Kapitel 10

Gewöhnliche Differentialgleichungen

10.1 DGLen 1-ter Ordnung

10.1.1 Definitionen

Definition 10.1: (Gewöhnliche Differentialgleichungen)

Eine Gleichung der Form

$$\frac{d}{dx}\, y(x) = f(x, y(x))$$

heißt (explizite) **„gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung“** *für die Funktion $y(x)$, kurz* **„DGL“**.

Beispiel 10.2: Einige Beispiele von DGLen für $y = y(x)$:

$$\frac{dy}{dx} = y, \quad \frac{dy}{dx} = x \cdot y^2, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y - x}{y + x}.$$

Auch

$$x \cdot y \cdot \frac{dy}{dx} = \sin(y),$$

ist eine DGL, wir werden sie aber immer in der nach $\frac{dy}{dx}$ aufgelösten Form

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin(y)}{x \cdot y}$$

betrachten. Als Kurzform schreibt man auch $y' = \dfrac{\sin(y)}{x \cdot y}$.

Beispiel 10.3: Wir betrachten die Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = \lambda \cdot y$$

mit einer Konstanten λ. Wir raten zunächst eine Lösung:

$$y(x) = c \cdot e^{\lambda \cdot x},$$

wobei c eine beliebige Konstante ist. In der Tat ist dies für jeden Wert von c eine Lösung der DGL:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\, c \cdot e^{\lambda \cdot x} = c \cdot \frac{d}{dx} e^{\lambda \cdot x} = c \cdot \lambda \cdot e^{\lambda \cdot x} = \lambda \cdot \underbrace{(c \cdot e^{\lambda \cdot x})}_{y(x)} = \lambda \cdot y(x).$$

Wir können die Konstante c durch den **„Anfangswert“** $y(0)$ ausdrücken:

$$y(0) = c \cdot e^{\lambda \cdot 0} = c.$$

Also: die Lösung von $\frac{dy}{dx} = \lambda \cdot y$ ist

$$y(x) = y(0) \cdot e^{\lambda \cdot x}.$$

In Beispiel 10.20 zeigen wir, dass dies in der Tat die allgemeinste Lösung der DGL $y' = \lambda \cdot y$ ist.

Merke 10.4:

> *Die allgemeine Lösung einer DGL erster Ordnung hat immer eine beliebige freie Konstante. Die Lösung mit dieser freien Konstanten heißt* **„allgemeine Lösung“**. *Lösungen für spezielle Werte dieser Konstante heißen* **„spezielle Lösungen“**.

Beispiel 10.5: In MuPAD werden DGLen mittels `ode` (engl: ode = ordinary differential equation = gewöhnliche DGL) erzeugt, z.B. $y' = y + x$:

```
>> DGL:= ode({y'(x) = x + y(x)}, {y(x)}):
```

Ein solches Objekt kann dann mittels `solve` gelöst werden:

```
>> solve(DGL)
                    {exp(x - C1) - x - 1}
```

Man kann Anfangsbedingungen direkt in das `ode`–Objekt einbauen, woraufhin `solve` die freie Konstante so wählt, dass die Anfangsbedingung erfüllt ist:

```
>> DGL:= ode({y'(x) = x + y(x), y(0) = 1}, {y(x)}):
>> solve(DGL)

                   {exp(x + ln(2)) - x - 1}
```

18.12.03↓

10.1.2 Graphische Lösung

Dieses graphische Verfahren ist zwar ungenau (halt graphisch), aber funktioniert dafür für beliebige DGLen $y' = f(x, y)$. Es ist äußerst nützlich, um sich schnell einen *qualitativen* Überblick über das Verhalten der Lösungen zu verschaffen.

Graphisches Rezept 10.6:

Löse eine beliebige DGL $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$:

- *Zeichne in die* x-y-*Ebene an vielen Punkten* (x, y) *die Vektoren des sogenannten* **„Richtungsfeldes"**

$$\vec{v}(x, y) = \begin{pmatrix} 1 \\ f(x, y) \end{pmatrix}$$

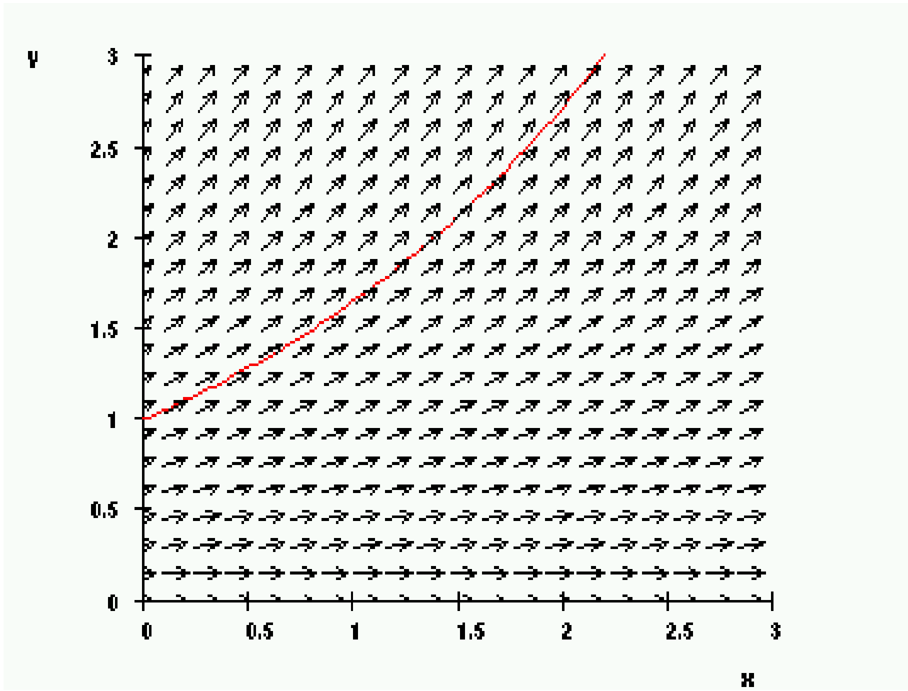
ein. Es interessieren nur die Richtungen der Vektoren, nicht die Längen.

- $\boxed{\text{Wähle einen Startpunkt } (x_0, y_0) \text{ und folge den Pfeilen!}}$ *D.h., zeichne eine Kurve, deren Tangente an jedem Punkt mit den vorgegebenen Richtungsvektoren* $\vec{v}(x, y)$ *übereinstimmt.*

Die so vom Startpunkt ausgehende Kurve ist der Graph derjenigen Lösung, für die $y(x_0) = y_0$ gilt.

