MATHE FÜR PHYSIKER III — Wintersemester 02/03

WALTER OEVEL — 9. 12. 2002

Übungsblatt 8

Abgabe von $*$ Aufgaben bis zum 16.12.2002, 11^{oo} Uhr, im Zettelkasten auf dem D1.

Aufgabe 33*: (Faltung. 10 Bonuspunkte)

Betrachte $f, g \in L_1(\mathbb{R})$ und definiere die **„Faltung“** $(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y) \cdot g(y)\, dy$.

a) Zeige: $f * g \in L_1(\mathbb{R})$.

b) Zeige: $\mathcal{F}[f * g] = \sqrt{2 \cdot \pi} \cdot \mathcal{F}[f] \cdot \mathcal{F}[g]$.

c) Zeige: $\mathcal{F}[f \cdot g] = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \mathcal{F}[f] * \mathcal{F}[g]$ (falls $\mathcal{F}[f], \mathcal{F}[g] \in L_1(\mathbb{R})$).

d) Sei f der Rechteckimpuls $f(x) = 1$ für $x \in [-L, L]$, $f(x) = 0$ für $x \notin [-L, L]$, sei $g(x) = \cos(k_0 \cdot x)$. Berechne $\mathcal{F}[f \cdot g]$ durch explizite Integration und vergleiche mit c), wenn man g im Distributionssinne Fourier–transformiert.

Musterlösung:

a) Es gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} (f * g)(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y) \cdot g(y)\, dy\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \Big(\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)\, dx \Big) \cdot g(y)\, dy$$
$$\overset{(\xi = x-y)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \Big(\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\, d\xi \Big) g(y)\, dy = \Big(\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\, d\xi \Big) \cdot \Big(\int_{-\infty}^{\infty} g(y)\, dy \Big)$$

Dies macht plausibel:

$$\Big| \int_{-\infty}^{\infty} (f * g)(x)\, dx \Big| = \Big| \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\, d\xi \Big| \cdot \Big| \int_{-\infty}^{\infty} g(y)\, dy \Big| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(\xi)|\, d\xi \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |g(y)|\, dy < \infty.$$

b)

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[f * g](k) &= \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \Big(\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y) \cdot g(y)\, dy \Big) \cdot e^{-i \cdot k \cdot x}\, dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y) \cdot e^{-i \cdot k \cdot (x-y)} \cdot g(y) \cdot e^{-i \cdot k \cdot y}\, dx\, dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \Big(\frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y) \cdot e^{-i \cdot k \cdot (x-y)}\, dx \Big) \cdot g(y) \cdot e^{-i \cdot k \cdot y}\, dy \\
&\overset{(\xi = x-y)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \Big(\frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \cdot e^{-i \cdot k \cdot \xi}\, d\xi \Big) \cdot g(y) \cdot e^{-i \cdot k \cdot y}\, dy \\
&= \sqrt{2 \cdot \pi} \cdot \mathcal{F}[f](k) \cdot \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} g(y) \cdot e^{-i \cdot k \cdot y}\, dy \\
&= \sqrt{2 \cdot \pi} \cdot \mathcal{F}[f](k) \cdot \mathcal{F}[g](k).
\end{aligned}$$

c)

$$
\begin{aligned}
&(\mathcal{F}[f] * \mathcal{F}[g])(k) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}[f](k-\kappa) \cdot \mathcal{F}[g](\kappa)\, d\kappa \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \Big(\frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot e^{-i \cdot (k-\kappa) \cdot x}\, dx \Big) \cdot \Big(\frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} g(y) \cdot e^{-i \cdot \kappa \cdot y}\, dy \Big)\, d\kappa \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot g(y) \cdot e^{-i \cdot k \cdot x} \cdot \Big(\frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i \cdot \kappa \cdot (y-x)}\, d\kappa \Big)\, dx\, dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot g(y) \cdot e^{-i \cdot k \cdot x} \cdot \delta(y-x)\, dy\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot g(x) \cdot e^{-i \cdot k \cdot x}\, dx \\
&= \sqrt{2 \cdot \pi} \cdot \mathcal{F}[f \cdot g](k).
\end{aligned}
$$

