

Ü b u n g s b l a t t 9

Abgabe von \* Aufgaben bis zum 6.1.2002, 11<sup>00</sup> Uhr, im Zettelkasten auf dem D1.

**Aufgabe 39\*:** (Symmetrien des Differentialoperators. 10 Bonuspunkte)

Betrachte den Unterraum  $L_2^{(0)}([a, b]) = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}; f \text{ ist stetig diff'bar; } f(a) = f(b) = 0\}$  des  $L_2([a, b])$ .

- Zeige, dass der Differentialoperator  $D : \psi \rightarrow \psi'$  auf  $L^{(0)}([a, b])$  „schiefsymmetrisch“ ist:  $\langle \phi, D\psi \rangle = -\langle D\phi, \psi \rangle \forall \phi, \psi \in L_2^{(0)}([a, b])$ .
- Zeige, dass die Multiplikation mit der imaginären Einheit  $i : \psi \rightarrow i \cdot \psi$  schiefsymmetrisch ist.
- Zeige, dass der quantenmechanische „Impulsoperator“  $p = -i \cdot D : \psi \rightarrow -i \cdot \psi'$  selbstadjungiert ist.

**Musterlösung:**

a) Partielle Integration:

$$\langle \phi, D\psi \rangle = \int_a^b \overline{\phi(x)} \cdot \psi'(x) dx = \underbrace{\left[ \overline{\phi(x)} \cdot \psi(x) \right]_{x=a}^{x=b}}_{=0} - \int_a^b \overline{\phi(x)'} \cdot \psi(x) dx = -\langle D\phi, \psi \rangle.$$

b)

$$\langle \phi, i \cdot \psi \rangle = \int_a^b \overline{\phi(x)} \cdot i \cdot \psi(x) dx = - \int_a^b \overline{i \cdot \phi(x)} \cdot \psi(x) dx = -\langle i \cdot \phi, \psi \rangle.$$

c) Folgt aus b) und c):

$$\langle \phi, -i \cdot D\psi \rangle = \langle -\phi, i \cdot D\psi \rangle = -\langle -i \cdot \phi, D\psi \rangle = (-1) \cdot (-1) \cdot \langle D(-i \cdot \phi), \psi \rangle = \langle -i \cdot D\phi, \psi \rangle.$$

**Aufgabe 40\*:** (Ein Sturm–Liouville–Problem. 10 Bonuspunkte)

Betrachte das Sturm–Liouville–Problem

$$L\psi(x) = -\psi''(x) = \lambda \cdot \psi(x), \quad \psi(0) = 0, \quad \psi(1) + \psi'(1) = 0.$$

über dem Intervall  $[0, 1]$ .

- Zeige, dass  $\langle \psi, L\psi \rangle > 0$  gilt für alle Funktionen  $\psi \neq 0$ , die die Randbedingungen erfüllen.
- Folgere, dass alle Eigenwerte  $\lambda$  positiv sein müssen.
- Zeige, dass die Eigenwerte durch  $\lambda_k = \mu_k^2$  ( $k = 1, 2, 3, \dots$ ) gegeben sind, wo  $\mu_k$  die  $k$ -te positive Lösung der Gleichung  $\mu + \tan(\mu) = 0$  ist. Man mache sich graphisch klar, dass

$$k \cdot \pi - \frac{\pi}{2} < \mu_k < k \cdot \pi$$

gilt. Für grosses  $k$  gilt  $\mu_k \approx k \cdot \pi - \frac{\pi}{2}$ .