Beispiel 10.7: Wir zeichnen das Richtungsfeld $\vec{v}(x, y) = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{y}{2} \end{pmatrix}$ der DGL $y' = \frac{y}{2}$. Vom Punkt $(x_0, y_0) = (0, 1)$ startend wird eine Lösungskurve eingezeichnet. Wir benutzen hier, dass wir die Lösung $y(x) = e^{\frac{x}{2}}$ in Beispiel 10.3 (mit $\lambda = \frac{1}{2}$, $y(0) = 1$) bereits berechnet haben:

```
>> plot(
    plot::Function2d(exp(x/2), x = 0..2.9, Color = RGB::Red),
    plot::VectorField2d([1, y/2], x = 0..2.9, y = 0..2.9,
                     Color = RGB::Black),
    ViewingBox = [0..3, 0..3]
   )
```

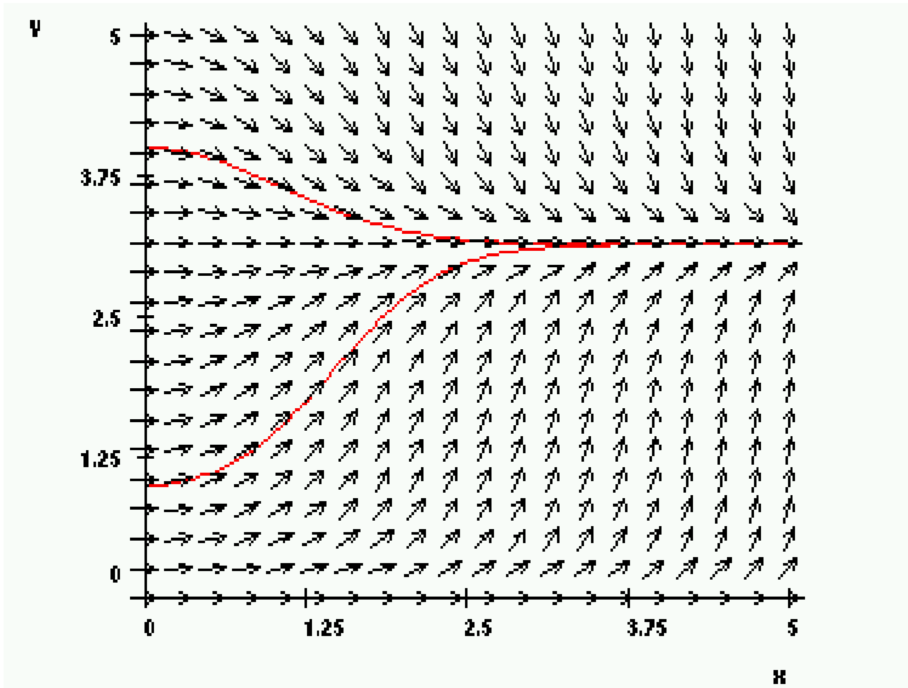


Beispiel 10.8: Ein weiteres Beispiel:

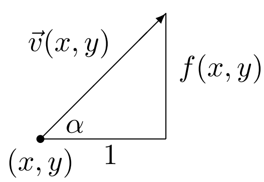
$$\frac{dy}{dx} = x \cdot \sin(y), \quad \vec{v}(x,y) = \begin{pmatrix} 1 \\ x \cdot \sin(y) \end{pmatrix}.$$

Die Lösungen durch die Punkte $(x_0, y_0) = (0, 1)$ und $(x_0, y_0) = (0, 4)$ werden eingezeichnet. Hier wird der numerische DGL-Löser `numeric::odesolve2` zum Einzeichnen der Lösungskurven eingesetzt (engl: ode = ordinary differential equation = gewöhnliche DGL):

```
>> Loesung1:= numeric::odesolve2((x, y) -> [x*sin(y[1])], 0, [1]):
>> Loesung2:= numeric::odesolve2((x, y) -> [x*sin(y[1])], 0, [4]):
>> plot(
    plot::Function2d(Loesung1(x)[1], x = 0..5, Color = RGB::Red),
    plot::Function2d(Loesung2(x)[1], x = 0..5, Color = RGB::Red),
    plot::VectorField2d([1, x*sin(y)], x = 0..5, y = 0..5,
                        Color = RGB::Black)
   )
```



Bemerkung 10.9: *Worauf basiert das Verfahren? Die Tangente der eingezeichneten Kurve ist parallel zum Richtungsfeld $\vec{v}(x,y)$. Die Steigung der Kurventangente (der Tangens des Steigungswinkels α) ist y', die Steigung des Richtungsvektors ist $\tan(\alpha) = f(x,y)$:*



Damit gilt $y' = \tan(\alpha) = f(x,y)$.

Bemerkung 10.10: *Die Tatsache, dass man an irgendeinem Punkt (x_0, y_0) starten kann, d.h., in der Lösung eine „Startbedingung“ $y(x_0) = y_0$ vorgeben kann, entspricht der Tatsache, dass die allgemeine Lösung eine beliebige Konstante enthält.*

10.1.3 Separation (Trennung der Variablen)

Dies ist eine Technik, die nur für DGLen der speziellen Form $y' = f(x) \cdot g(y)$ funktioniert: die rechte Seite der DGL muss ein Produkt von Funktionen jeweils einer Variablen sein.

Beispiel 10.11: Betrachte die DGL

$$\frac{dy}{dx} = x \cdot y.$$

Die Idee ist, alle Ausdrücke in y (inclusive dy) auf der einen Seite der Gleichung, die Ausdrücke in x (inclusive dx) auf der anderen Seite zu sammeln („Trennung der Variablen“):

$$\frac{1}{y}\ dy = x \cdot dx.$$

Nun trage auf beiden Seiten ein Integralzeichen ein und bestimme die Stammfunktionen:

$$\int \frac{1}{y}\ dy = \int x \cdot dx \quad \Rightarrow \quad \ln(|y|) = \frac{x^2}{2} + \tilde{c}$$

(mit einer Integrationskonstanten $\tilde{c}$). Diese Gleichung definiert y in Abhängigkeit von x. Löse nach y auf:

$$|y| = e^{\frac{x^2}{2}+\tilde{c}} = e^{\tilde{c}} \cdot e^{\frac{x^2}{2}} \quad \Rightarrow \quad y = \pm e^{\tilde{c}} \cdot e^{\frac{x^2}{2}}.$$

Zur Vereinfachung wird die Konstante $\pm e^{\tilde{c}}$ als neue Konstante c geschrieben:

$$y = c \cdot e^{\frac{x^2}{2}}.$$

Dies ist die allgemeine Lösung der DGL $y' = x \cdot y$. Probe:

$$y' = \frac{d}{dx}\ c \cdot e^{\frac{x^2}{2}} = c \cdot \frac{d}{dx}\ e^{\frac{x^2}{2}} = c \cdot x \cdot e^{\frac{x^2}{2}} = x \cdot \underbrace{c \cdot e^{\frac{x^2}{2}}}_{y(x)} = x \cdot y(x).$$

Bemerkung 10.12: *Diese Technik kann nur dann funktionieren, wenn man es schafft, die Variablen x und y auf verschiedene Seiten der Gleichung zu bringen. Für die allgemeine DGL $y' = h(x,y)$ ist dies genau dann der Fall, wenn die Funktion $h(x,y)$ das Produkt einer Funktion in x und einer Funktion in y ist:*

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{g(y)}\ dy = f(x)\ dx$$

$$\Rightarrow \quad \int \frac{1}{g(y)}\ dy = \int f(x) \cdot dx \quad \Rightarrow \quad G(y) = F(x) + c,$$

wobei $G(y)$ eine Stammfunktion von $\frac{1}{g(y)}$ und $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$ ist.

Diese Separationstechnik läßt sich folgendermaßen zusammenfassen:

Satz 10.13: (Separation der Variablen)
Sei $G(y)$ eine Stammfunktion von $\frac{1}{g(y)}$, sei $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$. Die allgemeine Lösung der DGL

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y)$$

erfüllt die Gleichung

$$G(y) = F(x) + c.$$

Durch Auflösen dieser Gleichung nach y ergibt sich die explizite Form der Lösung

$$y(x) = G^{-1}(F(x) + c)$$

mit der Umkehrfunktion G^{-1} von G.