d) Durch direkte Rechnung folgt

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}[f \cdot g](k) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \int_{-L}^{L} \cos(k_0 \cdot x) \cdot e^{-i \cdot k \cdot x}\, dx &= \frac{1}{2 \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \int_{-L}^{L} (e^{i \cdot k_0 \cdot x} + e^{-i \cdot k_0 \cdot x}) \cdot e^{-i \cdot k \cdot x}\, dx \\
&= \frac{1}{2 \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \cdot \Big(\Big[\frac{e^{i \cdot (k_0 - k) \cdot x}}{i \cdot (k_0 - k)} \Big]_{x=-L}^{x=L} + \Big[\frac{e^{-i \cdot (k_0 + k) \cdot x}}{-i \cdot (k_0 + k)} \Big]_{x=-L}^{x=L} \Big) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \Big(\frac{\sin((k_0 - k) \cdot L)}{k_0 - k} + \frac{\sin((k_0 + k) \cdot L)}{k_0 + k} \Big). \qquad (\#)
\end{aligned}
$$

Die Fourier–Transformierte des Rechteckimpuls ist nach Beispiel 1.65.a) des Skripts

$$
\mathcal{F}[f](k) = \frac{2}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \frac{\sin(k \cdot L)}{k}.
$$

Die Fourier–Transformierte von $g(x) = \cos(k_0 \cdot x) = (e^{i \cdot k_0 \cdot x} + e^{-i \cdot k_0 \cdot x})/2$ ist im Distributionssinne

$$
\mathcal{F}[g](k) = \frac{\sqrt{2 \cdot \pi}}{2} \cdot (\delta(k - k_0) + \delta(k + k_0)).
$$

Die Faltung ist

$$
\begin{aligned}
(\mathcal{F}[f] * \mathcal{F}[g])(k) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin((k - \kappa)) \cdot L)}{k - \kappa} \cdot (\delta(\kappa - k_0) + \delta(\kappa + k_0))\, d\kappa \\
&= \frac{\sin((k - k_0) \cdot L)}{k - k_0} + \frac{\sin((k + k_0) \cdot L)}{k + k_0}.
\end{aligned}
$$

Vergleich mit (#) verifiziert $\mathcal{F}[f \cdot g] = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \mathcal{F}[f] * \mathcal{F}[g]$.

Aufgabe 34*: (Impulsantwort eines Filters. 10 Bonuspunkte)
Ein lineares analoges Gerät reagiert auf ein Eingangssignal $U^{(in)}(t)$ mit dem Ausgangssignal

$$U^{(out)}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(t-\tau) \cdot U^{(in)}(\tau)\, d\tau.$$

Das Gerät sei eine „Black Box", d.h., der „Filterkern" F ist unbekannt. Wie kann man ihn leicht messen? Anleitung: lege einen scharfen Rechteck–Impuls an. Welches Ausgangssignal ergibt sich?

Musterlösung:
Für das Eingangssignal $U^{(in)}(t) = \delta(t)$ gilt

$$U^{(out)}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(t-\tau) \cdot U^{(in)}(\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} F(t-\tau) \cdot \delta(\tau)\, d\tau = F(t).$$

Also: der Filterkern wird als „Impulsantwort" (= Ausgabe bei Eingabe eines scharfen Impulses) sichtbar.

Aufgabe 35*: (Die allgemeine Lösung der Wärmeleitgleichung. 10 Bonuspunkte)
Löse die Wärmeleitgleichung $u_t = c \cdot u_{xx}$, $c > 0$, $x \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$ unter den Randbedingungen $\lim_{x\to\pm\infty} u(x,t) = 0$ und der Anfangsbedingung $u(x,0) = u_0(x) \in L_1(\mathbb{R})$. Hierbei sei u_0 stetig differenzierbar und u_0' beschränkt. Die Lösung ist:

$$u(x,t) = \frac{1}{2\cdot\sqrt{\pi\cdot c\cdot t}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} u_0(\xi) \cdot e^{-(x-\xi)^2/(4\cdot c\cdot t)}\, d\xi.$$

Musterlösung:
Fourier–Transformation $\widehat{u} = \mathcal{F}[u]$ in x-Richtung führt auf die gewöhnliche DGL

$$\frac{d}{dt}\, \widehat{u}(k,t) = c \cdot (i\cdot k)^2 \cdot \widehat{u}(k,t)$$

mit der Lösung

$$\widehat{u}(k,t) = \widehat{u}(k,0) \cdot e^{-c\cdot k^2\cdot t}.$$

Die Funktion $\widehat{h}(k,t) = e^{-c\cdot k^2\cdot t}$ ist nach Beispiel 1.65.e) die Fourier–Transformierte von

$$h(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\cdot c\cdot t}} \cdot e^{-x^2/(4\cdot c\cdot t)}.$$

