Mathe für Physiker III — Wintersemester 02/03

Walter Oevel — 25. 11. 2002

Übungsblatt 6

Abgabe von $*$ Aufgaben bis zum 2.12.2002, 11^{oo} Uhr, im Zettelkasten auf dem D1.

Aufgabe 23*: (Die DFT als Lösung einer Interpolationsaufgabe. 10 Bonuspunkte)
Gegeben sei die L–periodische Funktion $f(x)$. Durch äquidistantes „Sampling“ im Abstand L/N werden die Werte $f_j = f(x_j)$ an den Punkten $x_j = x_0 + j \cdot L/N$ ($j \in \mathbb{Z}$) gemessen. Betrachte die Fourier–Approximationen

$$S_N(x) = \sum_{k=-N/2}^{N/2-1} d_k \cdot e^{i\cdot k\cdot 2\cdot\pi\cdot(x-x_0)/L}$$

für gerades N bzw.

$$S_N(x) = \sum_{k=-(N-1)/2}^{(N-1)/2} d_k \cdot e^{i\cdot k\cdot 2\cdot\pi\cdot(x-x_0)/L}$$

für ungerades N. Hierbei seien die d_k die diskreten Fourier–Koeffizienten des Datensatzes $(f_0, \ldots, f_{N-1})$, welche mittels $d_{N+k} = d_k$ für alle Frequenzen $k \in \mathbb{Z}$ definiert seien. Zeige, dass die Ausgangsfunktion $f(x)$ in folgendem Sinne von $S_N(x)$ approximiert wird:

$$\boxed{\text{An den Stellen } x_j \text{ gilt } S_N(x_j) = f(x_j).}$$

Anleitung: Schreibe die Summen für S_N in die Form $\sum_{k=0}^{N-1}$ um.

Musterlösung:
Mit $d_{N+k} = d_k$ gilt für **gerades** N:

$$S_N(x) = \sum_{k=-N/2}^{N/2-1} d_k \cdot e^{i\cdot k\cdot 2\cdot\pi\cdot(x-x_0)/L} = \sum_{k=0}^{N/2-1} d_k \cdot e^{i\cdot k\cdot 2\cdot\pi\cdot(x-x_0)/L} + \sum_{k=-N/2}^{-1} d_k \cdot e^{i\cdot k\cdot 2\cdot\pi\cdot(x-x_0)/L}$$

$$\overset{(k'=k+N)}{=} \sum_{k=0}^{N/2-1} d_k \cdot e^{i\cdot k\cdot 2\cdot\pi\cdot(x-x_0)/L} + \sum_{k'=N/2}^{N-1} \underbrace{d_{k'-N}}_{=d_{k'}} \cdot e^{i\cdot(k'-N)\cdot 2\cdot\pi\cdot(x-x_0)/L}$$

$$\overset{(k'=k)}{=} \sum_{k=0}^{N/2-1} d_k \cdot e^{i\cdot k\cdot 2\cdot\pi\cdot(x-x_0)/L} + e^{-i\cdot 2\cdot\pi\cdot N\cdot(x-x_0)/L} \cdot \sum_{k=N/2}^{N-1} d_k \cdot e^{i\cdot k\cdot 2\cdot\pi\cdot(x-x_0)/L}.$$

An den Stellen $x = x_j = x_0 + j \cdot L/N$ ergibt sich

$$S_N(x_j) = \sum_{k=0}^{N/2-1} d_k \cdot e^{i\cdot k\cdot 2\cdot\pi\cdot j/N} + \underbrace{e^{-i\cdot 2\cdot\pi\cdot j}}_{=1} \cdot \sum_{k=N/2}^{N-1} d_k \cdot e^{i\cdot k\cdot 2\cdot\pi\cdot j/N} = \sum_{k=0}^{N-1} d_k \cdot e^{i\cdot j\cdot k\cdot 2\cdot\pi/N}.$$

Dies ist aber genau die Formel der inversen DFT, also $S_N(x_j) = f_j = f(x_j)$.