„Beweis": Sei $y(x)$ eine Funktion, mit der für alle x die Gleichung

$$G(y(x)) = F(x) + c$$

mit einer Konstanten c erfüllt ist. Durch Ableiten nach x erhält man

$$G'(y(x)) \cdot y'(x) = F'(x) \;\Rightarrow\; \frac{1}{g(y(x))} \cdot y'(x) = f(x) \;\Rightarrow\; y'(x) = f(x) \cdot g(y).$$

Wir haben also eine Lösung mit einer freien Konstante c vor uns.

Q.E.D.

Beispiel 10.14: Betrachte die DGL $y' = y^2$. Separation:

$$\frac{dy}{dx} = y^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{y^2}\, dy = 1 \cdot dx \quad \Rightarrow \quad \int \frac{1}{y^2}\, dy = \int 1 \cdot dx$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{1}{y} = x + c \quad \Rightarrow \quad y = \frac{1}{-x - c}.$$

Damit ist die allgemeine Lösung von $y' = y^2$ bestimmt. Es ist schöner, die beliebige Konstante c durch eine Anfangsbedingung $y(x_0)$ auszudrücken. Z.B., für $x_0 = 0$:

$$y(0) = \frac{1}{-0 - c} = -\frac{1}{c} \quad \Rightarrow \quad c = -\frac{1}{y(0)}.$$

Damit ergibt sich die Lösung zur Anfangsbedingung $y(0)$ in der folgenden Form:

$$y(x) = \frac{1}{-x + \frac{1}{y(0)}} = \frac{y(0)}{1 - x \cdot y(0)}.$$

Probe:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\, \frac{y(0)}{1 - x \cdot y(0)} = \frac{y(0)^2}{\big(1 - x \cdot y(0)\big)^2} = y(x)^2.$$

Weiterhin ergibt sich für $x = 0$ in der Tat:

$$y(x)_{|x=0} = \frac{y(0)}{1 - 0 \cdot y(0)} = y(0).$$

Beispiel 10.15: Betrachte eine **lineare** DGL

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot y.$$

„Linear“ heißt, dass mit irgendeiner speziellen Lösung $y_s(x)$ auch jedes Vielfache $y(x) = \tilde{c} \cdot y_s(x)$ mit einer beliebigen Konstanten $\tilde{c}$ eine Lösung ist:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\ \tilde{c} \cdot y_s(x) = \tilde{c} \cdot \frac{d}{dx}\ y_s(x) = \tilde{c} \cdot f(x) \cdot y_s(x) = f(x) \cdot \underbrace{\tilde{c} \cdot y_s(x)}_{y(x)} = f(x) \cdot y(x).$$

Damit ist klar: die freie Konstante muss multiplikativ eingehen. Man kann die allgemeine Lösung per Separation immer durch eine einzige Integration ermitteln:

$$\frac{1}{y}\ dy = f(x)\ dx \quad \Rightarrow \quad \ln(|y|) = \int f(x)\ dx \quad \Rightarrow \quad y = \pm e^{\int f(x)\ dx}.$$

Wo ist nun die multiplikative Konstante? Sei $F(x)$ irgendeine konkrete Stammfunktion von $f(x)$ (ohne Integrationskonstante), so gilt $\int f(x)\ dx = F(x) + \tilde{c}$ mit einer beliebigen Integrationskonstanten $\tilde{c}$, also

$$y = \pm e^{F(x)+\tilde{c}} = \underbrace{\pm e^{\tilde{c}}}_{c} \cdot e^{F(x)} = c \cdot e^{F(x)},$$

wobei c wiederum eine beliebige Konstante ist. Vergleiche auch das spezielle Beispiel 10.11.

> **Merke:** Die Lösung von $y' = f(x) \cdot y$ ist
>
> $$y(x) = c \cdot e^{F(x)},$$
>
> wo $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$ ist.

Beispiel 10.16: Man kann die Startbedingung auch direkt in den Integrationsschritt der Separation einbauen. Dazu folgendes Beispiel:

$$\frac{dy}{dx} = \cos(x) \cdot e^y, \quad y(x_0) = y_0.$$

Separation:

$$\frac{1}{e^y}\ dy = \cos(x)\, dx \quad \Rightarrow \quad e^{-y}\ dy = \cos(x)\, dx.$$

Rezept:

Anstatt links und rechts allgemeine Stammfunktionen mit einer beliebigen Integrationskonstanten zu bestimmen, werden **bestimmte** Integrale startend bei y_0 bzw. x_0 berechnet.

Wir integrieren bis Y bzw. X, wobei Y die Lösung $Y = y(X)$ für $x = X$ darstellt. In diesem Beispiel:

$$\begin{aligned}
\int_{y_0}^{Y} e^{-y}\, dy &= \int_{x_0}^{X} \cos(x)\, dx \\
\Rightarrow \quad [-e^{-y}]_{y=y_0}^{y=Y} &= [\sin(x)]_{x=x_0}^{x=X} \\
\Rightarrow \quad -e^{-Y} + e^{-y_0} &= \sin(X) - \sin(x_0).
\end{aligned}$$

Durch Auflösen nach Y erhält man die Lösung $Y = y(X)$, welche für $X = x_0$ den Wert y_0 annimmt:

$$Y(X) = \ln(e^{-y_0} + \sin(x_0) - \sin(X)).$$

Mit der Umbenennung $X \to x$, $Y \to y$ erhält man die Lösung

$$y(x) = -\ln\Big(e^{-y_0} + \sin(x_0) - \sin(x)\Big).$$

Probe:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos(x)}{e^{y_0} + \sin(x_0) - \sin(x)} = \frac{\cos(x)}{e^{\ln\left(e^{y_0} + \sin(x_0) - \sin(x)\right)}} = \frac{\cos(x)}{e^{-y(x)}} = \cos(x) \cdot e^{y(x)},$$

$$y(x_0) = -\ln\Big(e^{-y_0} + \sin(x_0) - \sin(x_0)\Big) = -\ln(e^{-y_0}) = y_0.$$

10.1.4 Variation der Konstanten

↓6.1.04

In diesem Abschnitt wird die Lösungstechnik für DGLen der Form

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot y + g(x) \qquad (1)$$

vorgestellt. Die DGL

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot y \qquad (2)$$

ohne den Term $g(x)$ heißt **„homogene DGL“**, mit dem Term $g(x)$ heißt die DGL **„inhomogen“**. Die Lösung $y_h(x)$ der homogenen DGL (2) haben wir in Beispiel 10.15 kennengelernt:

$$y_h(x) = c \cdot e^{F(x)},$$

wobei $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$ ist.

Rezept „Variation der Konstanten“ 10.17:

Zur Lösung der inhomogenen DGL (1) ersetze die freie Konstante c in der Lösung $y_h(x)$ der homogenen DGL (2) durch eine Funktion $c(x)$. Einsetzen dieses „Ansatzes“ in die DGL (1) liefert eine DGL für $c(x)$, die immer durch einfache Integration gelöst werden kann.