Multiplikation im Fourier–Raum ist Faltung im Ortsraum, also ist die Lösung:

$$u(x,t) = (h * u_0)(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} h(x-\xi,t) \cdot u_0(\xi)\, d\xi$$

$$= \frac{1}{2\cdot\sqrt{\pi\cdot c\cdot t}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-\xi)^2/(4\cdot c\cdot t)} \cdot u_0(\xi)\, d\xi.$$

Zusatz: Wir zeigen explizit, dass die obige Lösung im Grenzwert $t \to 0$ in der Tat gegen die Anfangsbedingung u_0 konvergiert. Hierzu setzen wir u_0 als stetig differenzierbar und u_0' als beschränkt voraus. Es gilt

$$\begin{aligned} u(x,t) &\overset{(\eta=x-\xi)}{=} \frac{1}{2\cdot\sqrt{\pi\cdot c\cdot t}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\eta^2/(4\cdot c\cdot t)} \cdot u_0(x-\eta)\,d\eta \\ &\overset{(\xi=\eta/\sqrt{t})}{=} \frac{1}{2\cdot\sqrt{\pi\cdot c}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2/(4\cdot c)} \cdot u_0(x-\sqrt{t}\cdot\xi)\,d\xi. \end{aligned}$$

Mit $\frac{1}{2\cdot\sqrt{\pi\cdot c}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2/(4\cdot c)}\,d\xi = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\eta^2}\,d\eta = 1$ gilt:

$$u(x,t) - u_0(x) = \frac{1}{2\cdot\sqrt{\pi\cdot c}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2/(4\cdot c)} \cdot \Big(u_0(x-\sqrt{t}\cdot\xi) - u_0(x)\Big)\,d\xi.$$

Hiermit folgt:

$$\begin{aligned} |u(x,t) - u_0(x)| &\le \frac{1}{2\cdot\sqrt{\pi\cdot c}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2/(4\cdot c)} \cdot \Big|u_0(x-\sqrt{t}\cdot\xi) - u_0(x)\Big|\,d\xi \\ &\overset{(\mathrm{MWS})}{=} \frac{1}{2\cdot\sqrt{\pi\cdot c}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2/(4\cdot c)} \cdot \sqrt{t}\cdot|\xi|\cdot|u_0'(\eta(x,t,\xi))|\,d\xi \le \mathrm{const}\cdot\sqrt{t}. \end{aligned}$$

Hierbei wurde in (MWS) der Mittelwertsatz der Differentialrechnung mit einem Zwischenwert η benutzt. Der obige Ausdruck geht für $t \to 0$ wie $\sqrt{t}$ gegen 0 (und zwar gleichmäßig in x).

Aufgabe 36*: (Die Unschärferelation. 10 Bonuspunkte)

Warum hat es keinen Sinn, einen Kontrabass genauso schnell spielen zu wollen wie eine Geige?

Die abendländische Musikskala enthält 12 Halbtöne pro Oktave, d.h., zwischen einem Grundton ω_0 und seinem ersten harmonischen Oberton (der Frequenz $2\cdot\omega_0$) liegen „Halbtöne“ mit den Frequenzen $\omega_k = 2^{k/12}\cdot\omega_0$. Betrachte eine endlich langen Ton $f(t) = r(t)\cdot e^{i\cdot\omega_0\cdot t}$ der Frequenz ω_0, der nur die Zeitdauer T anhalten soll: $r(t) = 1$ für $t \in [-T/2, T/2]$, $r(t) = 0$ für $t \notin [-T/2, T/2]$. Diskutiere das Frequenzspektrum von $f(t)$. Wie lange muss der Ton anhalten, damit er noch einigermaßen vom nächsten Halbton $2^{1/12}\cdot\omega_0$ unterschieden werden kann? Betrachte speziell den „Kammerton a“ der Frequenz $\omega_0 = 2\cdot\pi\cdot 440$ Hertz.

