac{1}{2} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \cos(n \cdot t) \cdot \sin(\frac{1}{2} \cdot t) \cdot (g(t) - g(-t)) dt.
\end{aligned}$$

Die entscheidende Beobachtung hier ist, dass wegen der vorausgesetzten Existenz der einseitigen Ableitungen die Funktion $g(t)$ keine Singularität bei $t = 0$ hat und damit integrierbar ist. Mit dem Riemann–Lebesgue–Lemma 11.32 ergibt sich, dass die obige Differenz zwischen $S^*(x)$ und dem Mittelwert der einseitigen Grenzwerte eine Nullfolge ist.

Q.E.D.

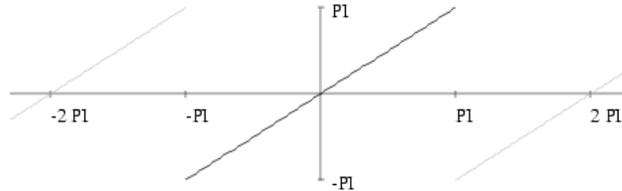
↓15.1.04

Merke 11.35:

An allen Stellen, wo die Fourier-entwickelte Funktion stetig und differenzierbar ist, wird sie durch die unendliche Fourier-Reihe dargestellt. Werden glatte (stetig und differenzierbare) Funktionen aneinander gestückt, so konvergiert die unendliche Fourier-Reihe gegen den Mittelpunkt der Grenzwerte von links- und rechts. Wenn die Stückelung stetig ist, wird auch die Nahtstelle von der Fourier-Reihe korrekt dargestellt.

Vorsicht 11.36:

Die Stetigkeit bezieht sich auf die $2 \cdot \pi$ -periodisch fortgesetzte Funktion!
 Die Funktion $f(x) = x$ ist nicht stetig an den Stellen $x = \pm\pi, \pm 3 \cdot \pi, \pm 5 \cdot \pi, \dots$, wenn man sie $2 \cdot \pi$ -periodisch fortgesetzt betrachtet!



Beispiel 11.37: In Beispiel 11.26.a) hatten wir für die „Sägezahnfunktion“

$$f(x) = \begin{cases} -1 - \frac{x}{\pi} & \text{für } x \in [-\pi, 0), \\ 1 - \frac{x}{\pi} & \text{für } x \in [0, \pi] \end{cases}$$

die Fourier-Entwicklung

$$f(x) \sim \sum_{k=1,2,\dots} \frac{\sin(k \cdot x)}{k}$$

gefunden. An allen Stetigkeitsstellen ist die Funktion differenzierbar, so dass die Fourier-Reihe an diesen Stellen gegen $f(x)$ konvergiert. An den Unstetigkeitsstellen $x = 0, \pm 2 \cdot \pi, \pm 4 \cdot \pi, \dots$ ist das Dirichlet-Kriterium aber immer noch erfüllt: Die Fourier-Reihe konvergiert gegen den Mittelwert des links- und rechtsseitigen Limes (also 0):

$$\sum_{k=1,2,\dots} \frac{\sin(k \cdot x)}{k} = \begin{cases} -1 - \frac{x}{\pi} & \text{für } x \in [-\pi, 0), \\ 0 & \text{für } x = 0 \\ 1 - \frac{x}{\pi} & \text{für } x \in (0, \pi]. \end{cases}$$

Außer an der Sprungstelle (wo wir willkürlich $f(0) = 1$ definiert hatten), wird $f(x)$ also überall punktweise durch die unendliche Fourier-Reihe dargestellt.

Bemerkung 11.38: Wir haben mit Satz 11.34 ein entscheidendes Teilargument für den Beweis von Satz 11.27 über die Vollständigkeit der trigonometrischen Funktionen im L_2 -Sinne nachgeliefert. Man kann alle Funktionen in $L_2([-\pi, \pi])$ beliebig genau durch stetige Funktionen approximieren, die das Dirichlet-Kriterium erfüllen und somit punktweise über ihre Fourier-Reihen dargestellt werden.