Ansatz für die Lösung der inhomogenen DGL (1):

$$y(x) = c(x) \cdot e^{F(x)}.$$

Einsetzen in die inhomogene DGL (2). Die linke Seite:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\Big(c(x) \cdot e^{F(x)}\Big) = \boxed{\frac{dc(x)}{dx} \cdot e^{F(x)}} + c(x) \cdot F'(x) \cdot e^{F(x)}.$$

Die rechte Seite:

$$f(x) \cdot y(x) + g(x) = f(x) \cdot c(x) \cdot e^{F(x)} + \boxed{g(x)}.$$

Mit $F'(x) = f(x)$ heben sich beim Gleichsetzen der linken und rechten Seite zwei Terme weg, und es verbleibt folgende DGL für $c(x)$:

$$\frac{dc}{dx} \cdot e^{F(x)} = g(x), \quad \text{also} \quad \frac{dc}{dx} = g(x) \cdot e^{-F(x)}.$$

Mit anderen Worten, $c(x)$ ist eine Stammfunktion von $g(x) \cdot e^{-F(x)}$:

$$c(x) = \int g(x) \cdot e^{-F(x)}\, dx.$$

Damit haben wir eine allgemeine Darstellung der Lösung $y(x) = c(x) \cdot e^{F(x)}$ der inhomogenen DGL (1):

Satz 10.18: (Lösungsformel)

Die allgemeine Lösung der DGL $\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot y + g(x)$ ist

$$\boxed{y(x) = e^{F(x)} \cdot \int g(x) \cdot e^{-F(x)}\, dx,}$$

wobei $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$ ist.

Diese Lösungsformel wird man sich nicht merken können. Man merke sich daher lieber das Konstruktionsprinzip 10.17 der „Variation der Konstanten“.

Beispiel 10.19: Finde die allgemeine Lösung der DGL

$$\frac{dy}{dx} = y + x.$$

Schritt 1: Die Lösung der homogenen DGL $y' = y$ ist nach Beispiel 10.15 (mit $f(x) = 1$, $F(x) = x$):

$$y_h(x) = c \cdot e^x.$$

Schritt 2: Variationsansatz $y(x) = c(x) \cdot e^x$ für die inhomogene DGL $y' = y + x$.

Schritt 3: Einsetzen in die inhomogene DGL. Die linke Seite der DGL:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\Big(c(x) \cdot e^x\Big) = \frac{dc}{dx} \cdot e^x + c(x) \cdot e^x.$$

Die rechte Seite der DGL:

$$y + x = c(x) \cdot e^x + x.$$

Durch Vergleich folgt

$$\frac{dc}{dx} \cdot e^x = x \quad \Rightarrow \quad \frac{dc}{dx} = x \cdot e^{-x}.$$

Schritt 4: Bestimme $c(x)$ durch Integration:

$$c(x) = \int x \cdot e^{-x}\, dx.$$

Dieses Integral wird analog zu Beispiel 9.12 durch partielle Integration bestimmt:

$$c(x) = \int \underbrace{x}_{f(x)} \cdot \underbrace{e^{-x}}_{g'(x)}\, dx = \underbrace{x}_{f(x)} \cdot \underbrace{(-e^{-x})}_{g(x)} - \int \underbrace{1}_{f'(x)} \cdot \underbrace{(-e^{-x})}_{g(x)}\, dx$$

$$= -x \cdot e^{-x} + \int e^{-x}\, dx = -x \cdot e^{-x} - e^{-x} + \tilde{c} = -(x+1) \cdot e^{-x} + \tilde{c}$$

mit einer beliebigen Integrationskonstanten $\tilde{c}$.

Schritt 5: Das Endergebnis (die allgemeine Lösung von $y' = y + x$) ist

$$y(x) = c(x) \cdot e^x = \Big(-(x+1) \cdot e^{-x} + \tilde{c} \Big) \cdot e^x = -(x+1) \cdot \underbrace{e^{-x} \cdot e^x}_{1} + \tilde{c} \cdot e^x$$

$$= -x - 1 + \tilde{c} \cdot e^x.$$

Schritt 6: Probe:

$$\frac{dy}{dx} - (y + x) = \underbrace{-1 + \tilde{c} \cdot e^x}_{y'} - \Big(\underbrace{-x - 1 + \tilde{c} \cdot e^x}_{y} \;+\; x \Big) = 0. \quad \text{(OK)}$$

Alternativ: Wir wenden die Lösungsformel 10.18 direkt an. Es wird betrachtet $y' = y + x$, d.h., $f(x) = 1$ und $g(x) = x$. Mit der Stammfunktion $F(x) = x$ von $f(x) = 1$ ergibt sich sofort

$$y(x) = \underbrace{e^x}_{e^{F(x)}} \cdot \int \underbrace{x}_{g(x)} \cdot \underbrace{e^{-x}}_{e^{-F(x)}} \, dx.$$

Damit landen wir unmittelbar bei dem oben bereits gelösten Integrationsproblem

$$\int x \cdot e^{-x} \, dx = -(x+1) \cdot e^{-x} + \tilde{c},$$

und es ergibt sich wiederum die Lösung

$$y(x) = e^x \cdot \Big(-(x+1) \cdot e^{-x} + \tilde{c} \Big) = -x - 1 + \tilde{c} \cdot e^x.$$

Beispiel 10.20: Wir zeigen, dass die Lösung

$$y(x) = c \cdot e^{\lambda \cdot x}$$

in der Tat die *allgemeinste* Lösung der DGL

$$\frac{dy}{dx} = \lambda \cdot y$$

ist. Dazu wenden wir das Prinzip der Variation der Konstanten auf diese homogene DGL an, d.h., wir versuchen, die allgemeinste Lösung in der Form $y(x) = c(x) \cdot e^{\lambda \cdot x}$ zu bestimmen. Einsetzen dieses Ansatzes in die DGL liefert auf der linken Seite:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dc}{dx} \cdot e^{\lambda \cdot x} + c(x) \cdot \lambda \cdot e^{\lambda \cdot x}.$$

Die rechte Seite ist

$$\lambda \cdot y(x) = \lambda \cdot c(x) \cdot e^{\lambda \cdot x}.$$

Durch Vergleich folgt

$$\frac{dc}{dx} = 0.$$

Die allgemeinste Lösung dieser „DGL“ für $c(x)$ ist offensichtlich eine konstante Funktion:

$$c(x) = \int 0 \, dx = 0 + \tilde{c} = \text{eine beliebige Konstante}.$$

10.2 Lineare DGLen höherer Ordnung

Wir betrachten hier speziell **lineare DGLen** n-ter Ordnung

$$a_n(x) \cdot y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x) \cdot y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_1(x) \cdot y'(x) + a_0(x) \cdot y(x) = f(x)$$

mit gegebener **„Inhomogenität“** $f(x)$. Wir können o.B.d.A. durch $a_n(x)$ teilen und die Koeffizientenfunktionen $a_i(x)$ und die Inhomogenität $f(x)$ umdefinieren, so dass wir nur die „normierte“ Form

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x) \cdot y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_1(x) \cdot y'(x) + a_0(x) \cdot y(x) = f(x)$$

zu betrachten brauchen. Als Anfangsbedingungen können wir die n Werte

$$y(x_0),\ y'(x_0), \ldots, y^{(n-1)}(x_0)$$

an einem Punkt x_0 vorgeben (die höheren Ableitungen an dieser Stelle liegen dann wegen $y^{(n)}(x_0) = f(x_0) - a_{n-1}(x_0) \cdot y^{(n-1)}(x_0) - \ldots - a_0(x_0) \cdot y(x_0)$ fest).