Bestimme die Eigenfunktion  $\psi_k$  zu  $\lambda_k$ .

d) Benutze

$$\int_0^1 \sin(\mu \cdot x) \cdot \sin(\mu' \cdot x) dx = \frac{\mu' \cdot \sin(\mu) \cdot \cos(\mu') - \mu \cdot \cos(\mu) \cdot \sin(\mu')}{\mu'^2 - \mu^2},$$

um die Orthogonalität der Eigenfunktionen zu überprüfen. Bestimme die Normierung  $\langle \psi_k, \psi_k \rangle$  (als Ausdruck in  $\mu_k$ ).

e) Entwickle die Funktion  $f(x) = 1$  für  $x \in [0, 1]$  in eine Fourier-Reihe  $\sum_{k \in \mathbb{N}} c_k \cdot \psi_k(x)$  bezüglich des Orthogonalsystems der Eigenfunktionen.

f) Benutze MuPAD, um sich mittels `numeric::realroot` numerische Näherungen der  $\mu_k$  zu verschaffen. Plote die Summe der ersten 10 bzw. 100 Terme der in e) berechneten Fourier-Reihe (benutze beim Plotten die `Grid`-Option für eine hinreichend große Auflösung).

### Musterlösung:

a) Partielle Integration:

$$\langle \psi, L\psi \rangle = \int_0^1 \overline{\psi(x)} \cdot (-\psi''(x)) dx = \left[ -\overline{\psi(x)} \cdot \psi'(x) \right]_{x=0}^{x=1} + \int_0^1 \overline{\psi(x)'} \cdot \psi'(x) dx.$$

Mit der linken Randbedingung  $\psi(0) = 0$  folgt:

$$\langle \psi, L\psi \rangle = -\overline{\psi(1)} \cdot \psi'(1) + \int_0^1 \overline{\psi(x)'} \cdot \psi'(x) dx.$$

Mit der rechten Randbedingung  $\psi'(1) = -\psi(1)$  folgt:

$$\langle \psi, L\psi \rangle = \overline{\psi(1)} \cdot \psi(1) + \int_0^1 \overline{\psi(x)'} \cdot \psi'(x) dx \geq 0.$$

Der Wert 0 kann dabei nur angenommen werden, wenn  $\psi'(x) = 0$  auf dem ganzen Intervall gilt, also  $\psi(x)$  konstant ist. Wegen der linken Randbedingung folgt dann  $\psi \equiv 0$ .

b) Mit  $L\psi = \lambda \cdot \psi$ ,  $\psi \not\equiv 0$ :

$$\lambda = \frac{\langle \psi, L\psi \rangle}{\langle \psi, \psi \rangle} > 0.$$

c) Die allgemeine Lösung von  $-\psi'' = \lambda \cdot \psi$  ist

$$\psi(x) = \alpha \cdot \cos(\sqrt{\lambda} \cdot x) + \beta \cdot \sin(\sqrt{\lambda} \cdot x).$$

Aus der linken Randbedingung folgt  $\psi(0) = \alpha = 0$ . Die rechte Randbedingung:

$$\psi(1) + \psi'(1) = \beta \cdot \sin(\sqrt{\lambda}) + \beta \cdot \sqrt{\lambda} \cdot \cos(\sqrt{\lambda}) = 0.$$

Da  $\beta$  nicht verschwinden darf, ist  $\lambda$  durch die Gleichung

$$\sin(\sqrt{\lambda}) + \sqrt{\lambda} \cdot \cos(\sqrt{\lambda}) = 0$$

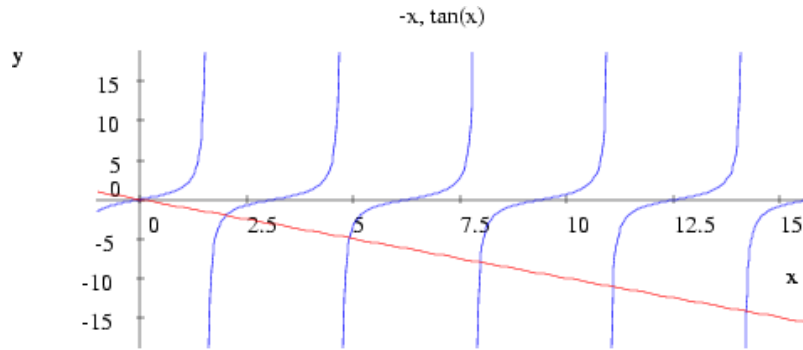
eingeschränkt, also

$$\sin(\mu) + \mu \cdot \cos(\mu) = 0$$

für  $\mu = \sqrt{\lambda}$ . Die Lösung kann sicherlich nicht  $\cos(\mu) = 0$  erfüllen, also kann die bestimmende Gleichung auch als