Bemerkung 11.39: Es ergibt sich ein verblüffendes „Lokalitätsprinzip“:

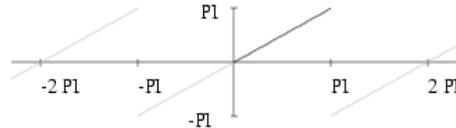
Die punktweise Konvergenz der Fourier-Reihe hängt nur von lokalen Eigenschaften der Funktion in der Umgebung des betrachteten Punktes ab!

Z.B. reichen Stetigkeit und beidseitige Differenzierbarkeit an einem Punkt für die lokale Darstellbarkeit als Fourier-Reihe an diesem Punkt. Dies steht in krassem Gegensatz zu der Tatsache, dass die Fourier-Koeffizienten global von der Funktion bestimmt werden.

Hat man vor, eine Funktion f auf einem Teilintervall $(a, b) \subset [-\pi, \pi]$ durch eine Fourier-Reihe darzustellen, so kann das auf viele verschiedene Arten und Weisen geschehen, indem man f von (a, b) **irgendwie** auf den Rest des Intervalles $[-\pi, \pi]$ fortsetzt. Abhängig von dieser Fortsetzung ergeben sich völlig unterschiedliche Fourier-Reihen, die jedoch innerhalb des Intervalls (a, b) alle gegen dieselbe Funktion konvergieren!

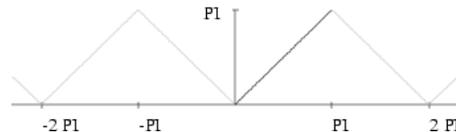
Beispiel: Wir wollen die Funktion $f(x) = x$ auf dem Intervall $[0, \pi] \subset [-\pi, \pi]$ durch eine Fourier-Reihe darstellen. Einige Möglichkeiten:

1) ungerade Fortsetzung; unstetig:



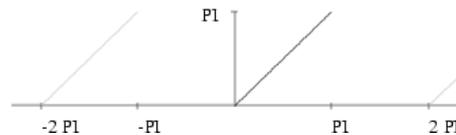
$$f_1(x) = 2 \cdot \left(\sin(x) - \frac{\sin(2 \cdot x)}{2} + \frac{\sin(3 \cdot x)}{3} - \dots \right).$$

2) gerade Fortsetzung; stetig:



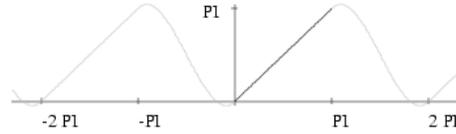
$$f_2(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \cdot \left(\cos(x) + \frac{\cos(3 \cdot x)}{3^2} + \frac{\cos(5 \cdot x)}{5^2} + \dots \right).$$

3) unstetige Fortsetzung:



$$f_3(x) = \frac{f_1(x) + f_2(x)}{2}.$$

4) glatte Fortsetzung:



$f_4(x)$ = eine schnell konvergierende Fourier-Reihe.

11.2.4 Abklingverhalten der Fourier-Koeffizienten

Nach dem Riemann–Lebesgue–Lemma 11.32 bilden die Fourier-Koeffizienten prinzipiell eine Nullfolge. Es gilt das Prinzip: je glatter die Funktion, um so schneller fallen die Fourier-Koeffizienten. Zunächst eine einfache Beobachtung:

Satz 11.40:

Für eine $2 \cdot \pi$ -periodische differenzierbare Funktion f mit integrierbarer Ableitung f' gilt

$$c_k(f') = i \cdot k \cdot c_k(f),$$

wo $c_k(f')$ bzw. $c_k(f)$ die Fourier-Koeffizienten von f' bzw. f sind.

Beweis: Es gilt $f(-\pi) = f(\pi)$ und $e^{i \cdot k \cdot \pi} = (-1)^k = e^{-i \cdot k \cdot \pi}$. Durch partielle Integration folgt:

$$\begin{aligned} c_k(f') &= \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \cdot e^{-i \cdot k \cdot x} dx \\ &= \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \left[f(x) \cdot e^{-i \cdot k \cdot x} \right]_{x=-\pi}^{x=\pi} - \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot (-i \cdot k) \cdot e^{-i \cdot k \cdot x} dx \\ &= \frac{f(\pi) \cdot e^{-i \cdot k \cdot \pi} - f(-\pi) \cdot e^{i \cdot k \cdot \pi}}{2 \cdot \pi} + i \cdot k \cdot c_k(f) = i \cdot k \cdot c_k(f). \end{aligned}$$

Q.E.D.