Die allgemeine Lösung einer DGL n-ter Ordnung besitzt n freie Konstanten.

Für lineare DGLen gilt:

Satz 10.21: (Superpositionsprinzip)

Seien $y_1(x)$ und $y_2(x)$ Lösungen der homogenen linearen DGL

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x) \cdot y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_0(x) \cdot y(x) = 0.$$

Dann ist $y(x) = c_1 \cdot y_1(x) + c_2 \cdot y_2(x)$ mit beliebigen Konstanten c_1, c_2 wieder eine Lösung.

Beweis: trivial.

So trivial das obige Superpositionsprinzip mathematisch auch sein mag, es ist ein fundamentales Grundprinzip beim Suchen von Lösungen. Es besagt, dass man sich zunächst auf einzelne spezielle Lösungen konzentrieren darf, die man zuletzt per Linearkombination zur Gesamtlösung zusammensetzen kann.

Beispiel 10.22: Wir betrachten die homogene lineare DGL zweiter Ordnung

$$x^2 \cdot y''(x) - 2 \cdot x \cdot y'(x) + 2 \cdot y(x) = 0.$$

Zum Auffinden von Lösungen machen wir den Ansatz $y(x) = x^\lambda$. Einsetzen in die DGL liefert

$$x^2 \cdot \underbrace{\lambda \cdot (\lambda - 1) \cdot x^{\lambda-2}}_{y''(x)} - 2 \cdot x \cdot \underbrace{\lambda \cdot x^{\lambda-1}}_{y'(x)} + 2 \cdot \underbrace{x^\lambda}_{y(x)}$$
$$= (\lambda^2 - 3 \cdot \lambda + 2) \cdot x^\lambda = (\lambda - 1) \cdot (\lambda - 2) \cdot x^\lambda = 0.$$

Offensichtlich ist diese Gleichung genau dann für alle x erfüllt, wenn $\lambda = 1$ oder $\lambda = 2$ gilt. Damit haben wir zwei „Grundlösungen“

$$y_1(x) = x, \quad y_2(x) = x^2$$

gefunden. Das Superpositionsprinzip besagt, dass

$$y(x) = c_1 \cdot y_1(x) + c_2 \cdot y_2(x) = c_1 \cdot x + c_2 \cdot x^2$$

mit beliebigen Konstanten c_1, c_2 wieder eine Lösung ist. Wir haben damit eine Lösung mit 2 freien Konstanten gefunden. Der folgende Satz 10.26 wird uns garantieren, dass dies die allgemeine Lösung ist.

Definition 10.23:

Ein Satz von Funktionen $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ heißt **linear unabhängig**, *wenn die Linearkombination*

$$f(x) = c_1 \cdot y_1(x) + \ldots + c_n \cdot y_n(x)$$

nur für die Konstanten $c_1 = 0, \ldots, c_n = 0$ identisch 0 ist.

Beispiel 10.24: Die Monome $y_0(x) = 1$, $y_1(x) = x$, $\ldots$, $y_n(x) = x^n$ sind linear unabhängig, denn die Polynomgleichung

$$c_0 + c_1 \cdot x + \ldots + c_n \cdot x^n = 0$$

hat nur endlich viele Lösungen für x, kann also nicht für alle x erfüllt sein, wenn nicht alle Konstanten $c_0, \ldots, c_n$ verschwinden.

Beispiel 10.25: Die Funktionen $y_1(x) = \sin(x)^2$, $y_2(x) = \cos(x)^2$ sind unabhängig. Sei

$$c_1 \cdot \sin(x)^2 + c_2 \cdot \cos(x)^2 = 0 \quad \forall x.$$

Für $x = 0$ folgt $c_2 = 0$, für $x = \pi/2$ folgt $c_1 = 0$.

Die Funktionen $y_1(x) = \sin(x)^2$, $y_2(x) = \cos(x)^2$, $y_3(x) = 1$ hingegen sind abhängig. Es gilt speziell

$$y_1(x) + y_2(x) - y_3(x) = \sin(x)^2 + \cos(x)^2 - 1 = 0 \quad \forall x.$$

Der folgende Satz besagt, dass es bei homogenen linearen DGLen n-ter Ordnung ausreicht, n spezielle linear unabhängige Lösungen zu finden. Diese lassen sich dann per Superposition zur allgemeinen Lösung zusammensetzen:

Satz 10.26: (Fundamentalsystem: die allgemeine Lösung)

Seien $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ linear unabhängige Lösungen der homogenen DGL n-ter Ordnung

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x) \cdot y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_0(x) \cdot y(x) = 0.$$

Dann ist die allgemeine Lösung

$$y(x) = c_1 \cdot y_1(x) + \ldots + c_n \cdot y_n(x)$$

mit beliebigen Konstanten $c_1, \ldots, c_n$. Die Lösungen $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ werden ein **„Fundamentalsystem"** *der DGL genannt.*

Beweis: (nur verdaulich, wenn man schon Lineare Algebra kann)
Es ist zu zeigen, dass ein Fundamentalsystem $y_1, \ldots, y_n$ die allgemeine homogene Lösung aufspannt. Wir haben hier noch nicht den technischen Apparat (Determinanten), daher ist das folgende nur für diejenigen verdaulich, die das Konzept von Determinanten aus der Schule mitbringen. Die Beobachtung ist, dass Funktionen $f_1, \ldots, f_m$ genau dann linear unabhängig sind, wenn die sogenannte **Wronski-Determinante** verschwindet:

$$W(f_1, \ldots, f_m) = \det \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & \ldots & f_m \\ f_1' & f_2' & \ldots & f_m' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(m-1)} & f_2'^{(m-1)} & \ldots & f_m^{(m-1)} \end{pmatrix} = 0.$$

Dies liegt daran, dass

$$c_1 \cdot f_1(x) + \ldots + c_m \cdot f_m(x) = 0 \quad \forall x$$

die linearen Gleichungen

$$\begin{array}{ccccccc} c_1 \cdot f_1(x) & + & \ldots & + & c_m \cdot f_m(x) & = & 0, \\ c_1 \cdot f_1'(x) & + & \ldots & + & c_m \cdot f_m'(x) & = & 0, \\ \vdots & & \ddots & & \ddots & & \vdots \\ c_1 \cdot f_1^{(m-1)}(x) & + & \ldots & + & c_m \cdot f_m^{(m-1)}(x) & = & 0 \end{array}$$

impliziert. In Matrixschreibweise:

$$\begin{pmatrix} f_1 & f_2 & \ldots & f_m \\ f_1' & f_2' & \ldots & f_m' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(m-1)} & f_2'^{(m-1)} & \ldots & f_m^{(m-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Es gibt nur dann einen nicht-trivialen Lösungsvektor $(c_1, \ldots, c_m)$, wenn die Determinante der Koeffizientenmatrix verschwindet (dies ist die Wronski-Determinante von $f_1, \ldots, f_m$).