$$\tan(\mu) = -\mu$$

geschrieben werden. Da mit  $\mu$  auch  $-\mu$  eine Lösung ist, beide aber auf den selben Eigenwert  $\lambda = \mu^2$  führen, brauchen nur positive Werte von  $\mu$  betrachtet zu werden. Neben  $\mu = 0$  ergeben sich graphisch unendlich viele Lösungen der Gleichung, die jeweils rechts vom negativen Ast der Pole der  $\tan$ -Funktion bei  $\mu = k \cdot \pi - \pi/2$  ( $k \in \mathbb{N}$ ) liegen:



Diese Nullstellen seien aufsteigend durch  $\mu_k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , durchnummeriert. Die Lösung  $\mu_0 = 0$  ist dabei uninteressant, da die Eigenfunktion

$$\psi_k(x) = \sin(\mu_k \cdot x) \quad \text{zum Eigenwert} \quad \lambda_k = \mu_k^2, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

für  $\mu_0 = 0$  trivial wird.

d) Es gilt

$$\langle \psi_k, \psi_{k'} \rangle = \int_0^1 \sin(\mu_{k'} \cdot x) \cdot \sin(\mu_k \cdot x) dx = \frac{\mu_{k'} \cdot \sin(\mu_k) \cdot \cos(\mu_{k'}) - \mu_k \cdot \cos(\mu_k) \cdot \sin(\mu_{k'})}{\mu_{k'}^2 - \mu_k^2}.$$

Einsetzen von  $\mu_k = -\tan(\mu_k)$ ,  $\mu_{k'} = -\tan(\mu_{k'})$ , also

$$\mu_k \cdot \cos(\mu_k) = -\sin(\mu_k), \quad \mu_{k'} \cdot \cos(\mu_{k'}) = -\sin(\mu_{k'})$$

im Zähler liefert

$$\langle \psi_k, \psi_{k'} \rangle = \frac{-\sin(\mu_{k'}) \cdot \sin(\mu_k) + \sin(\mu_{k'}) \cdot \sin(\mu_k)}{\mu_{k'}^2 - \mu_k^2} = 0$$

für  $k \neq k'$ . Für  $k = k'$  gilt:

$$\begin{aligned} \langle \psi_k, \psi_k \rangle &= \int_0^1 \sin(\mu_k \cdot x)^2 dx = \frac{1}{2} - \frac{\sin(2 \cdot \mu_k)}{4 \cdot \mu_k} = \frac{1}{2} - \frac{2 \cdot \sin(\mu_k) \cdot \cos(\mu_k)}{4 \cdot \mu_k} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{\mu_k \cdot \sin(\mu_k) \cdot \cos(\mu_k)}{2 \cdot \mu_k^2} = \frac{1}{2} + \frac{\sin^2(\mu_k)}{2 \cdot \mu_k^2} = \frac{\mu_k^2 + \sin^2(\mu_k)}{2 \cdot \mu_k^2}. \end{aligned}$$

e) Die Fourier-Entwicklung ist  $\sum_{k \in \mathbb{N}} c_k \cdot \sin(\mu_k \cdot x)$  mit

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{\langle \psi_k, f \rangle}{\langle \psi_k, \psi_k \rangle} = \frac{2 \cdot \mu_k^2}{\mu_k^2 + \sin^2(\mu_k)} \cdot \int_0^1 \sin(\mu_k \cdot x) \cdot f(x) dx = \frac{2 \cdot \mu_k^2}{\mu_k^2 + \sin^2(\mu_k)} \cdot \int_0^1 \sin(\mu_k \cdot x) dx \\ &= \frac{2 \cdot \mu_k^2}{\mu_k^2 + \sin^2(\mu_k)} \cdot \left( \frac{1}{\mu_k} - \frac{\cos(\mu_k)}{\mu_k} \right) = 2 \cdot \frac{\mu_k \cdot (1 - \cos(\mu_k))}{\mu_k^2 + \sin^2(\mu_k)}. \end{aligned}$$

f) Das in c) angegebene Intervall für  $\mu_k$  wird als Suchintervall an MuPADs `numeric::realroot` übergeben:

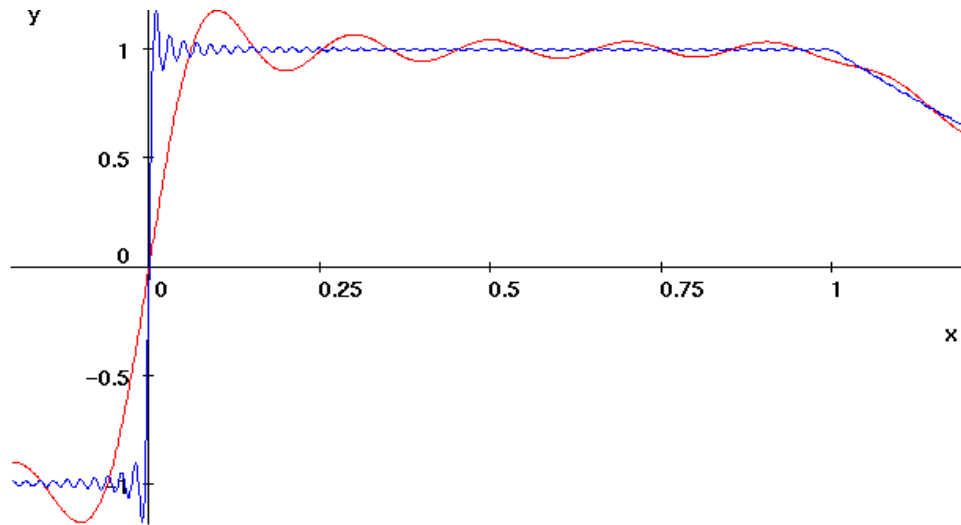
```
>> for k from 1 to 100 do
    searchinterval := (k*PI - PI/2) .. k*PI:
    mu[k] := numeric::realroot(sin(m) = -m*cos(m), m = searchinterval):
    // print(k, mu[k]);
end_for:
```

Die Fourier-Approximation mit  $n$  Termen:

```
>> S:= n -> _plus(2*mu[k]*(1 - cos(mu[k]))/(mu[k]^2 + sin(mu[k])^2)
      *sin(mu[k]*x) $ k = 1..n):
```

Die Graphik der Approximationen mit 10 und 100 Termen. Man erkennt deutlich ein Gibbs'sches Phänomen an der Stelle  $x = 0$ , wo die Funktion  $f \equiv 1$  die Randbedingung nicht erfüllt:

```
>> plotfunc2d(S(10), S(100), x = -0.2 .. 1.2, Grid = 1000);
```




---

**Aufgabe 41:** (Appell zur Wiederholung. 0 Bonuspunkte)

Man nutze die Weihnachtspause, die Fourier-Analyse Revue passieren zu lassen und sich die wesentlichen Techniken vor Augen zu führen. Aufgabe 42 liefert ein weiteres Anwendungsbeispiel.

**Aufgabe 42\*:** (Das Kellerprinzip. 10 Bonuspunkte)

Betrachte einmal mehr die Wärmeleitgleichung  $u_t = c \cdot u_{xx}$  für die Temperatur  $u(t, x)$  eines unendlich langen Stabes, der sich von  $x = 0$  bis  $x = \infty$  erstreckt. Diesmal wird am Rand  $x = 0$  eine  $T$ -periodische Randbedingung  $u(t, 0) = f(t)$  (mit  $f(t + T) = f(t)$ ) und am rechten Rand  $u(t, \infty) = 0$  betrachtet.

- a) Stelle die Lösung  $u(t, x)$  als Fourier-Reihe in  $t$  dar.

Anleitung:  $y^2 = i \cdot k \Rightarrow y = \pm \sqrt{i \cdot k} = \pm (1 + \text{sign}(k) \cdot i) \cdot \sqrt{|k|/2}$ .