Für **ungerades** N geht das analog:

$$S_N(x) = \sum_{k=-(N-1)/2}^{(N-1)/2} d_k \cdot e^{i \cdot k \cdot 2 \cdot \pi \cdot (x - x_0)/L} = \sum_{k=0}^{(N-1)/2} d_k \cdot e^{i \cdot k \cdot 2 \cdot \pi \cdot (x - x_0)/L} + \sum_{k=-(N-1)/2}^{-1} d_k \cdot e^{i \cdot k \cdot 2 \cdot \pi \cdot (x - x_0)/L}$$

$$\stackrel{(k'=k+N)}{=} \sum_{k=0}^{(N-1)/2} d_k \cdot e^{i \cdot k \cdot 2 \cdot \pi \cdot (x - x_0)/L} + \sum_{k'=(N-1)/2+1}^{N-1} \underbrace{d_{k'-N}}_{=d_{k'}} \cdot e^{i \cdot (k'-N) \cdot 2 \cdot \pi \cdot (x - x_0)/L}$$

$$\stackrel{(k'=k)}{=} \sum_{k=0}^{(N-1)/2-1} d_k \cdot e^{i \cdot k \cdot 2 \cdot \pi \cdot (x - x_0)/L} + e^{-i \cdot 2 \cdot \pi \cdot N \cdot (x - x_0)/L} \cdot \sum_{k=(N-1)/2+1}^{N-1} d_k \cdot e^{i \cdot k \cdot 2 \cdot \pi \cdot (x - x_0)/L}.$$

An den Stellen $x = x_j = x_0 + j \cdot L/N$ ergibt sich

$$S_N(x_j) = \sum_{k=0}^{(N-1)/2} d_k \cdot e^{i \cdot k \cdot 2 \cdot \pi \cdot j/N} + \underbrace{e^{-i \cdot 2 \cdot \pi \cdot j}}_{=1} \cdot \sum_{k=(N-1)/2+1}^{N-1} d_k \cdot e^{i \cdot k \cdot 2 \cdot \pi \cdot j/N} = \sum_{k=0}^{N-1} d_k \cdot e^{i \cdot j \cdot k \cdot 2 \cdot \pi/N}.$$

Dies ist aber genau die Formel der inversen DFT, also $S_N(x_j) = f_j = f(x_j)$.

Aufgabe 24*: (FFT mit MuPAD. 10 Bonuspunkte)
Lies die Hilfeseite zu MuPADs `numeric::fft`. Betrachte die Funktion

$$f(x) = |x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \cdot \Big(\frac{\cos(x)}{1^2} + \frac{\cos(3 \cdot x)}{3^2} + \frac{\cos(5 \cdot x)}{5^2} + \cdots \Big)$$

auf dem Intervall $[-\pi, \pi]$. Wähle $N = 16$. Lasse MuPAD die diskreten Fourier–Koeffizienten zu $f_j = f(-\pi + j \cdot 2 \cdot \pi/N)$ berechnen. Stelle $f(x)$ und die in Aufgabe 23 betrachtete Approximation $S_N(x)$ in einer gemeinsamen Graphik dar.
Relevante MuPAD–Funktion: `abs, numeric::fft, map, float, Re, plotfunc2d`.
Achtung: $\mathrm{FFT}_{\mathrm{MuPAD}} = N \cdot \mathrm{FFT}_{\mathrm{Skript}}$!
Achtung: Die numerische Auswertung enthält durch Rundungsfehler kleine Imaginärteile. Der Plotter `plotfunc2d` ignoriert nicht-reelle Eingabedaten, d.h., die Imaginärteile müssen vor dem Plotten entfernt werden!

Musterlösung:

```
>> x0:= -PI:                 // Linkes Intervallende
>> L:= 2*PI:                 // Periode
>> f:= x -> abs(x):          // die Funktion auf dem Intervall [x0, x0 + L]
>> N:= 16:                   // Anzahl der Stuetzstellen
>> ff:= [f(x0 + j*L/N) $ j = 0..N-1]: // Sampling
>> d:= numeric::fft(ff):  // DFT der Daten ff
```

Um an Aufgabe 23 anknüpfen zu können, muss die FFT MuPADs auf die FFT des Skripts umgebogen werden:

```
>> d:= map(d, x -> x/N):
```