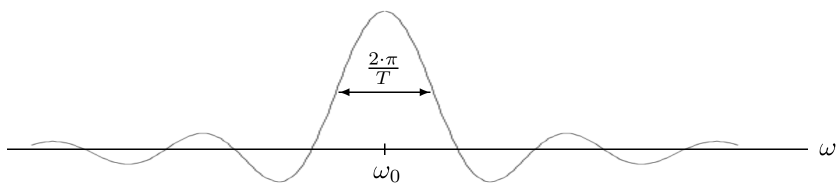
Musterlösung:

Die Fourier–Transformierte von

$$f(t) = \begin{cases} e^{i\cdot k_0\cdot t} & \text{für } t \in [-T/2, T/2], \\ 0 & \text{für } t \notin [-T/2, T/2] \end{cases}$$

ist

$$\widehat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}} \cdot \int_{-L/2}^{L/2} e^{i\cdot\omega_0\cdot t}\cdot e^{-i\cdot\omega\cdot t}\,dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\sin\Big((\omega-\omega_0)\cdot\dfrac{T}{2}\Big)}{\omega-\omega_0}.$$



Als „Breite“ $\Delta\omega$ des Tonspektrums sollen der Abstand zwischen ω_0 und der nächsten Nullstelle $\omega = \omega_0 + 2 \cdot \pi/T$ von $\widehat{f}(\omega)$ angesehen werden, also

$$\Delta\omega \approx \frac{2 \cdot \pi}{T}.$$

Der nächste Halbton hat die Frequenz $\omega_1 = 2^{1/12} \cdot \omega_0 \approx 1.06 \cdot \omega_0$. Der endliche Ton der „Frequenz“ ω_0 kann also nur dann sauber vom nächsten Halbton unterschieden werden, wenn

$$\frac{2 \cdot \pi}{T} \ll \omega_1 - \omega_0 \approx 0.06 \cdot \omega_0$$

gilt, also:

$$T \gg \frac{2 \cdot \pi}{0.06 \cdot \omega_0} \approx \frac{16.8}{\omega_0/(2 \cdot \pi)}.$$

Konkrete Zahlenwerte: Der „Kammerton a“ ($\omega_0 = 2 \cdot \pi \cdot 440$ Hz) muss

$$T \gg \frac{16.8}{440} \text{ [sec]} \approx 0.038 \text{ [sec]}$$

angehalten werden, damit er noch sauber klingt. Eine „16-tel“ Note, also $T = 1/16$ [sec]≈ 0.063 [sec] führt zu einem Ton, der noch halbwegs als „Kammerton a“ identifiziert werden kann.

Aufgabe 37*: (Fourier–Transformation von Distributionen. 10 Bonuspunkte)
Berechne die Fourier–Transformierte der Sprungfunktion $H(x) = 0$ für $x < 0$, $H(x) = 1$ für $x \geq 0$. Anleitung: verwende die Ergebnisse aus Beispiel 1.89 des Skripts.

Musterlösung:
Es gilt $H(x) = \frac{1}{2} \cdot (\text{sign}(x) + 1)$ mit der Funktion $\text{sign}(x) = -1$ für $x < 0$, $\text{sign}(x) = 1$ für $x \geq 0$. Im Skript war (Beispiel 1.89.b)

$$\mathcal{F}[\text{sign}](k) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \frac{2}{i \cdot k}$$

berechnet worden. Die konstante Funktion 1 hat die Fourier–Transformierte $\mathcal{F}[1](k) = \sqrt{2 \cdot \pi} \cdot \delta(k)$ (Beispiel 1.89.a). Macht zusammen:

$$\mathcal{F}[H](k) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \frac{1}{i \cdot k} + \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \delta(k).$$

Hierbei sind Integrale im Cauchy–Hauptwertsinne zu betrachten.

Aufgabe 38: (Fourier–Transformation von Stammfunktionen. 0 Bonuspunkte)
Zeige, dass für eine L_1–Funktion f mit der Stammfunktion $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(\xi)\, d\xi$ im Distributionssinne gilt:

$$\mathcal{F}[F](k) = \frac{1}{i \cdot k} \cdot \mathcal{F}[f](k) + \pi \cdot \mathcal{F}[f](0) \cdot \delta(k).$$

Vorsicht: Tricky!
Anleitung: Für die Stammfunktion gilt

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0, \quad \lim_{x \to \infty} F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\, d\xi = \sqrt{2 \cdot \pi} \cdot \mathcal{F}[f](0).$$

Sei H die Sprungfunktion: $H(x) = 0$ für $x < 0$, $H(x) = 1$ für $x \geq 0$. Berechne die Fourier–Transformation von $G(x) = F(x) - \sqrt{2 \cdot \pi} \cdot \mathcal{F}[f](0) \cdot H(x)$. Als Fourier–Transformierte dieser Funktion ergibt sich nach einigen Mühen $\mathcal{F}[G](k) = (\mathcal{F}[f](k) - \mathcal{F}[f](0))/(i \cdot k)$.

