Übungsblatt 7

Abgabe von $*$ Aufgaben bis zum 9.12.2002, 11^{oo} Uhr, im Zettelkasten auf dem D1.

Aufgabe 27*: (2-dimensionale Fourier–Reihen. 10 Bonuspunkte)
Die Auslenkung $u(x, y, t)$ einer am Rand des Quadrates $[0, L] \times [0, L]$ eingespannten Membran ist bestimmt durch die Schwingungsgleichung $u_{tt} = c^2 \cdot (u_{xx} + u_{yy})$, wobei c eine positive Konstante ist, welche durch das Membranmaterial und die mechanische Spannung bestimmt wird.

a) Löse die Schwingungsgleichung analog zu Aufgabe 26 unter den Randbedingungen

$$u(0, y, t) = 0, \quad u(L, y, t) = 0, \quad u(x, 0, t) = 0, \quad u(x, L, t) = 0$$

mit vorgegebenen Anfangsbedingungen u_0 und $\dot{u}_0$:

$$u(x, y, t = 0) = u_0(x, y), \quad u_t(x, y, 0) = \dot{u}_0(x, y).$$

Ansatz:

$$u(x, y, t) = \sum_{k_1=1}^{\infty} \sum_{k_2=1}^{\infty} b_{k_1 k_2}(t) \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot k_1 \cdot x}{L}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot k_2 \cdot y}{L}\right).$$

b) Bestimme die Grundfrequenz und die möglichen Oberfrequenzen der von einem quadratischen Trommelfell erzeugten Töne. Warum klingt eine Trommel weniger harmonisch als ein Saiteninstrument?

c) Bestimme die Lösung zur Anfangsbedingung $u_0(x, y) = x \cdot (x - L) \cdot y \cdot (y - L)/L^3$ und $\dot{u}_0(x, y) = 0$.

Musterlösung:
a) Der Ansatz

$$u(x, y, t) = \sum_{k_1=1}^{\infty} \sum_{k_2=1}^{\infty} b_{k_1 k_2}(t) \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot k_1 \cdot x}{L}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot k_2 \cdot y}{L}\right)$$

erfüllt automatisch die Randbedingungen. Einsetzen in die Wellengleichung liefert die DGL

$$\frac{d^2}{dt^2}\, b_{k_1 k_2}(t) = -\,\frac{c^2 \cdot \pi^2}{L^2} \cdot \left(k_1^2 + k_2^2\right) \cdot b_{k_1 k_2}(t)$$

mit der Lösung

$$b_{k_1 k_2}(t) = b_{k_1 k_2}(0) \cdot \cos(\omega_{k_1 k_2} \cdot t) + \frac{\dot{b}_{k_1 k_2}(0)}{\omega_{k_1 k_2}} \cdot \sin(\omega_{k_1 k_2} \cdot t).$$

Die (Zeit–)Frequenzen $\omega_{k_1 k_2}$ sind dabei durch

$$\omega_{k_1 k_2} = \sqrt{\frac{c^2 \cdot \pi^2}{L^2} \cdot \left(k_1^2 + k_2^2\right)} = \frac{c \cdot \pi}{L} \cdot \sqrt{k_1^2 + k_2^2}, \quad k_1, k_2 \in \mathbb{N}$$

gegeben. Mit der Lösung

$$u(x,y,t) = \sum_{k_1=1}^{\infty}\sum_{k_2=1}^{\infty} b_{k_1k_2}(0)\cdot\cos(\omega_{k_1k_2}\cdot t)\cdot\sin\left(\frac{\pi\cdot k_1\cdot x}{L}\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi\cdot k_2\cdot y}{L}\right)$$
$$+\sum_{k_1=1}^{\infty}\sum_{k_2=1}^{\infty}\frac{\dot b_{k_1k_2}(0)}{\omega_{k_1k_2}}\cdot\sin(\omega_{k_1k_2}\cdot t)\cdot\sin\left(\frac{\pi\cdot k_1\cdot x}{L}\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi\cdot k_2\cdot y}{L}\right)$$

stellen sich

$$b_{k_1k_2}(0) = \frac{4}{L^2}\cdot\int_0^L\int_0^L u_0(x,y)\cdot\sin\left(\frac{k_1\cdot\pi\cdot x}{L}\right)\cdot\sin\left(\frac{k_2\cdot\pi\cdot y}{L}\right)\,dx\,dy$$

bzw.

$$\dot b_{k_1k_2}(0) = \frac{4}{L^2}\cdot\int_0^L\int_0^L \dot u_0(x,y)\cdot\sin\left(\frac{k_1\cdot\pi\cdot x}{L}\right)\cdot\sin\left(\frac{k_2\cdot\pi\cdot y}{L}\right)\,dx\,dy$$

als die Fourier–Koeffizienten der Anfangsbedingungen $u_0(x,y)$ bzw. $\dot u_0(x,y)$ heraus. Man stelle sich dazu die Anfansbedingungen jeweils ungerade auf das Gebiet $([-L,L]\times[0,L])\cup([0,L]\times[-L,L])$ fortgesetzt vor: $u_0(-x,y) = -u_0(x,y)$, $u_0(x,-y) = -u_0(x,y)$.