Die Lösung ist

$$u(t, x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k(0) \cdot e^{-\sqrt{\frac{\pi \cdot |k|}{c \cdot T}} \cdot x} \cdot e^{i \cdot k \cdot 2 \cdot \pi \cdot \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\sqrt{4 \cdot \pi \cdot |k| \cdot c \cdot T}}\right)},$$

wobei  $c_k(0)$  die Fourier-Koeffizienten von  $u(t, 0) = f(t)$  sind.

Betrachte  $f(t) = u_0 \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot t/T)$  (periodische Temperaturschwankungen zwischen  $u_0$  (für  $t = 0$ ) und  $-u_0$  (für  $t = T/2$ ) bei einer mittleren Temperatur von 0).

- b) Berechne die Lösung  $u(t, x)$  für diese Randbedingung.

Sei  $u(t, x)$  die Temperatur  $x$  Meter unter der Erdoberfläche, sei  $f(t)$  die Temperatur an der Erdoberfläche. Die Wärmeleitkonstante für Erdboden beträgt  $c \approx 1.8 \cdot 10^{-7}$  [m<sup>2</sup>/sec] (trockener Lehm-boden). Diskutiere die in b) gefundene Lösung physikalisch:

- c) Wie tief dringen tägliche Temperaturschwankungen zwischen Tag und Nacht in den Erdboden ein? (Eindringtiefe: wo sind die Schwankungen um den Faktor  $e^{-\pi} \approx 0.04$  abgedämpft?)
- d) Wie tief dringen die jährlichen Temperaturschwankungen zwischen Sommer und Winter in den Erdboden ein?
- e) Berechne die Temperatur im Sommer und im Winter in einer Tiefe von 4.22 Metern. Es ist dort im Winter etwas wärmer als im Sommer! Wie läßt sich dies qualitativ erklären?

**Musterlösung:**

a) Fourier-Ansatz für  $T$ -periodische Funktionen:

$$u(t, x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k(x) \cdot e^{i \cdot k \cdot 2 \cdot \pi \cdot t / T}.$$

Eingesetzt in die Wärmeleitgleichung ergibt dies eine einfache gewöhnliche DGL für  $c_k(x)$ :

$$0 = u_t - c \cdot u_{xx} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left( \frac{i \cdot k \cdot 2 \cdot \pi}{T} \cdot c_k(x) - c \cdot c_k''(x) \right) \cdot e^{i \cdot k \cdot 2 \cdot \pi \cdot t / T} \Rightarrow c_k''(x) = \frac{i \cdot k \cdot 2 \cdot \pi}{c \cdot T} \cdot c_k(x).$$

Mit  $\sqrt{i \cdot k} = \pm(1 + \text{sign}(k) \cdot i) \cdot \sqrt{|k|/2}$  ist die allgemeine Lösung

$$c_k(x) = \alpha \cdot e^{(1 + \text{sign}(k) \cdot i) \cdot \sqrt{|k|/2} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot \pi}{c \cdot T}} \cdot x} + \beta \cdot e^{-(1 + \text{sign}(k) \cdot i) \cdot \sqrt{|k|/2} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot \pi}{c \cdot T}} \cdot x}$$

mit beliebigen Konstanten  $\alpha$  und  $\beta$ . Die Randbedingung  $u(t, \infty) = 0$  liefert die Forderung  $c_k(\infty) = 0$ , also  $\alpha = 0$ , also

$$c_k(x) = \beta \cdot e^{-(1 + \text{sign}(k) \cdot i) \cdot \sqrt{|k|/2} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot \pi}{c \cdot T}} \cdot x} = \beta \cdot e^{-\sqrt{\frac{\pi \cdot |k|}{c \cdot T}} \cdot x} \cdot e^{-i \cdot \text{sign}(k) \cdot \sqrt{\frac{\pi \cdot |k|}{c \cdot T}} \cdot x}.$$