Musterlösung:
Sei $\widehat{f} = \mathcal{F}[f]$, also

$$\widehat{f}(0) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx.$$

Mit der Sprungfunktion $H(x) = 0$ für $x < 0$ und $H(x) = 1$ für $x \geq 0$ und einer Testfunktion $\psi \in \mathcal{S}$ gilt:

$$\left\langle \int_{-\infty}^{x} f(\xi)\, d\xi, \psi \right\rangle = \underbrace{\left\langle \int_{-\infty}^{x} f(\xi)\, d\xi - \sqrt{2 \cdot \pi} \cdot \widehat{f}(0) \cdot H, \psi \right\rangle}_{i)} + \underbrace{\langle \sqrt{2 \cdot \pi} \cdot \widehat{f}(0) \cdot H, \psi \rangle}_{ii)}. \qquad (\#)$$

i) Es gilt

$$\begin{aligned}
&\left\langle \int_{-\infty}^{x} f(\xi)\, d\xi - \sqrt{2 \cdot \pi} \cdot \widehat{f}(0) \cdot H, \psi \right\rangle \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \Big(\int_{-\infty}^{x} \overline{f(\xi)}\, d\xi - \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(\xi)}\, d\xi \cdot H(x) \Big) \cdot \psi(x)\, dx \\
&= \int_{-\infty}^{0} \Big(\int_{-\infty}^{x} \overline{f(\xi)\, d\xi} \Big) \cdot \psi(x)\, dx + \int_{0}^{\infty} \Big(\int_{-\infty}^{x} \overline{f(\xi)}\, d\xi - \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(\xi)}\, d\xi \Big) \cdot \psi(x)\, dx \\
&= \int_{-\infty}^{0} \Big(\int_{-\infty}^{x} \overline{f(\xi)}\, d\xi \Big) \cdot \psi(x)\, dx - \int_{0}^{\infty} \Big(\int_{x}^{\infty} \overline{f(\xi)}\, d\xi \Big) \cdot \psi(x)\, dx.
\end{aligned}$$

Sei $\widehat{\psi} = \mathcal{F}[\psi]$. Wir setzen die Rücktransformation $\psi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}} \cdot \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\psi}(k)\cdot e^{i\cdot k\cdot x}\,dk$ von $\widehat{\psi}$ ein:

$$\begin{aligned}
&\Big\langle \int_{-\infty}^{x} f(\xi)\,d\xi - \sqrt{2\cdot\pi}\cdot\widehat{f}(0)\cdot H, \psi \Big\rangle \qquad\qquad (\#\#)\\
&= \int_{-\infty}^{0}\Big(\int_{-\infty}^{x}\overline{f(\xi)}\,d\xi\Big)\cdot\Big(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\widehat{\psi}(k)\cdot e^{i\cdot k\cdot x}}{\sqrt{2\cdot\pi}}\,dk\Big)\,dx - \int_{0}^{\infty}\Big(\int_{x}^{\infty}\overline{f(\xi)}\,d\xi\Big)\cdot\Big(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\widehat{\psi}(k)\cdot e^{i\cdot k\cdot x}}{\sqrt{2\cdot\pi}}\,dk\Big)\,dx\\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty}\Big(\int_{-\infty}^{x}\overline{f(\xi)}\,d\xi\Big)\cdot\frac{\widehat{\psi}(k)\cdot e^{i\cdot k\cdot x}}{\sqrt{2\cdot\pi}}\,dx\,dk - \int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty}\Big(\int_{x}^{\infty}\overline{f(\xi)}\,d\xi\Big)\cdot\frac{\widehat{\psi}(k)\cdot e^{i\cdot k\cdot x}}{\sqrt{2\cdot\pi}}\,dx\,dk\\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\widehat{\psi}(k)}{\sqrt{2\cdot\pi}}\cdot\underbrace{\Big(\int_{-\infty}^{0}\Big(\int_{-\infty}^{x}\overline{f(\xi)}\,d\xi\Big)\cdot e^{i\cdot k\cdot x}\,dx - \int_{0}^{\infty}\Big(\int_{x}^{\infty}\overline{f(\xi)}\,d\xi\Big)\cdot e^{i\cdot k\cdot x}\,dx\Big)}_{I(k)}\,dk.
\end{aligned}$$