---

b) Die von der Trommel erzeugten Töne (Frequenzen) sind

$$\omega_{k_1k_2} = \frac{c\cdot\pi}{L}\cdot\sqrt{k_1^2+k_2^2},\quad k_1,k_2\in\mathbb{N}.$$

Die Grundfrequenz ist

$$\omega_0 = \omega_{11} = \frac{c\cdot\pi\cdot\sqrt{2}}{L},$$

die ersten Oberfrequenzen sind

$$\omega_{12} = \omega_{21} = \frac{c\cdot\pi}{L}\cdot\sqrt{5} = \sqrt{\frac{5}{2}}\cdot\omega_0 \approx 1.58\cdot\omega_0,$$

$$\omega_{22} = \frac{c\cdot\pi}{L}\cdot\sqrt{8} = 2\cdot\omega_0,$$

$$\omega_{13} = \omega_{31} = \frac{c\cdot\pi}{L}\cdot\sqrt{10} = \sqrt{5}\cdot\omega_0 \approx 2.24\cdot\omega_0,$$

$$\omega_{23} = \omega_{32} = \frac{c\cdot\pi}{L}\cdot\sqrt{13} = \sqrt{\frac{13}{2}}\cdot\omega_0 \approx 2.55\cdot\omega_0,$$

$$\omega_{14} = \omega_{41} = \frac{c\cdot\pi}{L}\cdot\sqrt{17} = \sqrt{\frac{17}{2}}\cdot\omega_0 \approx 2.92\cdot\omega_0,$$

$$\omega_{33} = \omega_{33} = \frac{c\cdot\pi}{L}\cdot\sqrt{18} = 3\cdot\omega_0$$

usw. Also: neben den ganzzahligen Vielfachen der Grundfrequenz gibt es noch weitere Töne, die nicht harmonisch zum Grundton liegen (harmonisch = ganzzahlig vielfache Frequenz). Dies ist der Grund, warum Trommeln weniger harmonisch als Saiteninstrumente klingen.

---

c) Für die Anfangsbedingung $u_0(x,y) = x{\cdot}(x{-}L){\cdot}y{\cdot}(y{-}L)/L^3$ berechnet man die Fourier–Koeffizienten

$$\begin{aligned} b_{k_1k_2}(0) &= \frac{4}{L^2}\cdot\int_0^L\int_0^L u_0(x,y)\cdot\sin\Big(\frac{k_1\cdot\pi\cdot x}{L}\Big)\cdot\sin\Big(\frac{k_2\cdot\pi\cdot y}{L}\Big)\,dx\,dy \\ &= \frac{4}{L^2}\cdot\frac{1}{L^3}\cdot\Big(\int_0^L x\cdot(x-L)\cdot\sin\Big(\frac{k_1\cdot\pi\cdot x}{L}\Big)\,dx\Big)\cdot\Big(\int_0^L y\cdot(y-L)\cdot\sin\Big(\frac{k_2\cdot\pi\cdot y}{L}\Big)\,dy\Big) \\ &= \frac{4}{L^5}\cdot\frac{2\cdot L^3}{\pi^3}\cdot\frac{(-1)^{k_1}-1}{k_1^3}\cdot\frac{2\cdot L^3}{\pi^3}\cdot\frac{(-1)^{k_2}-1}{k_1^3} = \frac{16\cdot L}{\pi^6}\cdot\frac{(1-(-1)^{k_1})\cdot(1-(-1)^{k_2})}{k_1^3\cdot k_2^3} \end{aligned}$$

bzw.

$$\dot b_{k_1k_2}(0) = \frac{4}{L^2}\cdot\int_0^L\int_0^L \dot u_0(x,y)\cdot\sin\Big(\frac{k_1\cdot\pi\cdot x}{L}\Big)\cdot\sin\Big(\frac{k_2\cdot\pi\cdot y}{L}\Big)\,dx\,dy = 0.$$