Diese Aussage ist leicht zu merken: stellt man sich die Funktion direkt als Fourier-Reihe gegeben vor, so kann man die Summanden der Reihe einzeln differenzieren:

$$\frac{d}{dx} \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot e^{i \cdot k \cdot x}}_{f(x)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot \frac{d}{dx} e^{i \cdot k \cdot x} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{c_k \cdot (i \cdot k)}_{c_k(f')} \cdot e^{i \cdot k \cdot x}.$$

Bemerkung 11.41: So trivial der Zusammenhang zwischen den Fourier-Koeffizienten von f und f' mathematisch auch sein mag, er ist für Anwendungen von zentraler Bedeutung:

Das Ableiten wird für die Fourier-Koeffizienten zu einer algebraischen Operation (Multiplikation mit $i \cdot k$). Fourier-Ansätze verwandeln daher Differentialgleichungen in algebraische Gleichungen für die Fourier-Koeffizienten.

Satz 11.42: (Abklingverhalten der Fourier-Koeffizienten)

Ist eine $2 \cdot \pi$ -periodische Funktion p -fach differenzierbar und ist die p -te Ableitung integrierbar, so gilt für die Fourier-Koeffizienten der Funktion:

$$|c_k| = o\left(\frac{1}{|k|^p}\right).$$

Zur Erinnerung: Das „Landau-Symbol“ o bedeutet $\lim_{|k| \rightarrow \infty} |k|^p \cdot |c_k| = 0$.

Merke: Je glatter die Funktion (d.h., je öfter differenzierbar), um so schneller konvergieren die Fourier-Koeffizienten gegen 0.

Beweis: Seien $c_k(f^{(p)})$ die Fourier-Koeffizienten der p -ten Ableitung. Nach Satz 11.40 gilt

$$c_k(f^{(p)}) = i \cdot k \cdot c_k(f^{(p-1)}) = (i \cdot k)^2 \cdot c_k(f^{(p-2)}) = \dots = (i \cdot k)^p \cdot c_k(f).$$

Nach dem Riemann-Lebesgue-Lemma 11.32 bilden die Fourier-Koeffizienten $c_k(f^{(p)})$ der p -ten Ableitung eine Nullfolge für $|k| \rightarrow \infty$, d.h., die Fourier-Koeffizienten $c_k = c_k(f)$ fallen schneller ab als $1/|k|^p$:

$$c_k(f) = \frac{c_k(f^{(p)})}{(i \cdot k)^p} = o\left(\frac{1}{|k|^p}\right).$$

Q.E.D.

Bemerkung 11.43: In Satz 11.42 wird das Abklingverhalten der Fourier-Koeffizienten mittels des Landau-Symbols o recht unspezifisch als „schneller abfallend als $1/|k|^p$ “ beschrieben. Die in der Praxis auftretenden Funktionen sind meist stückweise aus glatten Anteilen zusammengesetzt, wodurch sich in der Praxis meist „schneller abfallend als $1/|k|^p$ “ in der Form

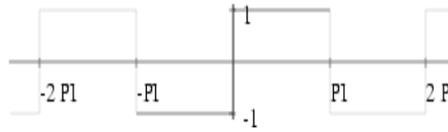
„um eine k -Potenz schneller abfallend als $1/|k|^p$ “

ergibt. Es gilt die Faustregel:

$$\begin{aligned}
 f \text{ unstetig:} & \quad c_k \sim \frac{1}{k}. \\
 f \text{ stetig, } f' \text{ unstetig:} & \quad c_k \sim \frac{1}{k^2}. \\
 f' \text{ stetig, } f'' \text{ unstetig:} & \quad c_k \sim \frac{1}{k^3}. \\
 f^{(p)} \text{ stetig, } f^{(p+1)} \text{ unstetig:} & \quad c_k \sim \frac{1}{k^{p+2}}.
 \end{aligned}$$