Sei nun $y_1, \ldots, y_n$ ein Fundamentalsystem der homogenen DGL, sei y eine weitere Lösung. Dann verschwindet die Wronki-Determinante der $n+1$ Funktionen $y_1, \ldots, y_n, y$:

$$W(y_1, \ldots, y_n, y) = \det \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_n & y \\ y_1' & y_2' & \ldots & y_n' & y' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \ldots & y_n^{(n)} & y^{(n)} \end{pmatrix} = 0.$$

Um dies zu sehen, brauchen nur die in der n-ten Zeile stehenden n-ten Ableitungen über die DGL als Linearkombination der ersten $n-1$ Zeilen geschrieben zu werden. Die Determinante einer Matrix mit linear abhängigen Zeilen ist 0. Also sind die Funktionen $y_1, \ldots, y_n, y$ linear abhängig. Da die ersten $n-1$ Spalten als linear unabhängig vorausgesetzt sind (Fundamentalsystem), läßt sich die letzte Spalte als Linearkombination der ersten $n-1$ Spalten schreiben, also

$$y = c_1 \cdot y_1 + \ldots + c_n \cdot y_n.$$

Q.E.D.

Satz 10.27: (Die allgemeine Lösung linearer DGLen mit Inhomogenität)

Die allgemeine Lösung der inhomogenen DGL n-ter Ordnung

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x) \cdot y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_0(x) \cdot y(x) = f(x)$$

ist

$$y(x) = y_p(x) + c_1 \cdot y_1(x) + \ldots + c_n \cdot y_n(x),$$

wobei $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ ein Fundamentalsystem der homogenen DGL

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x) \cdot y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_0(x) \cdot y(x) = 0$$

ist und $y_p(x)$ irgendeine spezielle Lösung der inhomogenen DGL ist ($y_p(x)$ wird **„partikuläre (spezielle) Lösung“** *genannt).*

Merke: *Allgemeine inhomogene Lösung = spezielle inhomogene Lösung + allgemeine homogene Lösung.*

Beweis: Zur Abkürzung führen wir ein

$$L(y) = y^{(n)} + a_{n-1} \cdot y^{(n-1)} + \ldots + a_0 \cdot y.$$

Haben wir irgendeine Lösung y_p von $L(y) = f$, so erfüllt $y = y_p + u$ wegen $L(y_p + u) = L(y_p) + L(u)$ offensichtlich genau dann $L(y) = f$, wenn $L(u) = 0$ gilt. Damit besteht die allgemeine inhomogene Lösung y aus einer partikulären Lösung y_p plus der allgemeinen homogenen Lösung u.

Q.E.D.

Bemerkung 10.28: *Hier noch eine weitere nützliche allgemeine Beobachtung für* reelle *homogene lineare DGLen: Sind die Koeffizientenfunktionen $a_i(x)$ in*

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x) \cdot y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_0(x) \cdot y(x) = 0$$

reell, so gilt:

Mit jeder komplexen Lösung $y(x)$ sind auch der Realteil $\Re(y(x))$ und der Imaginärteil $\Im(y(x))$ Lösungen.

(Für jeden Summanden der DGL gilt $\Re(a_i(x) \cdot y(x)) = a_i(x) \cdot \Re(y(x))$ bzw. $\Im(a_i(x) \cdot y(x)) = a_i(x) \cdot \Im(y(x))$.) Damit können wir uns komplexe Lösungen verschaffen (was technisch oft einfacher ist als auf reellen Lösungen zu bestehen) und dann daraus per $\Re$ und $\Im$ reelle Lösungen extrahieren.

Beispiel 10.29: (Der gedämpfte harmonische Oszillator) Die lineare DGL

$$y''(x) + 2 \cdot \delta \cdot y'(x) + \omega_0^2 \cdot y(x) = 0$$

mit der reellen „Dämpfungskonstante“ $\delta > 0$ und der reellen „Grundfrequenz“ $\omega_0 > 0$ soll durch den Ansatz $y(x) = e^{\lambda \cdot x}$ gelöst werden, wobei λ geeignet zu bestimmen ist. Einsetzen des Ansatzes in die DGL liefert die Gleichung

$$\underbrace{\lambda^2 \cdot e^{\lambda \cdot x}}_{y''(x)} + 2 \cdot \delta \cdot \underbrace{\lambda \cdot e^{\lambda \cdot x}}_{y'(x)} + \omega_0^2 \cdot \underbrace{e^{\lambda \cdot x}}_{y(x)} = \underbrace{\left(\lambda^2 + 2 \cdot \delta \cdot \lambda + \omega_0^2\right)}_{=0} \cdot e^{\lambda \cdot x} = 0.$$

Dies führt zu

$$\lambda = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}.$$

Für kleine Dämpfungswerte $|\delta| < \omega_0$ schreiben wir intuitiver

$$\lambda = -\delta \pm i \cdot \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}.$$

Wir erhalten als komplexe Fundamentallösung der DGL die gedämpften Schwingungen

$$y_\pm(x) = e^{-\delta \cdot x} \cdot e^{\pm i \cdot \omega \cdot x}$$

mit

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2},$$

also als allgemeine Lösung der DGL:

$$y(x) = e^{-\delta\cdot x} \cdot \Big(c_+ \cdot e^{i\cdot\omega\cdot x} + c_- \cdot e^{-i\cdot\omega\cdot x}\Big).$$

Reelle Lösungen ergeben sich durch Real- und Imaginärteil. Nimmt man $c_\pm$ als reell an:

$$\begin{aligned}\Re(y(x)) &= e^{-\delta\cdot x} \cdot \overbrace{(c_+ + c_-)}^{c_1} \cdot \cos(\omega\cdot x),\\ \Im(y(x)) &= e^{-\delta\cdot x} \cdot \underbrace{(c_+ - c_-)}_{c_2} \cdot \sin(\omega\cdot x)\end{aligned}$$

mit neuen beliebigen Konstanten c_1, c_2.

Bemerkung 10.30: *Wir gehen hier nicht weiter auf lineare DGLen höherer Ordnung mit beliebigen Koeffizientenfunktion $a_0(x), \ldots, a_n(x)$ ein, da sich –abhängig von den $a_i(x)$– die Lösung meist nur durch spezielle Funktionen (Bessel-Funktionen, Airy-Funktionen, hypergeometrische Funktionen etc., etc., etc.) ausdrücken lassen.*
Eine allgemeine Lösungstheorie gibt es nur für den Fall, dass die Koeffizientenfunktionen konstant sind. Dieser Fall wird im folgenden Abschnitt diskutiert.

10.3 Lineare DGLen mit konstanten Koeffizienten

Wir betrachten nun die spezielle Klasse der linearen DGLen

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1} \cdot y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_1 \cdot y'(x) + a_0 \cdot y(x) = f(x),$$

in denen die Koeffizienten $a_{n-1}, \ldots, a_0$ Konstanten (unabhängig von x) sind.

Definition 10.31: (das charakteristische Polynom einer linearen DGL)

Der homogenen linearen DGL mit konstanten Koeffizienten

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1} \cdot y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_1 \cdot y'(x) + a_0 \cdot y(x) = 0$$

wird das „**charakteristische Polynom**“

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1} \cdot \lambda^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot \lambda + a_0$$

zugeordnet.