Die Rekonstruktion nach Aufgabe 23 braucht die diskreten Fourier–Koeffizienten d_k mit Frequenzen k von $-N/2$ bis $N/2-1$. In der MuPAD–Liste d $= [d_0, \ldots, d_{N-1}]$ müssen die negativen Frequenzen k daher per $d_k = d_{N+k}$ addressiert werden. Weiterhin ist zu beachten, dass MuPAD-Listen mit 1 beginnend indiziert werden, also $d_k =$ `d[1 + k]`:

```
>> S:= x -> _plus(d[1 + N + k]*exp(I*k*(x-x0)) $ k=-N/2 .. -1)
          + _plus(d[1 +   k  ]*exp(I*k*(x-x0)) $ k = 0 .. N/2 - 1):
```

Man beachte, dass ein Aufruf von S durch numerische Rundungsfehler kleine Imaginärteile enthält:

```
>> S(0.3)

               0.2605531595 + 1.137599129e-16 I
```

Daher wird nur der Realteil von $S(x)$ an `plotfunc2d` übergeben:

```
>> plotfunc2d(f(x), Re(S(x)), x = -PI..PI, Grid = 200):
```

Aufgabe 25*: (Eine graphische FFT–Spielerei. 10 Bonuspunkte)

Zu Abschnitt 1.3.11 („Digitales Filtern“) des Skripts. Die im Internet erhältliche Datei `DieKleine.txt` enthält ein MuPAD–Array `A = array(1..64, 1..32)` mit reellen Daten, die als Grauwerte eines verrauschten Bildes zu interpretieren sind. Das Bild kann in einer MuPAD–Sitzung mittels

```
>> read("D:\\Dokumente und Einstellungen\\meinPfad\\DieKleine.txt"):
>> plot(plot::matrixplot(A))
```

eingelesen und visualisiert werden (wenn die Datei lokal unter dem angegebenen Pfad gespeichert wurde). Mit `FourierData:= numeric::fft(A)` kann die 2-dimensionale DFT von A durchgeführt werden. Die Filter–Routine

```
>> filter:= proc(eps, FourierData)
   local M,N, i, j;
   begin
     M:= op(FourierData, [0, 2, 2]):
     N:= op(FourierData, [0, 3, 2]):
     for i from 1 to M do
       for j from 1 to N do
         if abs(i/M - 1/2) < eps or abs(j/N - 1/2) < eps then
             FourierData[i,j]:= 0;
         end_if:
```

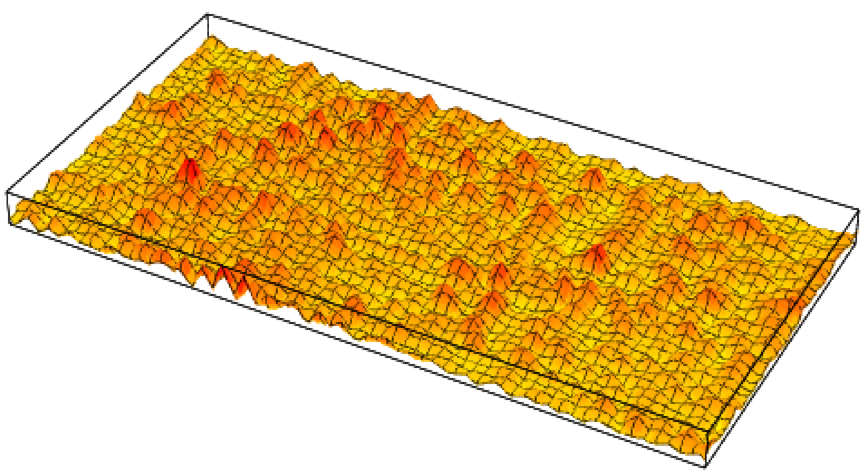
```
    end_for:
  end_for:
  return(FourierData);
end_proc:
```

wird in der Datei `DieKleine.txt` mitgeliefert. Sie entfernt aus einer Datenmatrix alle Daten, die in der „Mitte“ des Datenfeldes sitzen (bei diskreten Fourier–Daten entspricht dies hochfrequenten Anteilen). Finde interaktiv einen Wert des Parameters `eps` $\in (0, 1)$, bei dem das im Bild versteckte „Nutzsignal“ sichtbar wird: es handelt sich um den Namen und den Geburtstag meiner jüngsten Tochter.
Anleitung: die Fourier–Rücktransformation der gefilterten Fourier–Daten ist ein komplexer Datensatz. Man visualiere mittels `plot::matrixplot` den Realteil oder den Absolutbetrag des gefilterten Datensatzes.