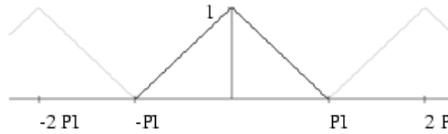
Beispiele:

f_1 unstetig:



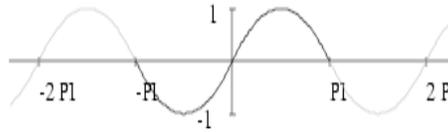
$$f_1(x) = \frac{4}{\pi} \cdot \left(\sin(x) + \frac{\sin(3 \cdot x)}{3} + \frac{\sin(5 \cdot x)}{5} + \dots \right).$$

f_2 stetig, f_2' unstetig:



$$f_2(x) = 1 + \frac{4}{\pi^2} \cdot \left(\cos(x) + \frac{\cos(3 \cdot x)}{3^2} + \frac{\cos(5 \cdot x)}{5^2} + \dots \right).$$

f_3' stetig, f_3'' unstetig:



$$f_3(x) = \frac{4}{\pi^2} \cdot x \cdot (\pi - |x|) = \frac{32}{\pi^3} \cdot \left(\frac{\sin(x)}{1^3} + \frac{\sin(3 \cdot x)}{3^3} + \frac{\sin(5 \cdot x)}{5^3} + \dots \right).$$

Bemerkung 11.44: Für eine durch ihre Fourier-Reihe dargestellte Funktion gilt für den Approximationsfehler durch endliche Fourier-Approximationen

$$\begin{aligned}
 f(x) - \sum_{k=-n}^n c_k \cdot e^{i \cdot k \cdot x} &= \sum_{|k|>n} c_k \cdot e^{i \cdot k \cdot x} \\
 \Rightarrow \left| f(x) - \sum_{k=-n}^n c_k \cdot e^{i \cdot k \cdot x} \right| &\leq \sum_{|k|>n} |c_k \cdot e^{i \cdot k \cdot x}| = \sum_{|k|>n} |c_k|.
 \end{aligned}$$

Je schneller die Fourier-Koeffizienten abfallen, umso schneller die punktweise Konvergenz an allen Stellen!

11.2.5 Das Gibbs'sche Phänomen

Wir betrachten das Konvergenzverhalten der endlichen Fourier-Transformation für die „Sprungfunktion“ („Heaviside-Funktion“):

$$H(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \in [-\pi, 0), \\ 1 & \text{für } x \in [0, \pi). \end{cases}$$

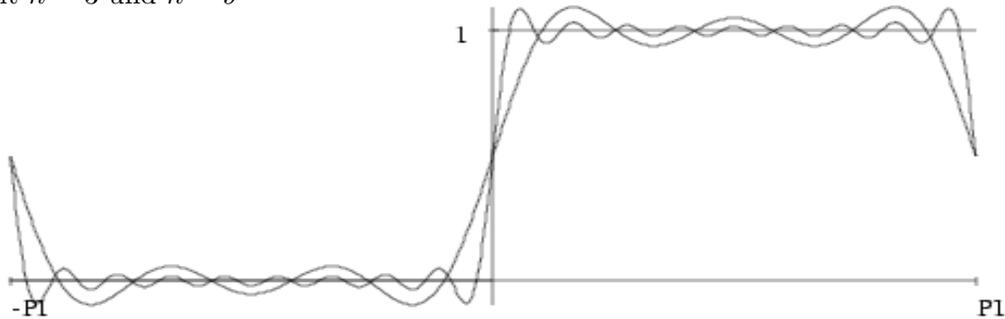
Als zugeordnete Fourier-Reihe berechnet man

$$H(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \cdot \left(\sin(x) + \frac{\sin(3 \cdot x)}{3} + \frac{\sin(5 \cdot x)}{5} + \dots \right),$$