Machen wir den Ansatz $y(x) = e^{\lambda \cdot x}$, so ergibt sich mit

$$y = e^{\lambda \cdot x}, \quad y' = \lambda \cdot e^{\lambda \cdot x} = \lambda \cdot y, \quad y'' = \lambda^2 \cdot e^{\lambda \cdot x} = \lambda^2 \cdot y \text{ etc.}$$

aus der DGL das charakteristische Polynom:

$$\begin{aligned} & y^{(n)} + a_{n-1} \cdot y^{(n-1)} + \ldots + a_1 \cdot y' + a_0 \cdot y \\ &= \lambda^n \cdot y + a_{n-1} \cdot \lambda^{n-1} \cdot y + \ldots + a_1 \cdot \lambda \cdot y + a_0 \cdot y \\ &= \Big(\lambda^n + a_{n-1} \cdot \lambda^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot \lambda + a_0 \Big) \cdot y = P(\lambda) \cdot y = 0. \end{aligned}$$

Ergebnis:

$$\boxed{\begin{array}{l} y(x) = e^{\lambda \cdot x} \text{ löst die DGL genau dann, wenn } \lambda \\ \text{Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist.} \end{array}}$$

Damit haben wir linear unabhängige Grundlösungen $e^{\lambda_1 \cdot x}$, $e^{\lambda_2 \cdot x}$ etc., wo λ_i die unterschiedlichen Nullstellen des charakteristischen Polynoms sind. Um ein Fundamentalsystem zu erhalten, brauchen wir n unabhängige Funktionen, wo n der Grad der DGL ist. Sind einige der Nullstellen λ_i entartet, fehlen also noch einige Grundlösungen. Diese sind

$$x^j \cdot e^{\lambda_i \cdot x},$$

wo j von 0 bis $n_i - 1$ laufen darf (n_i ist die Vielfachheit von λ_i):

Satz 10.32: (Die Lösung homogener linearer DGLen mit konstanten Koeffizienten)

Seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ die Nullstellen mit Vielfachheiten $n_1, \ldots, n_k$ des charakteristischen Polynoms

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1} \cdot \lambda^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot \lambda + a_0$$

der homogenen linearen DGL mit konstanten Koeffizienten

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1} \cdot y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_1 \cdot y'(x) + a_0 \cdot y(x) = 0. \qquad (\#)$$

Dann bilden die $n_1 + \ldots + n_k = n$ Funktionen

$$y_{ij}(x) = x^j \cdot e^{\lambda_i \cdot x}, \quad i = 1, \ldots, k, \quad j = 0, \ldots, n_i - 1$$

ein Fundamentalsystem für (#), d.h., die allgemeine Lösung ist

$$y(x) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=0}^{n_j - 1} c_{ij} \cdot x^j \cdot e^{\lambda_i \cdot x}$$

mit beliebigen Koeffizienten c_{ij}.

Beweis: Wir ersetzen im Polynom $P(\lambda)$ den Wert λ durch den Operator $\frac{d}{dx}$:

$$P\Big(\frac{d}{dx}\Big) = \frac{d^n}{dx^n} + a_{n-1} \cdot \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \ldots + a_1 \cdot \frac{d}{dx} + a_0,$$

so dass die homogene DGL durch $P(\frac{d}{dx})\ y = 0$ beschrieben wird. Mit der Produktregel

$$\frac{d^k}{dx^k}\ f \cdot g = \sum_{m=0}^{k} \binom{k}{m} \cdot \frac{d^m f}{dx^m} \cdot \frac{d^{k-m} g}{dx^{k-m}}$$

ergibt sich speziell für $f \cdot g = x \cdot g$:

$$\frac{d^k}{dx^k}\ x \cdot g = \sum_{m=0}^{k} \binom{k}{m} \cdot \frac{d^m x}{dx^m} \cdot \frac{d^{k-m} g}{dx^{k-m}} = \sum_{m=0}^{1} \binom{k}{m} \cdot \frac{d^m x}{dx^m} \cdot \frac{d^{k-m} g}{dx^{k-m}} = x \cdot g^{(k)} + k \cdot g^{(k-1)}.$$

Es folgt

$$P\Big(\frac{d}{dx}\Big)\ x \cdot g = \Big(\sum_{k=0}^{n} a_k \cdot \frac{d^k}{dx^k}\Big)\ x \cdot g = x \cdot \underbrace{\sum_{k=0}^{n} a_k \cdot g^{(k)}}_{P(\frac{d}{dx})\ g} + \underbrace{\sum_{k=0}^{n} a_k \cdot k \cdot g^{(k-1)}}_{P'(\frac{d}{dx})\ g}$$

$$= x \cdot P\Big(\frac{d}{dx}\Big)\ g + P'\Big(\frac{d}{dx}\Big)\ g.$$

Induktiv folgt

$$\begin{aligned}
P\Big(\frac{d}{dx}\Big)\ x^j \cdot g &= P\Big(\frac{d}{dx}\Big)\ x \cdot (x^{j-1} \cdot g) \\
&= x \cdot P\Big(\frac{d}{dx}\Big)\ x^{j-1} \cdot g + P'\Big(\frac{d}{dx}\Big)\ x^{j-1} \cdot g \\
&= x^2 \cdot P\Big(\frac{d}{dx}\Big)\ x^{j-2} \cdot g + 2 \cdot x \cdot P'\Big(\frac{d}{dx}\Big)\ x^{j-2} \cdot g + P''\Big(\frac{d}{dx}\Big)\ x^{j-2} \cdot g \\
&= \ldots = \left(\sum_{m=0}^{j} \binom{j}{m} \cdot x^{j-m} \cdot P^{(m)}\Big(\frac{d}{dx}\Big)\right)\ g.
\end{aligned}$$

Für $g = e^{\lambda \cdot x}$ ergibt sich mit $P(\frac{d}{dx})\ e^{\lambda \cdot x} = P(\lambda) \cdot e^{\lambda \cdot x}$:

$$P\Big(\frac{d}{dx}\Big)\ x^j \cdot e^{\lambda \cdot x} = \left(\sum_{m=0}^{j} \binom{j}{m} \cdot x^{j-m} \cdot P^{(m)}(\lambda)\right) \cdot e^{\lambda \cdot x}$$

Ist $\lambda = \lambda_i$ eine n_i-fache Nullstelle des charakteristischen Polynoms, verschwinden alle Ableitungen $P^{(m)}(\lambda_i)$ für $m = 0, \ldots, n_i - 1$, und die Funktionen $x^j \cdot e^{\lambda_i \cdot x}$ mit $j = 0, \ldots, n_i - 1$ erfüllen die homogene DGL $P(\frac{d}{dx})\ x^j \cdot e^{\lambda_i \cdot x} = 0$.

Q.E.D.