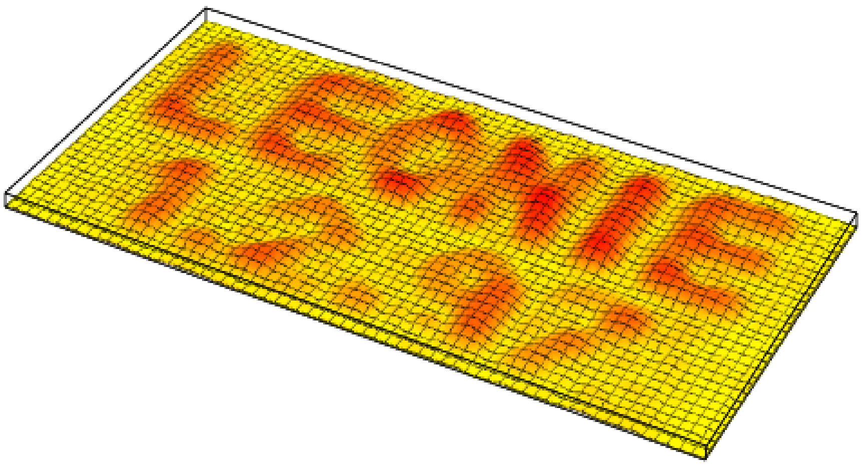
Musterlösung:
Folgende Schleife erzeugt gefilterte Bilder, in denen die Werte `eps` $= 0.1, 0.2, \ldots, 0.9$ etc. ausprobiert werden:

```
>> read("DieKleine.txt"):
>> FourierData:= numeric::fft(A):
>> for eps in [j*0.1 $ j = 1..9] do
     FilteredFourierData:= filter(eps, FourierData):
     FilteredData:= map(numeric::invfft(FilteredFourierData), abs):
     plot(plot::matrixplot(FilteredData)):
   end_for:
```

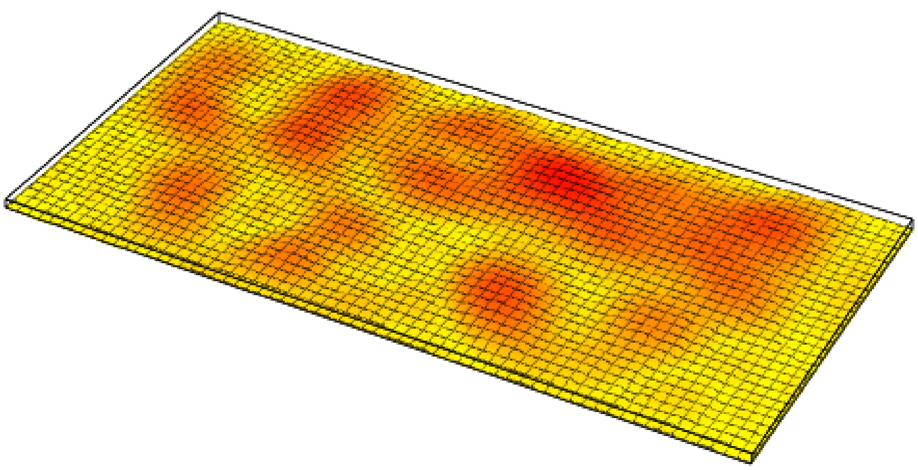
Das beste Ergebnis zeigt sich für `eps` $= 0.3$:



eps = 0.2



eps = 0.3



eps = 0.4

Aufgabe 26*: (Die Wellengleichung. 10 Bonuspunkte)

Betrachte eine schwingende Saite, die an den Punkten $x = 0$ und $x = L$ eingespannt ist. Ihre Auslenkung wird durch $u(x,t)$ beschrieben, wobei $u(0,t) = u(L,t) = 0\ \forall t \in \mathbb{R}$ gilt. Die zeitliche Dynamik wird durch die partielle DGL („Wellengleichung“)

$$\frac{\partial u}{\partial t^2} = c^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

beschrieben, wobei $c > 0$ eine Materialkonstante ist.