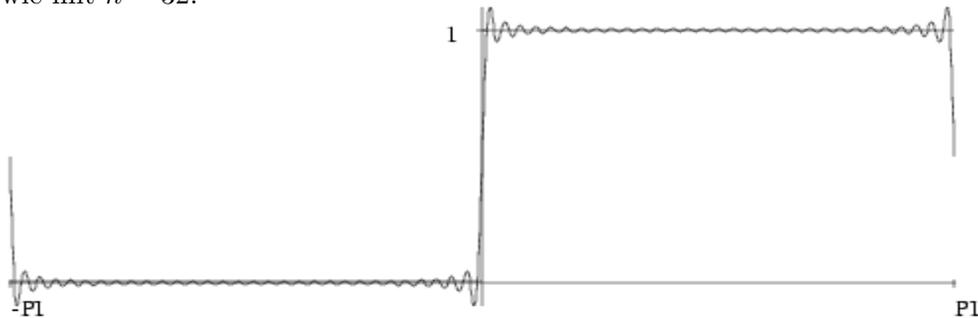
welche in der Tat $H(x)$ überall außer an den Sprungstellen punktweise darstellt. Hier die endlichen Fourier-Approximationen

$$S_{2 \cdot n - 1}(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \cdot \sum_{m=0}^{n-1} \frac{\sin((2 \cdot m + 1) \cdot x)}{2 \cdot m + 1}$$

mit $n = 3$ und $n = 9$



sowie mit $n = 32$:



Das Gibbs'sche² Phänomen ist, dass die Fourier-Approximationen an Sprungstellen ein Überschwingverhalten zeigen, dass mit wachsendem n nicht verschwindet: das erste Maximum von $S_n(x)$ für $x > 0$ liegt für jedes n deutlich über der Grenzfunktion $H(x) \equiv 1$ (für $x > 0$). Dies lässt sich unschwer explizit nachrechnen. Das betrachtete Maximum ist durch die erste positive Nullstelle der Ableitung bestimmt:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} S_{2 \cdot n - 1}(x) &= \frac{2}{\pi} \cdot \sum_{m=0}^{n-1} \cos((2 \cdot m + 1) \cdot x) = \frac{2}{\pi} \cdot \Re \left(\sum_{m=0}^{n-1} e^{i \cdot (2 \cdot m + 1) \cdot x} \right) \\ &= \frac{2}{\pi} \cdot \Re \left(e^{i \cdot x} \cdot \sum_{m=0}^{n-1} (e^{i \cdot 2 \cdot x})^m \right) = \frac{2}{\pi} \cdot \Re \left(e^{i \cdot x} \cdot \frac{e^{i \cdot 2 \cdot n \cdot x} - 1}{e^{i \cdot 2 \cdot x} - 1} \right) = \frac{2}{\pi} \cdot \Re \left(\frac{e^{i \cdot 2 \cdot n \cdot x} - 1}{e^{i \cdot x} - e^{-i \cdot x}} \right) \\ &= \frac{2}{\pi} \cdot \Re \left(\frac{e^{i \cdot 2 \cdot n \cdot x} - 1}{2 \cdot i \cdot \sin(x)} \right) = \frac{1}{\pi \cdot \sin(x)} \cdot \Im(e^{i \cdot 2 \cdot n \cdot x} - 1) = \frac{\sin(2 \cdot n \cdot x)}{\pi \cdot \sin(x)}. \end{aligned}$$

Die erste positive Nullstelle der Ableitung ist demnach $\xi_0 = \pi/(2 \cdot n)$. Der Wert von $S_{2 \cdot n - 1}$ an dieser Stelle ist

$$S_{2 \cdot n - 1}(\xi_0) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \cdot \sum_{m=0}^{n-1} \frac{\sin((2 \cdot m + 1) \cdot \frac{\pi}{2 \cdot n})}{2 \cdot m + 1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \cdot \sum_{m=0}^{n-1} \frac{\sin(\frac{(2 \cdot m + 1) \cdot \pi}{2 \cdot n})}{\frac{(2 \cdot m + 1) \cdot \pi}{2 \cdot n}}.$$