Einsetzen von  $x = 0$  zeigt, dass der beliebige Parameter  $\beta$  die Interpretation  $\beta = c_k(0)$  besitzt, wobei mit

$$f(t) = u(t, 0) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k(0) \cdot e^{i \cdot k \cdot 2 \cdot \pi \cdot t / T}$$

$c_k(0)$  ein Fourier-Koeffizient der linken Randbedingung  $f(t)$  ist. Mit

$$c_k(x) = c_k(0) \cdot e^{-\sqrt{\frac{\pi \cdot |k|}{c \cdot T}} \cdot x} \cdot e^{-i \cdot \text{sign}(k) \cdot \sqrt{\frac{\pi \cdot |k|}{c \cdot T}} \cdot x}$$

ist die Lösung der Wärmeleitgleichung durch die Fourier-Reihe

$$u(t, x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k(x) \cdot e^{i \cdot 2 \cdot \pi \cdot t / T} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k(0) \cdot e^{-\sqrt{\frac{\pi \cdot |k|}{c \cdot T}} \cdot x} \cdot \underbrace{e^{-i \cdot \text{sign}(k) \cdot \sqrt{\frac{\pi \cdot |k|}{c \cdot T}} \cdot x} \cdot e^{i \cdot k \cdot 2 \cdot \pi \cdot t / T}}_{= e^{i \cdot k \cdot 2 \cdot \pi \cdot \left( \frac{t}{T} - \frac{x \cdot (\text{sign}(k)/k) \cdot \sqrt{\pi \cdot |k| / (c \cdot T)}}{2 \cdot \pi} \right)}}$$

gegeben. Mit  $\text{sign}(k)/k = 1/|k|$  ergibt sich:

$$u(t, x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k(0) \cdot e^{-\sqrt{\frac{\pi \cdot |k|}{c \cdot T}} \cdot x} \cdot e^{i \cdot k \cdot 2 \cdot \pi \cdot \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\sqrt{4 \cdot \pi \cdot |k| \cdot c \cdot T}} \right)}.$$

**Physikalische Interpretation:** die Zeitschwingungen werden durch den Faktor  $e^{-\sqrt{\frac{\pi \cdot |k|}{c \cdot T}} \cdot x}$  abgedämpft. Die Dämpfung ist bei festem  $k$  umso höher, je weiter man sich vom Rand entfernt. Bei festem  $x$  ist die Dämpfung umso höher, je höher die Frequenz  $|k|/T$  ist. Hinzu kommt eine Phasenverschiebung

$$\frac{x}{\sqrt{4 \cdot \pi \cdot |k| \cdot c \cdot T}},$$

die umso größer ist, je größer  $x$  bzw. je kleiner die Periode  $T$  ist.

b) Für  $f(t) = u_0 \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot t/T)$  existieren nur die Fourier-Koeffizienten  $c_1(0) = c_{-1}(0) = u_0/2$ . Die Lösung ist damit

$$u(t, x) = u_0 \cdot e^{-\sqrt{\frac{\pi}{c \cdot T}} \cdot x} \cdot \cos\left(2 \cdot \pi \cdot \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\sqrt{4 \cdot \pi \cdot c \cdot T}}\right)\right).$$

c) Die Schwingung ist für

$$\sqrt{\frac{\pi}{c \cdot T}} \cdot x = \pi \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt{\pi \cdot c \cdot T}$$

um den Faktor  $e^{-\pi}$  abgedämpft, also

$$\boxed{\text{Eindringtiefe} \approx \sqrt{\pi \cdot c \cdot T}}$$

In dieser Tiefe ist die Phasenverschiebung

$$\frac{x}{\sqrt{4 \cdot \pi \cdot c \cdot T}} = \frac{x}{2 \cdot \text{Eindringtiefe}} = \frac{1}{2},$$

die Schwingung ist dort also um eine halbe Periode phasenverschoben.