Die Lösung ist also

$$u(x,y,t) = \frac{64\cdot L}{\pi^6}\cdot\sum_{k_1=1,3,5,\ldots}\ \sum_{k_2=1,3,5,\ldots}\frac{\cos(\omega_{k_1k_2}\cdot t)}{k_1^3\cdot k_2^3}\cdot\sin\Big(\frac{\pi\cdot k_1\cdot x}{L}\Big)\cdot\sin\Big(\frac{\pi\cdot k_2\cdot y}{L}\Big).$$

Die geraden Indizies k_1, k_2 sind nicht beteiligt, das Klangspektrum ist damit gegeben durch die Frequenzen

$$\begin{array}{rcll} \omega_0 = \omega_{11} &=& \omega_0, & \text{Amplitude} = 1, \\ \omega_{31} = \omega_{13} &=& \sqrt{5}\cdot\omega_0, & \text{Amplitude} = \frac{1}{27}, \\ \omega_{33} &=& 3\cdot\omega_0, & \text{Amplitude} = \frac{1}{27\cdot 27}, \\ \omega_{51} = \omega_{15} &=& \sqrt{13}\cdot\omega_0, & \text{Amplitude} = \frac{1}{125}, \\ \omega_{53} = \omega_{35} &=& \sqrt{17}\cdot\omega_0, & \text{Amplitude} = \frac{1}{125\cdot 27}, \\ \omega_{55} &=& 5\cdot\omega_0, & \text{Amplitude} = \frac{1}{125\cdot 125} \end{array}$$

(mit den Amplituden $\frac{|\pm 1|}{k_1^3\cdot k_2^3}$, die in der Mitte des Gebiets, also für $x = y = L/2$, erzeugt werden).

Aufgabe 28*: (Ortsverschiebung und Frequenzverschiebung. 10 Bonuspunkte)
Sei $f \in L_1(\mathbb{R})$ und $\widehat{f} = \mathcal{F}[f]$.

a) Zeige für $g(x) = f(x - x_0)$: $\quad \mathcal{F}[g](k) = e^{-i\cdot k\cdot x_0}\cdot\widehat{f}(k)$.

b) Zeige für $g(x) = e^{i\cdot k_0\cdot x}\cdot f(x)$: $\quad \mathcal{F}[g](k) = \widehat{f}(k - k_0)$.

Musterlösung:
a)

$$\mathcal{F}[g](k) = \frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f(x-x_0)\cdot e^{-i\cdot k\cdot x}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f(x-x_0)\cdot e^{-i\cdot k\cdot(x-x_0)}\,dx \cdot e^{-i\cdot k\cdot x_0}$$

$$\overset{(y=x-x_0)}{=} \frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\cdot e^{-i\cdot k\cdot y}\,dy \cdot e^{-i\cdot k\cdot x_0} = \mathcal{F}[f](k)\cdot e^{-i\cdot k\cdot x_0}.$$

b)

$$\mathcal{F}[g](k) = \frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\cdot k_0\cdot x}\cdot f(x)\cdot e^{-i\cdot k\cdot x}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cdot e^{-i\cdot(k-k_0)\cdot x}\,dx = \mathcal{F}[f](k-k_0).$$

Aufgabe 29*: (Sinus– und Cosinus–Transformation. 10 Bonuspunkte)

a) Sei f eine gerade bzw. ungerade L_1–Funktion. Zeige

$$\widehat{f}(k) = \mathcal{F}[f](k) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \int_0^{\infty} f(x)\cdot\cos(k\cdot x)\,dx$$

bzw.

$$i\cdot\widehat{f}(k) = i\cdot\mathcal{F}[f](k) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \int_0^{\infty} f(x)\cdot\sin(k\cdot x)\,dx.$$

Zeige, dass die Rücktransformation sich durch

$$\mathcal{F}^{-1}[\widehat{f}\,](x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \int_0^{\infty} \widehat{f}(k)\cdot\cos(k\cdot x)\,dk$$

bzw.

$$\mathcal{F}^{-1}[\widehat{f}\,](x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \int_0^{\infty} (i\cdot\widehat{f}(k))\cdot\sin(k\cdot x)\,dk$$

ergibt.

b) Sei $f \in L_1(\mathbb{R})$ stetig und $\widehat{f} = \mathcal{F}[f] \in L_1(\mathbb{R})$. Zerlege f mittels $f(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2} + \frac{f(x)-f(-x)}{2}$ in einen geraden und einen ungeraden Anteil und zeige:

$$\begin{aligned} f(x) = \;& \frac{1}{\pi}\cdot\int_0^{\infty} \cos(k\cdot x)\cdot\Big(\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\cdot\cos(k\cdot\xi)\,d\xi\Big)\,dk \\ &+ \frac{1}{\pi}\cdot\int_0^{\infty} \sin(k\cdot x)\cdot\Big(\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\cdot\sin(k\cdot\xi)\,d\xi\Big)\,dk \\ = \;& \frac{1}{\pi}\cdot\int_0^{\infty} \Big(\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\cdot\cos(k\cdot(x-\xi))\,d\xi\Big)\,dk. \end{aligned}$$

