

W. Oevel

Mathematik für Physiker I

Veranstaltungsnr: 172020

Skript zur Vorlesung, Universität Paderborn, Wintersemester 2003/2004

Zeit und Ort:	V2	Di	11.15 – 12.45	D1.303	
	V2	Mi	11.15 – 12.45	D1.303	
	V2	Do	9.15 – 10.45	D1.328	
	Ü2	Do	11 – 13	D1.328	(Kai Gehrs)

Zur Homepage der Veranstaltung:
math-www.uni-paderborn.de/~walter (→ Lehrveranstaltungen)

Email: walter@upb.de

Inhalt

1	Sammelsurium	3
1.1	Notation, logische Aussagen	3
1.2	Die natürlichen Zahlen, vollständige Induktion	6
1.3	Die rationalen Zahlen	7
1.4	Die reellen Zahlen	9
1.5	Die komplexen Zahlen	16
1.5.1	Definitionen	16
1.5.2	Polynomwurzeln, Fundamentalsatz der Algebra	21
2	Folgen und Grenzwerte	29
2.1	Definitionen, Beispiele, einige Sätze	29
2.2	Weitere Konvergenzsätze	40
2.2.1	Konvergenz monotoner reeller Folgen	40
2.2.2	Cauchy-Folgen	41
2.2.3	Teilfolgen und Häufungspunkte	44
2.3	Unendliches, uneigentliche Konvergenz	46
3	Reihen	49
3.1	Definitionen, Beispiele, Sätze	49
3.2	Rechenregeln und das Cauchy-Produkt	54
3.3	Spezielle Konvergenzkriterien	56
3.4	Bedingte Konvergenz, Umordnungen	61
3.5	Summation per Partialbruchzerlegung	63
4	Funktionen und Stetigkeit	67
4.1	Funktionen	67
4.2	Stetigkeit	68
4.3	Grenzwerte	73
4.4	Der Zwischenwertsatz, das Min/Max-Prinzip	75
4.5	Umkehrfunktionen	78
4.6	Wachstum von Funktionen, Landau-Symbole	81

5	Spezielle Funktionen	83
5.1	Exponentialfunktion und Logarithmus	83
5.2	Trigonometrische Funktionen	86
5.3	Die komplexe Exponentialfunktion	91
5.4	Die Inversen der trigonometrische Funktionen	94
5.5	Diverse spezielle Funktionen: Gamma, Bessel etc.	95
6	Differentialrechnung	99
6.1	Definitionen und Sätze	99
6.2	Der Mittelwertsatz	107
6.3	Taylor-Reihen	108
6.4	Monotonie, Extremwerte	115
6.5	Die de l'Hospitalsche Regel	118
7	Potenzreihen	121
7.1	Der Konvergenzradius	121
7.2	Eigenschaften von Potenzreihen	124
8	Banach-Iteration	129
8.1	Der Banachsche Fixpunktsatz	129
8.2	Das Newton-Verfahren	132
9	Integration	137
9.1	Stammfunktionen: das unbestimmte Integral	137
9.1.1	Definitionen, Grundintegrale	137
9.1.2	Partielle Integration	139
9.1.3	Substitution	141
9.1.4	Rationale Integranden: Partialbruchzerlegung	143
9.2	Das bestimmte Integral	146
9.3	Der Hauptsatz	155
9.4	Uneigentliche Integrale	158
9.5	Die Diracsche Delta-Funktion	160
9.6	Einige spezielle Anwendungen	162
10	Gewöhnliche Differentialgleichungen	167
10.1	DGLen 1-ter Ordnung	167
10.1.1	Definitionen	167
10.1.2	Graphische Lösung	169
10.1.3	Separation (Trennung der Variablen)	171
10.1.4	Variation der Konstanten	175
10.2	Lineare DGLen höherer Ordnung	179
10.3	Lineare DGLen mit konstanten Koeffizienten	184

11	Fourier-Entwicklungen	191
11.1	Hilbert-Raumstrukturen	191
11.1.1	Definitionen: Skalarprodukt und Norm	191
11.1.2	Bestapproximation und Konvergenz	196
11.2	Trigonometrische Fourier-Reihen	200
11.2.1	Definition der trigonometrischen Fourier-Reihen	201
11.2.2	Konvergenz im quadratischen Mittel	204
11.2.3	Punktweise Konvergenz	204
11.2.4	Abklingverhalten der Fourier-Koeffizienten	214
11.2.5	Das Gibbs'sche Phänomen	217
11.2.6	Beliebige Perioden	219
12	Lineare Algebra	223
12.1	Vektorräume	223
12.2	Etwas Geometrie im \mathbb{R}^3	230
12.2.1	Skalar-, Vektor- und Spatprodukt	230
12.2.2	Geraden und Ebenen	235
12.3	Matrizen	236
12.4	Determinanten	241
12.5	Lineare Gleichungssysteme	254
12.5.1	Quadratische Dreieckssysteme	255
12.5.2	Der Gauß-Algorithmus	257
12.5.3	Die allgemeine Lösung des Dreieckssystems	263
12.6	Inverse von Matrizen	270
12.6.1	Die Gauß-Jordan-Variante	270
12.6.2	LR -Zerlegung	271
12.7	Eigenwerte und -vektoren	276
12.7.1	Definitionen	276
12.7.2	Symmetrische/hermitesche Matrizen	283
12.7.3	Diagonalisierung und Funktionalkalkül	286

Literatur

Die Vorlesung baut nicht streng auf irgendeinem Buch auf, sondern geht ihren eigenen Weg. Die angegebenen Referenzen dienen dazu, sich *unabhängig* vom Skript entsprechende Grundlagen anzueignen oder spezielle Inhalte zu vertiefen. Es handelt sich um eine recht willkürliche Auswahl: Neben den angegebenen Büchern gibt es sicherlich jede Menge weiterer Literatur, die den behandelten Stoff analog abdeckt.