Für die täglichen Schwankungen mit  $T = 24 \text{ [h]} = 24 \cdot 3600 \text{ [sec]} = 8.64 \cdot 10^4 \text{ [sec]}$  ergibt sich die

$$\text{Eindringtiefe} \approx \sqrt{\pi \cdot c \cdot T} \approx \sqrt{\pi \cdot 1.8 \cdot 10^{-7} \left[\frac{\text{m}^2}{\text{sec}}\right] \cdot 8.64 \cdot 10^4 \text{ [sec]}} \approx 0.22 \text{ [m]} = 22 \text{ [cm]}.$$

d) Für die jährlichen Schwankungen mit  $T = 365 \cdot 24 \text{ [h]} = 365 \cdot 24 \cdot 3600 \text{ [sec]} = 3.15 \cdot 10^7 \text{ [sec]}$  ergibt sich die

$$\text{Eindringtiefe} \approx \sqrt{\pi \cdot c \cdot T} \approx \sqrt{\pi \cdot 1.8 \cdot 10^{-7} \left[\frac{\text{m}^2}{\text{sec}}\right] \cdot 3.15 \cdot 10^7 \text{ [sec]}} \approx 4.22 \text{ [m]}.$$

Diese ist um den Faktor  $\sqrt{365} \approx 19.1$  größer als die Eindringtiefe der um den Faktor 365 höherfrequenten täglichen Schwankungen.

e) Die Eindringtiefe für die jährlichen Schwankungen ist nach d) gut 4 Meter. In dieser Tiefe sind die Schwankungen um eine halbe Periode phasenverschoben, d.h., im Winter ist es dort (etwas) wärmer als im Sommer!

Für  $t = 0$  (Hochsommer) erhält man

$$u(0, \text{Eindringtiefe}) = u_0 \cdot e^{-\pi} \cdot \cos\left(2 \cdot \pi \cdot \left(0 - \frac{1}{2}\right)\right) = -e^{-\pi} \cdot u_0 \approx -0.04 \cdot u_0$$

(eine Temperatur **unter** dem jährlichen Durchschnitt 0).

Für  $t = T/2$  (Winter,  $T = 1 \text{ [Jahr]}$ ) erhält man

$$u\left(\frac{T}{2}, \text{Eindringtiefe}\right) = u_0 \cdot e^{-\pi} \cdot \cos\left(2 \cdot \pi \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right)\right) = e^{-\pi} \cdot u_0 \approx 0.04 \cdot u_0,$$

(eine Temperatur **über** dem jährlichen Durchschnitt 0).

Die Phasenverschiebung ist intuitiv verständlich: Die sommerlichen Hitzewellen dringen als gedämpfte Wellen mit endlicher Ausbreitungsgeschwindigkeit

$$\frac{\sqrt{4 \cdot \pi \cdot c \cdot T}}{T} = \frac{2 \cdot \text{Eindringtiefe}}{T} \approx 8.44 \left[\frac{\text{m}}{\text{Jahr}}\right]$$

in den Erdboden vor (siehe den  $\cos$ -Faktor der Lösung  $u(t, x)$  in Teil b). Es dauert also etwa ein halbes Jahr, bis die sommerliche Erhitzung der Oberfläche bis zur Eindringtiefe vorgedrungen ist: sie kommt erst im tiefen Winter dort an!

## Gibt es den Weihnachtsmann?

(Eine Analyse aus Physikersicht)

1) Keine bekannte Spezies der Gattung Rentier kann fliegen. Aber: es gibt 300 000 Spezies von lebenden Organismen, die noch klassifiziert werden müssen. Obwohl es sich dabei hauptsächlich um Insekten und Bakterien handelt, schließt dies nicht mit letzter Sicherheit fliegende Rentiere aus, die nur der Weihnachtsmann bisher gesehen hat.

2) Es gibt 2 Milliarden Kinder (= Menschen unter 18) auf der Welt. Aber da der Weihnachtsmann (scheinbar) keine Moslems, Hindus, Juden und Buddhisten beliefert, reduziert sich seine Arbeit auf etwa 15% der Gesamtzahl - 378 Millionen Kinder (laut Volkszählungsbüro). Bei einer durchschnittlichen Kinderzahl von 3.5 pro Haushalt ergibt das 91.8 Millionen Häuser. Wir nehmen an, dass in jedem Haus mindestens ein braves Kind lebt.