Musterlösung:
a) Sei f gerade/ungerade: $f(-x) = \pm f(x)$:

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(k) \;=\; \mathcal{F}[f](k) \quad &= \quad \frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}} \cdot \Big(\int_{-\infty}^{0} f(x) \cdot e^{-i\cdot k\cdot x}\,dx + \int_{0}^{\infty} f(x)\cdot e^{-i\cdot k\cdot x}\,dx \Big) \\
&\overset{(y=-x)}{=} \quad \frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}} \cdot \Big(\int_{0}^{\infty} f(-y) \cdot e^{i\cdot k\cdot y}\,dy + \int_{0}^{\infty} f(x)\cdot e^{-i\cdot k\cdot x}\,dx \Big) \\
&= \quad \frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}} \cdot \int_{0}^{\infty} f(x) \cdot \Big(\pm\, e^{i\cdot k\cdot x} + e^{-i\cdot k\cdot x} \Big)\,dx.
\end{aligned}$$

Für gerade Funktionen folgt: $\widehat{f}(k) = \frac{2}{\sqrt{2\cdot\pi}} \cdot \int_{0}^{\infty} f(x)\cdot \cos(k\cdot x)\,dx.$

Für ungerade Funktionen folgt: $\widehat{f}(k) = \frac{2}{\sqrt{2\cdot\pi}} \cdot \int_{0}^{\infty} f(x)\cdot (-i) \cdot \sin(k\cdot x)\,dx.$

Zu den Umkehrformeln: beachte, dass mit den obigen Formel $\widehat{f}$ für gerades/ungerades f automatisch wieder gerade/ungerade ist. Analog zu oben folgt damit

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}^{-1}[\widehat{f}\,](x) \quad &= \quad \frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}} \cdot \Big(\int_{-\infty}^{0} \widehat{f}(k) \cdot e^{i\cdot k\cdot x}\,dk + \int_{0}^{\infty} \widehat{f}(k)\cdot e^{i\cdot k\cdot x}\,dk \Big) \\
&\overset{(\kappa=-k)}{=} \quad \frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}} \cdot \Big(\int_{0}^{\infty} \widehat{f}(-\kappa) \cdot e^{-i\cdot \kappa\cdot x}\,d\kappa + \int_{0}^{\infty} \widehat{f}(k)\cdot e^{i\cdot k\cdot x}\,dk \Big) \\
&= \quad \frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}} \cdot \int_{0}^{\infty} \widehat{f}(k) \cdot \Big(e^{i\cdot k\cdot x} \pm e^{-i\cdot k\cdot x} \Big)\,dk.
\end{aligned}$$

Für gerade Funktionen folgt: $\mathcal{F}^{-1}[\widehat{f}\,](x) = \frac{2}{\sqrt{2\cdot\pi}} \cdot \int_{0}^{\infty} \widehat{f}(k)\cdot \cos(k\cdot x)\,dk.$

Für ungerade Funktionen folgt: $\mathcal{F}^{-1}[\widehat{f}\,](x) = \frac{2}{\sqrt{2\cdot\pi}} \cdot \int_{0}^{\infty} \widehat{f}(k)\cdot i \cdot \sin(k\cdot x)\,dk.$

b) Setze $f_g(x) = (f(x) + f(-x))/2$, $f_u(x) = (f(x) - f(-x))/2$. Es gilt

$$\mathcal{F}[f](k) = \mathcal{F}[f_g + f_u](k) = \mathcal{F}[f_g](k) + \mathcal{F}[f_u](k)$$

$$\overset{a)}{=} \underbrace{\frac{2}{\sqrt{2\cdot\pi}} \cdot \int_{0}^{\infty} f_g(x)\cdot\cos(k\cdot x)\,dx}_{\widehat{f}_g(k)} + \underbrace{\frac{1}{i} \cdot \frac{2}{\sqrt{2\cdot\pi}} \cdot \int_{0}^{\infty} f_u(x)\cdot\sin(k\cdot x)\,dx.}_{\widehat{f}_u(k)}$$