Die Jänich-Bücher sind allgemein recht elementar geschrieben und leicht und angenehm zu lesen. Empfehlenswert. Für den Stoff dieses Semesters sind 1), 2), 3) besonders interessant.

- 1) K. JÄNICH : *Mathematik 1* („geschrieben für Physiker“), Springer, 2001.
Für uns relevanter Inhalt: Kapitel 1 - 5: Analysis in \mathbb{R} ; Kapitel 13: Fourier-Reihen; Kapitel 8 - 9: Matrizen; Kapitel 11: Determinanten; Kapitel 12: Skalar- und Kreuzprodukt; Kapitel 21: Eigenwerte- und -Vektoren.
Für später relevanter Inhalt: Analysis im \mathbb{R}^n : diverse Kapitel
- 2) K. JÄNICH : *Mathematik 2* („geschrieben für Physiker“), Springer, 2002.
Für uns relevanter Inhalt: Kapitel 23: Grundlagen der Analysis; Kapitel 24: Funktionenfolgen und Reihen; Kapitel 25: Taylorentwicklung;
Für später relevanter Inhalt: Analysis im \mathbb{R}^n : diverse Kapitel
- 3) K. JÄNICH : *Lineare Algebra*, Springer, 2002.
Alles über Lineare Algebra und Matrizen, was man als Physiker wissen sollte. Sehr zu empfehlen.
- 4) K. JÄNICH : *Analysis für Physiker und Ingenieure*, Springer, 2001. Funktionentheorie, Differentialgleichungen und spezielle Funktionen.
- 5) K. JÄNICH: *Funktionentheorie – Eine Einführung*, Springer, 1999.

Hinweis für später: zum Erlernen der Theorie komplexer Funktionen ist der Funktionentheorie-Band 5) absolut empfehlenswert.

- [Pap] LOTHAR PAPULA: Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler. Band 1 - 3 + Mathematische Formelsammlung. Braunschweig/Wiesbaden: Vieweg 2001. (P41 TBG2788)

Recht elementar und mathematisch nicht sehr tief gehend; dafür leicht und angenehm zu lesen. Dies sind Standardbücher und große Renner bei den Ingenieuren. Hier steht „für Ingenieure und Naturwissenschaftler“ drauf: diese Reihe ist allgemein für eine anwendungsorientierte Kundschaft sehr geeignet, die sich weniger für das Abstrakte in der Mathematik interessiert. Übungen und Anwendungsbeispiele sind speziell auf Ingenieure zugeschnitten.

Hier ist zunächst **Band 1** interessant: er umfasst Folgen, Reihen, Stetigkeit, Differentialrechnung, spezielle Funktionen und Integration.

Band 2 umfasst die Lineare Algebra und komplexe Zahlen. Weiterhin viele weitere Dinge, die im ersten Semester noch nicht so interessant sind.

Band 3 umfasst mehrdimensionale Differential- und Integralrechnung (interessant für das 2-te Semester). Darüberhinaus Stochastik (für uns nicht ganz so interessant).

- [TI] S. TIMMAN: Repetitorium der Analysis Springe: Binomi-Verlag.

Eigentlich kein 'Repetitorium', sondern eine vollständige Einführung mit Definitionen etc. Recht elementar geschrieben, sehr übersichtlich. Gelungener Kompromiss zwischen mathematischem Tiefgang und guter Lesbarkeit auf für Nicht-Mathematiker. Grundlagen, Folgen und Reihen, Stetigkeit, Differential- und Integralrechnung. Zahlreiche Übungsaufgaben mit Musterlösungen.

- [Bla] C. BLATTER: Analysis I, II, III Berlin: Springer 1991.

Abstrakter und anspruchsvoller. Recht kompakt.

Band 1 umfasst Folgen, Reihen, Stetigkeit, Differential- und Integralrechnung.

Band 2 enthält mehr zur Integralrechnung, Kurven, Funktionenfolgen, Potenzreihen und Differentialrechnung im \mathbb{R}^n (relevant für das 2-te Semester).

Band 3 behandelt die Integralsätze im \mathbb{R}^n (relevant für das 2-te Semester).

- [For] O. FORSTER: Analysis 1 - 3. Vieweg. 2001. (P41 TIA 2647)

Abstrakt und anspruchsvoller. Recht kompakt. Standardwerk für Mathematikstudenten. **Band 1** umfasst Folgen, Reihen, Stetigkeit, Differential- und Integralrechnung einer Veränderlichen (Stoff des 1-ten Semesters). Die **Bände 2** und **3** umfassen die mehrdimensionale Analysis und sind ab dem 2-ten Semester relevant.