Die Summe lässt sich leicht interpretieren. Betrachte dazu das Integral

$$\frac{1}{\pi} \cdot \int_0^\pi \frac{\sin(y)}{y} dy \approx 0.5895.$$

Zerlege das Integrationsintervall $[0, \pi]$ durch die n Stützstellen $y_m = \frac{(2 \cdot m + 1) \cdot \pi}{2 \cdot n}$, ($m = 0, \dots, n - 1$) in äquidistante Intervalle der Länge π/n . Für $n \rightarrow \infty$ konvergieren die Riemann-Summen gegen das Integral:

$$\frac{1}{n} \cdot \sum_{m=0}^{n-1} \frac{\sin(\frac{(2 \cdot m + 1) \cdot \pi}{2 \cdot n})}{\frac{(2 \cdot m + 1) \cdot \pi}{2 \cdot n}} = \frac{1}{\pi} \cdot \sum_{m=0}^{n-1} \frac{\sin(y_m)}{y_m} \cdot \frac{\pi}{n} \xrightarrow{(n \rightarrow \infty)} \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^\pi \frac{\sin(y)}{y} dy.$$

Die Höhe des ersten positiven Maximums der Fourier-Approximation konvergiert damit für $n \rightarrow \infty$:

$$S_{2 \cdot n - 1}(\xi_0) \approx \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^\pi \frac{\sin(y)}{y} dy \approx 1.0895 \dots$$

²J.W. Gibbs, 1839 – 1903, amerikanischer Mathematiker/Physiker. Ein Zitat von ihm:

„A mathematician may say anything he pleases, but a physicist must be at least partially sane.“

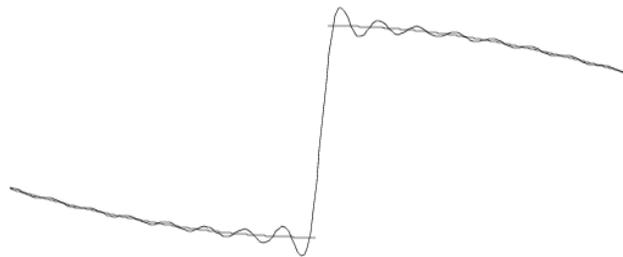
Betrachte noch einmal $H(x)$ und beachte, dass $H(x) - \frac{1}{2}$ eine ungerade Funktion ist. Aus Symmetriegründen nehmen daher alle Fourier–Approximationen $S_{2 \cdot n - 1}$ als letztes negatives Minimum vor der Sprungstelle bei 0 den Wert $\frac{1}{2} - 0.5895 = -0.0895$ an. Damit hat die Differenz des ersten Maximums rechts vom Sprung zum letzten Minimum links vom Sprung den Wert $1 + 2 \cdot 0.0895 = 1.179$, wobei die Sprunghöhe 1 ist. Multipliziert man die Sprungfunktion mit einem Faktor, so skalieren sich die Fourier–Koeffizienten mit diesem Faktor und die Fourier–Approximationen ebenfalls. Damit gilt:

Das Gibbs'sche Phänomen: An einer Sprungstelle ist für alle Fourier–Approximationen die Differenz zwischen dem benachbarten Minimum und Maximum, welche den Sprung einschließen, um etwa 17.9% größer als die Sprunghöhe.

In der Tat gilt dies nicht nur für die hier betrachtete Heaviside–Funktion: eine beliebige Funktion, die an einer Stelle x_0 eine Sprung macht, kann immer in der Form

$$\text{Funktion}(x) = \text{bei } x_0 \text{ stetige Funktion}(x) + \text{Sprunghöhe} \cdot H(x - x_0)$$

zerlegt werden. Ist die stetige Funktion hinreichend glatt, konvergiert die Fourier–Approximation des stetigen Anteils deutlich schneller gegen den stetigen Anteil als die Fourier–Approximation des Sprunganteils gegen den Sprunganteil. Der stetige Anteil kann daher im Approximationsfehler vernachlässigt werden gegen den Approximationsfehler von $H(x - x_0)$. Das Gibbs'sche Phänomen für H vererbt sich damit auf die Sprungstellen beliebig zusammengestückelter glatter Funktionen:



11.2.6 Beliebige Perioden

Bislang hatten wir die Fourier–Zerlegung von auf $[-\pi, \pi]$ gegebenen Funktionen betrachtet, die man sich als $2 \cdot \pi$ –periodisch fortgesetzt vorstellen sollte. Die Einschränkung auf das Standardintervall $[-\pi, \pi]$ geschah dabei lediglich aus schreibtechnischen Gründen, da alle Formeln hierfür besonders einfach werden.