3) Der Weihnachtsmann hat einen 31-Stunden-Weihnachtstag, bedingt durch die verschiedenen Zeitzonen, wenn er von Osten nach Westen reist (was logisch erscheint). Damit ergeben sich 822.6 Besuche pro Sekunde. Somit hat der Weihnachtsmann für jeden christlichen Haushalt mit braven Kindern 1/1000 Sekunde Zeit für seine Arbeit: Parken, aus dem Schlitten springen, den Schornstein runterklettern, die Socken füllen, die übrigen Geschenke unter dem Weihnachtsbaum verteilen, alle übriggebliebenen Reste des Weihnachtssessens vertilgen, den Schornstein wieder raufklettern und zum nächsten Haus fliegen. Angenommen, dass jeder dieser 91.8 Millionen Stops gleichmäßig auf die ganze Erde verteilt sind (was natürlich, wie wir wissen, nicht stimmt, aber als Berechnungsgrundlage akzeptieren wir dies), erhalten wir nunmehr 1.3 km Entfernung von Haushalt zu Haushalt, eine Gesamtentfernung von 120.8 Millionen km, nicht mitgerechnet die Unterbrechungen für das, was jeder von uns mindestens einmal in 31 Stunden tun muss, plus Essen usw.

Das bedeutet, dass der Schlitten des Weihnachtsmannes mit 1040 km pro Sekunde fliegt, also der 3 000-fachen Schallgeschwindigkeit. Zum Vergleich: das schnellste von Menschen gebaute Fahrzeug auf der Erde, der Ulysses Space Probe, fliegt mit lächerlichen 43.8 km pro Sekunde. Ein gewöhnliches Rentier schafft höchstens 24 km pro Stunde.

4) Die Ladung des Schlittens führt zu einem weiteren interessanten Effekt. Angenommen, jedes Kind bekommt nicht mehr als ein mittelgroßes Lego-Set (etwa 1 kg), dann hat der Schlitten ein Gewicht von 378 000 Tonnen geladen, nicht gerechnet den Weihnachtsmann, der übereinstimmend als übergewichtig beschrieben wird.

Ein gewöhnliches Rentier kann nicht mehr als 175 kg ziehen. Selbst bei der Annahme, dass ein fliegendes Rentier (siehe Punkt 1) das zehnfache normale Gewicht ziehen kann, braucht man für den Schlitten nicht nur acht oder vielleicht neun Rentiere: man braucht 216 000 Rentiere. Das erhöht das Gewicht - den Schlitten selbst noch nicht einmal eingerechnet - auf 410 400 Tonnen. Nochmals ein Vergleich: das ist mehr als das vierfache Gewicht des Ozeandampfers „Queen Elizabeth“.

5) 410 400 Tonnen bei einer Geschwindigkeit von 1040 km/s erzeugen einen ungeheuren Luftwiderstand - dadurch werden die Rentiere aufgeheizt, genauso wie ein Raumschiff, das wieder in die Erdatmosphäre eintritt. Das vorderste Paar Rentiere muss dadurch 16.6 Trillionen Joule Energie absorbieren. Pro Sekunde. Jedes. Anders ausgedrückt: sie werden praktisch augenblicklich in Flammen aufgehen, das nächste Paar Rentiere wird dem Luftwiderstand preisgegeben, und es wird ein ohrenbetäubender Knall erzeugt.

Das gesamte Team von Rentieren wird innerhalb von 5 Tausendstel Sekunden vaporisiert. Der Weihnachtsmann wird währenddessen einer Beschleunigung von der Größe der 17 500-fachen Erdbeschleunigung ausgesetzt. Ein 120 kg schwerer Weihnachtsmann (was der Beschreibung nach lächerlich wenig sein muss) würde an das Ende seines Schlittens genagelt - mit einer Kraft von 20.6 Millionen Newton.

Damit kommen wir zu dem traurigen Schluss: Wenn der Weihnachtsmann irgendwann einmal die Geschenke gebracht hat, ist er heute tot.

Trotzdem: Allen ein Frohe Weihnacht!