a) Setze für die Lösung $u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k(t) \cdot \sin(k \cdot \pi \cdot x/L)$ mit (zeitabhängigen) Fourier–Koeffizienten $b_k(t)$ an. Die Randbedingungen $u(0,t) = u(L,t) = 0$ sind damit automatisch erfüllt. Setze den Fourier–Ansatz in die Wellengleichung ein. Für die einzelnen Fourier–Koeffizienten $b_k(t)$ ergibt sich jeweils eine einfach zu lösende gewöhnliche DGL. Zeige, dass die Wellengleichung durch

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \sum_{k=1}^{\infty} b_k(0) \cdot \cos(c \cdot k \cdot \pi \cdot t/L) \cdot \sin(k \cdot \pi \cdot x/L) \\ &\quad + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{L \cdot \dot{b}_k(0)}{c \cdot k \cdot \pi} \cdot \sin(c \cdot k \cdot \pi \cdot t/L) \cdot \sin(k \cdot \pi \cdot x/L) \end{aligned}$$

mit beliebigen Konstanten $b_k(0)$, $\dot{b}_k(0)$ gelöst wird.

b) Gegeben seien Anfangsbedingungen $u(x,0) = u_0(x)$ und $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \dot{u}_0(x)$ mit $0 \le x \le L$ zum Zeitpunkt $t = 0$. Wie lassen sich die auf dem Intervall $[0, L]$ gegebenen Funktionen $u_0(x)$ und $\dot{u}_0(x)$ in Sinus–Reihen entwickeln? Wie ergibt sich mit a) diejenige Lösung der Wellengleichung, die zum Zeitpunkt $t = 0$ diese Anfangsbedingungen erfüllt?

Von der schwingenden Saite werden periodische Anregungen $\alpha_k \cdot \cos(c \cdot k \cdot \pi \cdot t/L)$ an die umgebende Luft abgegeben, die dann als vom Instrument erzeugte Töne wahrgenommen werden. Die zu $k = 1$ gehörende Schwingung niedrigster Frequenz $c \cdot \pi/L$ heißt „Grundton“, die zu $k > 1$ gehörenden Schwingungen „Obertöne“ oder auch „Harmonische Oberschwingungen“. Der Klang eines Instruments wird durch das Amplitudenverhältnis der Obertöne zum Grundton bestimmt.

c) Zeige: der Klang einer Gitarre ändert sich mit dem Ort $x_0 \in (0, L)$, an dem die Saiten angezupft werden. Betrachte dazu die spezielle Anfangsbedingungen

$$u_0(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{x_0} \cdot U_0 & \text{für } 0 \le x \le x_0, \\ \dfrac{L-x}{L-x_0} \cdot U_0 & \text{für } x_0 \le x \le L \end{cases}$$

und $\dot{u}_0(x) = 0$. Berechne die Fourier–Koeffizienten von $u_0(x)$ in Abhängigkeit von x_0 und stelle die entsprechende Lösung der Wellengleichung über ihre Fourier–Reihe dar. Betrachte für die Fälle $x_0 = L/2$ und $x_0 = L/3$ die Amplitudenverhältnisse von Grundton und Obertönen, die von einem Punkt x der Saite ausgesandt werden.

d) Zeige: bei einer E-Gitarre hängt der Klang weiterhin von der Plazierung der „Pick-Ups“ ab. (Unter den Saiten sind an einer Stelle $x_p \in (0, L)$ kleine Spulen (= pick-ups) angebracht, in denen die schwingende Stahlsaite eine elektrische Spannung $U(t)$ proportional zur Auslenkung $u(x_p, t)$ induziert.) Diskutiere wiederum das Amplitudenverhältnis der Obertöne zum Grundton.