Da sowohl f als auch $\widehat{f} = \mathcal{F}[f]$ in $L_1(\mathbb{R})$ liegen sollen und f stetig ist, ist f überall durch die Rücktransformation darstellbar:

$$f(x) = \mathcal{F}^{-1}[\widehat{f}\,](x) = \mathcal{F}^{-1}[\widehat{f}_g](x) + \mathcal{F}^{-1}[\widehat{f}_u](x)$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2\cdot\pi}} \cdot \int_{0}^{\infty} \widehat{f}_g(k)\cdot\cos(k\cdot x)\,dk + \frac{2}{\sqrt{2\cdot\pi}} \cdot \int_{0}^{\infty} (i \cdot \widehat{f}_u(k))\cdot\sin(k\cdot x)\,dk.$$

Mit

$$\widehat{f}_g(k) = \frac{2}{\sqrt{2\cdot\pi}} \cdot \int_0^\infty f_g(x)\cdot\cos(k\cdot x)\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}} \cdot \int_{-\infty}^\infty f_g(x)\cdot\cos(k\cdot x)\,dx$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}} \cdot \int_{-\infty}^\infty (f(x) - \underbrace{f_u(x))\cdot\cos(k\cdot x)}_{\text{ungerade bzgl. } x}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}} \cdot \int_{-\infty}^\infty f(x)\cdot\cos(k\cdot x)\,dx$$

und

$$\widehat{f}_u(k) = \frac{2}{\sqrt{2\cdot\pi}} \cdot \int_0^\infty \frac{1}{i}\cdot f_u(x)\cdot\sin(k\cdot x)\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}} \cdot \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{i}\cdot f_u(x)\cdot\sin(k\cdot x)\,dx$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}} \cdot \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{i}\cdot (f(x) - \underbrace{f_g(x))\cdot\sin(k\cdot x)}_{\text{ungerade bzgl. } x}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}} \cdot \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{i}\cdot f(x)\cdot\sin(k\cdot x)\,dx$$

folgt

$$\begin{aligned}
f(x) = \;& \frac{2}{\sqrt{2\cdot\pi}} \cdot \int_0^\infty \Big(\frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}} \cdot \int_{-\infty}^\infty f(\xi)\cdot\cos(k\cdot\xi)\,d\xi\Big)\cdot\cos(k\cdot x)\,dk \\
&+ \frac{2}{\sqrt{2\cdot\pi}} \cdot \int_0^\infty i\cdot\Big(\frac{1}{i}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}} \cdot \int_{-\infty}^\infty f(\xi)\cdot\sin(k\cdot\xi)\,d\xi\Big)\cdot\sin(k\cdot x)\,dk \\
= \;& \frac{1}{\pi}\cdot\int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty f(\xi)\cdot\Big(\cos(k\cdot\xi)\cdot\cos(k\cdot x) + \sin(k\cdot\xi)\cdot\sin(k\cdot x)\Big)\,d\xi\,dk \\
= \;& \frac{1}{\pi}\cdot\int_0^\infty\Big(\int_{-\infty}^\infty f(\xi)\cdot\cos(k\cdot(x-\xi))\,d\xi\Big)\,dk.
\end{aligned}$$

Aufgabe 30*: (Shannons Abtasttheorem. 10 Bonuspunkte)
Sei $f \in L_1(\mathbb{R})$ und stetig. Die Fourier–Transformierte $\widehat{f} = \mathcal{F}[f]$ sei stückweise glatt und habe einen „beschränkten Träger“: es gelte $\widehat{f}(k) = 0$ für alle Frequenzen k mit $|k| > K_0$. Zeige: für jedes $K \geq K_0$ kann die Funktion f aus den diskreten Werten $f(j\cdot\pi/K)$ mit $j \in \mathbb{Z}$ rekonstruiert werden:

$$f(x) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} f\Big(\frac{j\cdot\pi}{K}\Big)\cdot\frac{\sin(K\cdot x - j\cdot\pi)}{K\cdot x - j\cdot\pi} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Anleitung: Setze die Fourier–Transformierte $2\cdot K$–periodisch fort und stelle $\widehat{f}$ auf $[-K, K]$ durch ihre Fourier–Reihe dar. Die Fourier–Koeffizienten von $\widehat{f}$ ergeben sich aus den Abtastwerten von f. Stelle f durch die Fourier–Rücktransformation von $\widehat{f}$ dar, und setze die Fourier–Reihe von $\widehat{f}$ ein.