Partielle Integration liefert:

$$\begin{aligned}
I(k) &= \int_{-\infty}^{0}\underbrace{\Big(\int_{-\infty}^{x}\overline{f(\xi)}\,d\xi\Big)}_{u_1(x)}\cdot\underbrace{\Big(e^{i\cdot k\cdot x}\Big)}_{v'(x)}\,dx - \int_{0}^{\infty}\underbrace{\Big(\int_{x}^{\infty}\overline{f(\xi)}\,d\xi\Big)}_{u_2(x)}\cdot\underbrace{\Big(e^{i\cdot k\cdot x}\Big)}_{v'(x)}\,dx\\
&= \Big[\underbrace{\Big(\int_{-\infty}^{x}\overline{f(\xi)}\,d\xi\Big)}_{u_1(x)}\cdot\underbrace{\frac{e^{i\cdot k\cdot x}}{i\cdot k}}_{v(x)}\Big]_{x=-\infty}^{x=0} - \int_{-\infty}^{0}\underbrace{\overline{f(x)}}_{u_1'(x)}\cdot\underbrace{\frac{e^{i\cdot k\cdot x}}{i\cdot k}}_{v(x)}\,dx\\
&\quad - \Big[\underbrace{\Big(\int_{x}^{\infty}\overline{f(\xi)}\,d\xi\Big)}_{u_2(x)}\cdot\underbrace{\frac{e^{i\cdot k\cdot x}}{i\cdot k}}_{v(x)}\Big]_{x=0}^{x=\infty} + \int_{0}^{\infty}\underbrace{\big(-\overline{f(x)}\big)}_{u_2'(x)}\cdot\underbrace{\frac{e^{i\cdot k\cdot x}}{i\cdot k}}_{v(x)}\,dx\\
&= \frac{1}{i\cdot k}\cdot\Big(\underbrace{\int_{-\infty}^{0}\overline{f(\xi)}\,d\xi + \int_{0}^{\infty}\overline{f(\xi)}\,d\xi}_{=\int_{-\infty}^{\infty}\overline{f(\xi)}\,d\xi}\ \underbrace{-\int_{-\infty}^{0}\overline{f(x)}\cdot e^{i\cdot k\cdot x}\,dx - \int_{0}^{\infty}\overline{f(x)}\cdot e^{i\cdot k\cdot x}\,dx}_{=-\int_{-\infty}^{\infty}\overline{f(x)}\cdot e^{i\cdot k\cdot x}\,dx}\Big)\\
&= \frac{1}{i\cdot k}\cdot\overline{\Big(\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)\,d\xi - \int_{-\infty}^{\infty}f(x)\cdot e^{-i\cdot k\cdot x}\,dx\Big)}\\
&= \frac{\sqrt{2\cdot\pi}}{i\cdot k}\cdot\overline{(\widehat{f}(0)-\widehat{f}(k))} \;=\; \sqrt{2\cdot\pi}\cdot\overline{\Big(\frac{\widehat{f}(k)-\widehat{f}(0)}{i\cdot k}\Big)}.
\end{aligned}$$

Dies eingesetzt in (##) liefert:

$$\Big\langle\int_{-\infty}^{x}f(\xi)\,d\xi - \sqrt{2\cdot\pi}\cdot\widehat{f}(0)\cdot H,\psi\Big\rangle = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\widehat{\psi}(k)}{\sqrt{2\cdot\pi}}\cdot\sqrt{2\cdot\pi}\cdot\overline{\Big(\frac{\widehat{f}(k)-\widehat{f}(0)}{i\cdot k}\Big)}\,dk = \Big\langle\frac{\widehat{f}(k)-\widehat{f}(0)}{i\cdot k},\widehat{\psi}\Big\rangle.$$

ii) Mit der aus Aufgabe 37 bekannten Fourier–Transformierten

$$\mathcal{F}[H](k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{i \cdot k} + \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \delta(k)$$

bestimmt sich die Fourier–Transformierte von $\sqrt{2 \cdot \pi} \cdot \widehat{f}(0) \cdot H$ zu

$$\mathcal{F}[\sqrt{2 \cdot \pi} \cdot \widehat{f}(0) \cdot H](k) = \frac{\widehat{f}(0)}{i \cdot k} + \pi \cdot \widehat{f}(0) \cdot \delta(k).$$

Die Ergebnisse i) und ii) eingesetzt in (#) liefern als Endergebnis:

$$\mathcal{F}\Big[\int_{-\infty}^{x} f(\xi)\, d\xi\Big](k) = \frac{\widehat{f}(k) - \widehat{f}(0)}{i \cdot k} + \Big(\frac{\widehat{f}(0)}{i \cdot k} + \pi \cdot \widehat{f}(0) \cdot \delta(k)\Big) = \frac{\widehat{f}(k)}{i \cdot k} + \pi \cdot \widehat{f}(0) \cdot \delta(k).$$