Wir betrachten nun ein beliebiges Intervall $[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}]$, auf dem eine L –periodische

Funktion $f(x) = f(x+L)$ gegeben ist. In Analogie zur Definition 11.21 betrachtet man das Orthogonalsystem

$$\left\{ e^{i \cdot k \cdot \frac{2 \cdot \pi}{L} \cdot x} \right\}_{k \in \mathbb{Z}},$$

die entsprechenden Fourier-Koeffizienten

$$c_k = \frac{\langle e^{i \cdot k \cdot \frac{2 \cdot \pi}{L} \cdot x}, f \rangle}{\langle e^{i \cdot k \cdot \frac{2 \cdot \pi}{L} \cdot x}, e^{i \cdot k \cdot \frac{2 \cdot \pi}{L} \cdot x} \rangle} = \frac{1}{L} \cdot \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(x) \cdot e^{-i \cdot k \cdot \frac{2 \cdot \pi}{L} \cdot x} dx$$

und die entsprechenden Fourier-Approximationen

$$S_n(x) = \sum_{k=-n}^n c_k \cdot e^{i \cdot k \cdot \frac{2 \cdot \pi}{L} \cdot x}.$$

Diese Definitionen lassen sich folgendermassen interpretieren:

Zu $f : [-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}] \rightarrow \mathbb{C}$ betrachte die Funktion $g : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$, die durch eine Transformation $x \rightarrow \frac{L}{2 \cdot \pi} \cdot x$ aus f entsteht:

$$g(x) = f\left(\frac{L}{2 \cdot \pi} \cdot x\right), \quad f(x) = g\left(\frac{2 \cdot \pi}{L} \cdot x\right).$$

Diese Funktion ist $2 \cdot \pi$ -periodisch:

$$g(x + 2 \cdot \pi) = f\left(\frac{L}{2 \cdot \pi} \cdot (x + 2 \cdot \pi)\right) = f\left(\frac{L}{2 \cdot \pi} \cdot x + L\right) = f\left(\frac{L}{2 \cdot \pi} \cdot x\right) = g(x).$$

Zerlegt man g den vorangegangenen Kapiteln gemäß in eine Fourier-Reihe über dem Grundintervall $[-\pi, \pi]$, so ergeben sich nach Rücktransformation auf das Intervall $[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}]$ die obigen Darstellungen der Fourier-Koeffizienten und Fourier-Approximationen für f .

Damit ist unmittelbar klar, dass alle Strukturaussagen (Vollständigkeit bzgl. der L_2 -Norm, punktweise Konvergenz bei Dirichlet-Bedingungen, Gibbs'sches Phänomen etc.) auch für allgemeine Perioden gelten.

Bemerkung 11.45: Läßt man die Länge des Intervalls $[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}]$ gegen ∞ laufen, erhält man statt der Fourier-Koeffizienten

$$c_k = \frac{1}{L} \cdot \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(x) \cdot e^{-i \cdot k \cdot \frac{2 \cdot \pi}{L} \cdot x} dx$$

im Grenzwert $L \rightarrow \infty$ eine Funktion $\hat{f}\left(\frac{k \cdot 2 \cdot \pi}{L}\right) = \frac{L}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot c_k$ des kontinuierlichen „Frequenzparameters“ ω , der immer dichter beieinander liegenden Punkten $\omega = k \cdot 2 \cdot \pi / L$ (mit $k \in \mathbb{Z}$) entspricht. Diese Funktion

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot e^{-i \cdot \omega \cdot x} dx$$

nennt man die „**Fourier-Integraltransformation**“ von f . Ist f hinreichend glatt (z.B. Dirichlet-Bedingungen wie in Satz 11.34), so ist f aus der Fourier-Transformierten $\hat{f}(\omega)$ rekonstruierbar. Die Summen der Fourier-Approximation kann man dabei als Riemann-Summen interpretieren, aus denen im Grenzwert $L \rightarrow \infty$ ein Integral wird:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) \cdot e^{i\omega \cdot x} d\omega.$$