Musterlösung:
Die Fourier–Transformierte ist als $\widehat{f}$ stückweise glatt vorausgesetzt und erfüllt also überall Dirichlet–Bedingungen. Die $2 \cdot K$–periodische Fortsetzung wird damit fast überall durch ihre Fourier–Reihe dargestellt:

$$\widehat{f}(k) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \widehat{c}_j \cdot e^{i \cdot j \cdot k \cdot 2 \cdot \pi/(2 \cdot K)}, \quad \widehat{c}_j = \frac{1}{2 \cdot K} \cdot \int_{-K}^{K} \widehat{f}(k) \cdot e^{-i \cdot j \cdot k \cdot 2 \cdot \pi/(2 \cdot K)}\, dk.$$

Da $\widehat{f}$ als stetige Funktion, die nur auf einem endlichen Bereich Werte $\neq 0$ annimmt, in $L_1(\mathbb{R})$ liegt, wird f überall durch die Fourier–Rücktransformation dargestellt:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \int_{-K}^{K} \widehat{f}(k) \cdot e^{i \cdot x \cdot k}\, dk.$$

Vergleich der Formeln für $\widehat{c}_j$ und $f(x)$ liefert:

$$\widehat{c}_j = \frac{\sqrt{2 \cdot \pi}}{2 \cdot K} \cdot f\Big(- j \cdot \frac{\pi}{K}\Big). \qquad (\#)$$

Einsetzen der Fourier–Reihe von $\widehat{f}(k)$ in die Fourier–Rücktransformation liefert

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \int_{-K}^{K} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \widehat{c}_j \cdot e^{i \cdot j \cdot k \cdot 2 \cdot \pi/(2 \cdot K)} \cdot e^{i \cdot x \cdot k}\, dk = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \frac{\widehat{c}_j}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \int_{-K}^{K} e^{i \cdot k \cdot (j \cdot \pi/K + x)}\, dk$$

$$= \sum_{j \in \mathbb{Z}} \frac{\widehat{c}_j}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \frac{e^{i \cdot K \cdot (j \cdot \pi/K + x)} - e^{-i \cdot K \cdot (j \cdot \pi/K + x)}}{i \cdot (j \cdot \pi/K + x)}$$

$$= \sum_{j \in \mathbb{Z}} \frac{\widehat{c}_j}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \frac{2 \cdot \sin(K \cdot (j \cdot \pi/K + x))}{j \cdot \pi/K + x} = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \frac{\widehat{c}_j \cdot 2 \cdot K}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \frac{\sin(j \cdot \pi + K \cdot x)}{j \cdot \pi + x \cdot K}.$$

Mit (#) und der Umsummation $j \to -j$ erhält man die Abtastformel:

$$f(x) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} f\Big(- j \cdot \frac{\pi}{K}\Big) \cdot \frac{\sin(j \cdot \pi + K \cdot x)}{j \cdot \pi + x \cdot K)} \overset{(j \to -j)}{=} \sum_{j \in \mathbb{Z}} f\Big(\frac{j \cdot \pi}{K}\Big) \cdot \frac{\sin(K \cdot x - j \cdot \pi)}{K \cdot x - j \cdot \pi}.$$

Aufgabe 31: (DFT und die periodische Version des Abtasttheorems. 0 Bonuspunkte)

a) Leite die Formel $\displaystyle\sum_{j=-K}^{K} e^{i \cdot j \cdot \alpha} = \frac{\sin((K + 1/2) \cdot \alpha)}{\sin(\alpha/2)}$ her.

b) Zeige die folgende Variante der DFT: Für

$$d_k = \frac{1}{2 \cdot K + 1} \cdot \sum_{j=-K}^{K} f_j \cdot e^{-i \cdot j \cdot k \cdot 2 \cdot \pi/(2 \cdot K + 1)}, \quad k = -K, \ldots, K$$

gilt die Umkehrformel $\quad f_j = \sum_{k=-K}^{K} d_k \cdot e^{i\cdot j\cdot k\cdot 2\cdot\pi/(2\cdot K+1)}, \quad j = -K, \ldots, K.$

Anleitung: vollziehe die Orthogonalitätsargumente in der Herleitung der DFT–Umkehrformel des Skripts nach. Hierbei ist a) hilfreich.

c) Sei f eine stetige L–periodische Funktion, nur endliche viele der Fourier–Koeffizienten von f seien ungleich Null: $c_k = 0$ für alle Frequenzindizes k mit $|k| > K_0$. Wenn f überall durch seine Fourier–Reihe dargestellt wird (also f ein trigonometrisches Polynom ist), so kann f für jedes ganzzahlige $K \geq K_0$ durch $2\cdot K+1$ Werte $f(j\cdot L/(2\cdot K+1))$ mit $j = -K, \ldots, K$ rekonstruiert werden:

$$f(x) = \sum_{j=-K}^{K} f\Big(\frac{j\cdot L}{2\cdot K+1}\Big) \cdot \frac{\sin\Big(x\cdot\pi\cdot\dfrac{2\cdot K+1}{L} - j\cdot\pi\Big)}{(2\cdot K+1)\cdot\sin\Big(x\cdot\dfrac{\pi}{L} - \dfrac{j\cdot\pi}{2\cdot K+1}\Big)}.$$

Anleitung: Unter der Voraussetzung, dass die Fourier–Reihe von f nur endlich viele Terme enthält, wird die Fourier–Entwicklung von f zu der in b) disktuierten DFT: die Fourier–Koeffizienten sind durch die DFT der Abtastwerte $f_j = f(j\cdot L/(2\cdot K+1))$ gegeben. Mit der Hilfsformel aus a) wird die Fourier–Reihe von $f(x)$ zur Abtastformel.