Beispiel 10.33: Betrachte die homogene DGL

$$y''' - 7 \cdot y'' + 16 \cdot y' - 12 \cdot y = 0.$$

Das charakterische Polynom

$$P(\lambda) = \lambda^3 - 7 \cdot \lambda^2 + 16 \cdot \lambda - 12 = (\lambda - 2)^2 \cdot (\lambda - 3)$$

hat eine doppelte Nullstelle $\lambda_1 = 2$ und eine einfache Nullstelle $\lambda_2 = 3$. Die allgemeine Lösung ist damit

$$y(x) = c_{10} \cdot e^{2 \cdot x} + c_{11} \cdot x \cdot e^{2 \cdot x} + c_{20} \cdot e^{3 \cdot x}.$$

Bemerkung 10.34: *Bislang haben wir nur die homogene lineare DGL mit konstanten Koeffizienten betrachtet. Was ist nun mit der inhomogenen DGL*

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1} \cdot y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_0 \cdot y(x) = f(x)?$$

Nach Satz 10.27 reicht es, irgendeine *spezielle Lösung y_p zu finden, die dann zusammen mit der oben beschriebenen allgemeinen Lösung der homogenen DGL die allgemeine Lösung der inhomogenen DGL liefert.*

Leider gibt es kein allgemeingültiges Rezept, bei gegebenem $f(x)$ systematisch eine Lösung zu ermitteln. (Gewisse Halbsystematiken wie z.B. Fourier- oder Laplace-Transformation werden (in späteren Semestern?) zur Verfügung stehen. Bei Spezialfällen wie z.B.

$$f(x) = f_0 \cdot e^{\lambda \cdot x}$$

kommt man mit dem Ansatz $y_p(x) = c \cdot e^{\lambda \cdot x}$ hin. Sei P das charakteristische Polynom der homogenen DGL, d.h., es ist (mit der Bezeichnung des Beweises von 10.32) die inhomogene DGL

$$P\Big(\frac{d}{dx}\Big)\, y = f$$

zu lösen. Analog zum Beweis von 10.32 erhält man für den Ansatz $y_p(x) = c \cdot e^{\lambda \cdot x}$ die Gleichung

$$P\Big(\frac{d}{dx}\Big)\, y_p = c \cdot P(\lambda) \cdot e^{\lambda \cdot x} = f_0 \cdot e^{\lambda \cdot x} \qquad \Rightarrow \qquad c = \frac{f_0}{P(\lambda)},$$

also

$$y_p = \frac{f_0}{P(\lambda)} \cdot e^{\lambda \cdot x},$$

falls λ nicht gerade Nullstelle des charakteristischen Polyoms ist.

„Resonanz“: *Ist λ eine Nullstelle der Vielfachheit v, so liefert der Ansatz $y_p(x) = c \cdot x^v \cdot e^{\lambda \cdot x}$ dem Beweis von 10.32 folgend*

$$P\Big(\frac{d}{dx}\Big)\, y_p = c \cdot P\Big(\frac{d}{dx}\Big)\, x^v \cdot e^{\lambda \cdot x} = c \cdot \left(\sum_{m=0}^{v} \binom{v}{m} \cdot x^{v-m} \cdot P^{(m)}(\lambda) \right) \cdot e^{\lambda \cdot x}$$

$$= c \cdot P^{(v)}(\lambda) \cdot e^{\lambda \cdot x} = f_0 \cdot e^{\lambda \cdot x},$$

also

$$y_p(x) = \frac{f_0}{P^{(v)}(\lambda)} \cdot x^v \cdot e^{\lambda \cdot x}.$$

Bemerkung 10.35: *Allgemein gilt für*

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1} \cdot y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_0 \cdot y(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots$$

ein Superpositionsprinzip: hat man spezielle Lösungen y_{p1}, y_{p2} etc. zu den rechten Seiten f_1, f_2 etc., so liefert $y_{p1} + y_{p2} + \ldots$ eine spezielle Lösung zur rechten Seite $f_1 + f_2 + \ldots$.

Beispiel 10.36: Die n freien Konstanten in der allgemeinen Lösung einer DGL n-ter Ordnung lassen sich z.B. dazu verwenden, die allgemeine Lösung an n Anfangsbedingungen

$$y(x_0), \quad y'(x_0), \quad \ldots \quad , \quad y^{(n-1)}(x_0)$$

anzupassen. Als Beispiel betrachten wir das Anfangswertproblem

$$y''(x) + y(x) = f_0 \cdot \sin(x), \quad y(0) = 1, \quad y'(x) = 0.$$

Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung $y'' + y = 0$ ist mit den Nullstellen $\lambda = \pm i$ des charakteristischen Polynoms:

$$y_{hom}(x) = c_+ \cdot e^{i \cdot x} + c_- \cdot e^{-i \cdot x} = c_1 \cdot \cos(x) + c_2 \cdot \sin(x)$$

mit $c_1 = c_+ + c_-$ und $c_2 = i \cdot (c_+ - c_-)$. Die Lösung u der inhomogenen DGL

$$u''(x) + u(x) = f_0 \cdot e^{i \cdot x} \qquad (\#)$$

liefert per $y_p = \Im(u)$ eine Lösung der interessierenden DGL

$$y''(x) + y(x) = \Im(f_0 \cdot e^{i \cdot x}) = f_0 \cdot \sin(x). \qquad (\#\#)$$

Da die „Anregung“ $f_0 \cdot \sin(x)$ eine Grundlösung der homogenen DGL ist (Resonanz: $\lambda = i$ ist einfache Nullstelle des charakteristischen Polynoms), wird nach den Rezepten von Bemerkung 10.34 der Ansatz

$$u(x) = c \cdot x \cdot e^{i \cdot x}$$

gemacht. Einsetzen in (#) liefert

$$\underbrace{-c \cdot x \cdot e^{i \cdot x} + 2 \cdot c \cdot i \cdot e^{i \cdot x}}_{u''(x)} + \underbrace{c \cdot x \cdot e^{i \cdot x}}_{u(x)} \overset{(!)}{=} f_0 \cdot e^{i \cdot x} \quad \Rightarrow \quad c = \frac{f_0}{2 \cdot i} = -\frac{i \cdot f_0}{2}.$$

Eine spezielle Lösung der inhomogenen DGL (##) ist damit

$$y_p = \Im(u) = \Im\Big(-\frac{i \cdot f_0}{2} \cdot x \cdot e^{i \cdot x} \Big) = -\frac{f_0}{2} \cdot x \cdot \cos(x).$$

Die allgemeine Lösung der inhomogenen DGL ist damit

$$y(x) = y_{hom}(x) + y_p(x) = c_1 \cdot \cos(x) + c_2 \cdot \sin(x) - \frac{f_0}{2} \cdot x \cdot \cos(x).$$

Wir passen die freien Konstanten an die Anfangsbedingungen $y(0)$, $y'(0)$ an:

$$y(0) = \Big(c_1 \cdot \cos(x) + c_2 \cdot \sin(x) - \frac{f_0}{2} \cdot x \cdot \cos(x) \Big)_{x=0} = c_1,$$

also $\boxed{c_1 = y(0)}$,

$$y'(0) = \Big(-c_1 \cdot \sin(x) + c_2 \cdot \cos(x) - \frac{f_0}{2} \cdot \cos(x) + \frac{f_0}{2} \cdot x \cdot \sin(x) \Big)_{x=0} = c_2 - \frac{f_0}{2},$$

also $\boxed{c_2 = y'(0) + f_0/2}$. Die Lösung der inhomogenen DGL ist damit

$$\boxed{y(x) = y(0) \cdot \cos(x) + \Big(y'(0) + \frac{f_0}{2} \Big) \cdot \sin(x) - \frac{f_0}{2} \cdot x \cdot \cos(x).}$$

Für die speziellen Werte $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$:

$$y(x) = \cos(x) + \frac{f_0}{2} \cdot \sin(x) - \frac{f_0}{2} \cdot x \cdot \cos(x).$$

Allgemein gilt:

> Bei linearen DGLen führt das Anpassen von Anfangsbedingungen stets auf ein lösbares <u>lineares</u> Gleichungssystem für die freien Linearfaktoren (Konstanten) eines Fundamentalsystems.