Musterlösung:

a) Mit $y = e^{i\cdot\alpha}$, $y^{-1} = e^{-i\cdot\alpha}$:

$$\sum_{j=-K}^{K} e^{i\cdot j\alpha} = \sum_{j=-K}^{0}(e^{i\cdot\alpha})^j + \sum_{j=0}^{K}(e^{i\cdot\alpha})^j - 1 = \sum_{j=0}^{K}(y^{-1})^j + \sum_{j=0}^{K} y^j - 1$$

$$= \frac{y^{-(K+1)}-1}{y^{-1}-1} + \frac{y^{K+1}-1}{y-1} - 1 = \frac{-(y^{-(K+1)}-1)\cdot y + y^{K+1} - 1}{y-1} - 1$$

$$= \frac{-y^{-(K+1)}\cdot y + y^{K+1}}{y-1} = \frac{-y^{-(K+1)}\cdot y + y^{K+1}}{y^{1/2}\cdot(y^{1/2}-y^{-1/2})} = \frac{-y^{-(K+1/2)} + y^{K+1/2}}{y^{1/2}-y^{-1/2}}$$

$$= \frac{-(e^{i\cdot\alpha})^{-(K+1/2)} + (e^{i\cdot\alpha})^{K+1/2}}{(e^{i\cdot\alpha})^{1/2} - (e^{i\cdot\alpha})^{-1/2}} = \frac{-e^{-i\cdot\alpha\cdot(K+1/2)} + e^{i\cdot\alpha\cdot(K+1/2)}}{e^{i\cdot\alpha/2} - e^{-i\cdot\alpha 2}}$$

$$= \frac{\sin((K+1/2)\cdot\alpha)}{\sin(\alpha/2)}.$$

---

b) Wir gehen zurück, in dem wir von $f_j = \sum_{k=-K}^{K} d_k \cdot e^{i\cdot j\cdot k\cdot 2\cdot\pi/(2\cdot K+1)}$ starten und zeigen, dass $d_k = \frac{1}{2\cdot K+1}\cdot\sum_{j=-K}^{K} f_j\cdot e^{-i\cdot j\cdot k\cdot 2\cdot\pi/(2\cdot K+1)}$ gilt. In der Tat: mit der Hilfsformel aus a) folgt für jedes $k' \in$

$\{-K, \ldots K\}$:

$$\sum_{j=-K}^{K} f_j \cdot e^{-i\cdot j\cdot k'\cdot 2\cdot\pi/(2\cdot K+1)} = \sum_{j=-K}^{K} \sum_{k=-K}^{K} d_k \cdot e^{i\cdot j\cdot k\cdot 2\cdot\pi/(2\cdot K+1)} \cdot e^{-i\cdot j\cdot k'\cdot 2\cdot\pi/(2\cdot K+1)}$$

$$= \sum_{k=-K}^{K} d_k \cdot \sum_{j=-K}^{K} \Big(e^{i\cdot(k'-k)\cdot 2\cdot\pi/(2\cdot K+1)}\Big)^j = \sum_{k=-K}^{K} d_k \cdot \frac{\sin\Big((K+1/2)\cdot(k'-k)\cdot 2\cdot\pi/(2\cdot K+1)\Big)}{\sin\Big((k'-k)\cdot 2\cdot\pi/(2\cdot K+1)/2\Big)}$$

$$= \sum_{k=-K}^{K} d_k \cdot \frac{\sin((k'-k)\cdot\pi)}{\sin((k'-k)\cdot\pi/(2\cdot K+1))} = (2\cdot K+1)\cdot d_{k'}$$

(alle Terme $k \neq k'$ verschwinden). Man erhält also den Zusammenhang zwischen den f_j und den d_k durch:

$$d_{k'} = \frac{1}{2\cdot K+1} \cdot \sum_{j=-K}^{K} f_j \cdot e^{-i\cdot j\cdot k'\cdot 2\cdot\pi/(2\cdot K+1)}.$$

---

c) Nach Voraussetzung soll gelten $f(x) = \sum_{k=-K}^{K} c_k \cdot e^{i\cdot k\cdot 2\cdot\pi\cdot x/L}$. Für $x = j\cdot L/(2\cdot K+1)$ ergibt sich

$$f_j = f\Big(\frac{j\cdot L}{2\cdot K+1}\Big) = \sum_{k=-K}^{K} c_k \cdot e^{i\cdot j\cdot k\cdot 2\cdot\pi/(2\cdot K+1)}.$$

Dies ist die in b) vorgestellte Variante der DFT: die Fourier–Koeffizienten c_k von $f(x)$ sind die diskreten Fourier–Koeffizienten des Datensatzes (f_j) der Länge $2\cdot K+1$, also:

$$c_k = \frac{1}{2\cdot K+1} \cdot \sum_{j=-K}^{K} f_j \cdot e^{-i\cdot j\cdot k\cdot 2\cdot\pi/(2\cdot K+1)}.$$

Damit erhält man letztlich:

$$f(x) = \sum_{k=-K}^{K} c_k \cdot e^{i\cdot k\cdot 2\cdot\pi\cdot x/L} = \sum_{k=-K}^{K} \frac{1}{2\cdot K+1} \cdot \sum_{j=-K}^{K} f_j \cdot e^{-i\cdot j\cdot k\cdot 2\cdot\pi/(2\cdot K+1)} \cdot e^{i\cdot k\cdot 2\cdot\pi\cdot x/L}$$

$$= \sum_{j=-K}^{K} f_j \cdot \frac{1}{2\cdot K+1} \cdot \sum_{k=-K}^{K} e^{i\cdot k\cdot 2\cdot\pi\cdot(x/L - j/(2\cdot K+1))}$$

$$\stackrel{a)}{=} \sum_{j=-K}^{K} f_j \cdot \frac{\sin\Big((K+1/2)\cdot 2\cdot\pi\cdot(x/L - j/(2\cdot K+1))\Big)}{(2\cdot K+1)\cdot\sin\Big(\pi\cdot(x/L - j/(2\cdot K+1))\Big)}$$

$$= \sum_{j=-K}^{K} f_j \cdot \frac{\sin\Big(\pi\cdot x\cdot\dfrac{2\cdot K+1}{L} - j\cdot\pi)\Big)}{(2\cdot K+1)\cdot\sin\Big(x\cdot\dfrac{\pi}{L} - j\cdot\dfrac{\pi}{2\cdot K+1}\Big)}.$$

Aufgabe 32*: (Eine „Unschärferelation“. 10 Bonuspunkte)
Zeige, dass es ausser der Nullfunktion keine stetige Funktion geben kann, die einen „beschränkten Träger“ hat (d.h., es gibt ein $L > 0$, sodass $f(x) = 0 \ \forall x$ mit $|x| > L$) und deren Fourier–Transformierte ebenfalls einen beschränkten Träger hat (also $\mathcal{F}[f](k) = 0 \ \forall k$ mit $|k| > K$ für ein $K > 0$).
Anleitung: die Abtastformel aus Aufgabe 30 wird zu einer endlichen Summe.

Musterlösung:
Betrachte die Abtastformel

$$f(x) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} f\left(\frac{j \cdot \pi}{K}\right) \cdot \frac{\sin(K \cdot x - j \cdot \pi)}{K \cdot x - j \cdot \pi} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

für eine Funktion, deren Fourier–Transformierte einen beschränkten Träger hat. Nimmt man zusätzlich an, dass die Funktion f ebenfalls einen beschränkten Träger hat, so wird aus der Abtastformel eine endliche Summe:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_j f\left(\frac{j \cdot \pi}{K}\right) \cdot \frac{\sin(K \cdot x - j \cdot \pi)}{K \cdot x - j \cdot \pi} \\ &= \sum_j f\left(\frac{j \cdot \pi}{K}\right) \cdot \frac{\sin(K \cdot x) \cdot \overbrace{\cos(j \cdot \pi)}^{=(-1)^j} - \cos(K \cdot x) \cdot \overbrace{\sin(j \cdot \pi)}^{=0}}{K \cdot x - j \cdot \pi} \\ &= \left(\sum_j f\left(\frac{j \cdot \pi}{K}\right) \cdot \frac{(-1)^j}{K \cdot x - j \cdot \pi}\right) \cdot \sin(K \cdot x) \quad \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Die Funktion

$$\sum_j f\left(\frac{j \cdot \pi}{K}\right) \cdot \frac{(-1)^j}{K \cdot x - j \cdot \pi}$$

ist aber eine rationale Funktion in x, die ausserhalb eines Intervalls identisch verschwinden müsste. Widerspruch!