Musterlösung:

a) Für den Fourier–Ansatz werden nur sin–Terme gewählt, da dadurch die Randbedingungen

$$u(0,t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k(t) \cdot \sin(k \cdot 0) = 0, \quad u(L,t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k(t) \cdot \sin(k \cdot \pi) = 0$$

automatisch erfüllt sind. Einsetzen des Fourier–Ansatzes in die Wellengleichung liefert

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\, u(x,t) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \sum_{k=1}^{\infty} b_k(t) \cdot \sin(k \cdot \pi \cdot x/L) = \sum_{k=1}^{\infty} \Big(\frac{d^2}{dt^2}\, b_k(t)\Big) \cdot \sin(k \cdot \pi \cdot x/L)$$

$$= c^2 \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2}\, u(x,t) = c^2 \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2} \sum_{k=1}^{\infty} b_k(t) \cdot \sin(k \cdot \pi \cdot x/L)$$

$$= c^2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} b_k(t) \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2} \sin(k \cdot \pi \cdot x/L) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k(t) \cdot \Big(- \frac{c^2 \cdot k^2 \cdot \pi^2}{L^2}\Big) \cdot \sin(k \cdot \pi \cdot x/L).$$

Vergleich der einzelnen Fourier–Moden in

$$\sum_{k=1}^{\infty} \Big(\frac{d^2}{dt^2}\, b_k(t)\Big) \cdot \sin(k \cdot \pi \cdot x/L) = \sum_{k=1}^{\infty} \Big(- \frac{c^2 \cdot \pi^2 \ \cdot k^2}{L^2} \cdot b_k(t)\Big) \cdot \sin(k \cdot \cdot \pi \cdot x/L)$$

liefert die gewöhnliche DGL

$$\frac{d^2}{dt^2}\, b_k(t) = -c^2 \cdot \frac{\pi^2}{L^2} \cdot k^2 \cdot b_k(t)$$

mit der allgemeinen Lösung

$$b_k(t) = b_k(0) \cdot \cos(c \cdot k \cdot \pi \cdot t/L) + \frac{L \cdot \dot{b}_k(0)}{c \cdot k \cdot \pi} \cdot \sin(c \cdot k \cdot \pi \cdot t/L).$$

Nach Konstruktion erfüllt damit

$$\begin{aligned} u(x,t) \quad &= \quad \sum_{k=1}^{\infty} b_k(0) \cdot \cos(c \cdot k \cdot \pi \cdot t/L) \cdot \sin(k \cdot \pi \cdot x/L) \\ &\quad + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{L \cdot \dot{b}_k(0)}{c \cdot k \cdot \pi} \cdot \sin(c \cdot k \cdot \pi \cdot t/L) \cdot \sin(k \cdot \pi \cdot x/L) \end{aligned}$$

für jede beliebige Wahl der Integrationskonstanten $b_k(0)$, $\dot{b}_k(0)$ die Wellengleichung und die Randbedingungen $u(0,t) = u(L,0) = 0$.

---

b) Setzt man in der obigen Lösungsformel $t = 0$, so ergibt sich

$$u(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k(0) \cdot \sin(k \cdot \pi \cdot x/L), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} \dot{b}_k(0) \cdot \sin(k \cdot \pi \cdot x/L).$$

Damit stellen sich die Integrationskonstanten $b_k(0)$ in der Tat als die Fourier–Koeffizienten von $u(x,0) = u_0(x)$ heraus, während die $\dot{b}_k(0)$ die Fourier–Koeffizienten von $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)$ sind.

Frage: läßt sich jede Funktion $u_0(x)$ mit $x \in [0,L]$ in eine Sinus–Reihe entwickeln (wo bleiben die Cosinus–Terme)? Antwort: Die Sinus–Terme reichen! Setze $u_0(x)$ (definiert auf $[0,L]$) <u>ungerade</u> auf das Interval $[-L,L]$ fort. Die übliche Fourier–Entwicklung auf $[-L,L]$ liefert dann eine <u>Sinus–Reihe</u>. Analog ist die Funktion $\dot{u}(x)$ ungerade auf $[-L,L]$ fortzusetzen und in eine übliche Fourier–Sinus–Reihe auf $[-L,L]$ zu entwickeln.

0) Gegeben $u_0(x)$ und $\dot{u}_0(x)$ mit $x \in [0,L]$.

1) Berechne die Fourier–Koeffizienten von $u_0(x)$ und $\dot{u}_0(x)$ über die Formel für ungerade $2 \cdot L$–periodische Funktionen über dem Intervall $[-L,L]$:

$$b_k(0) = \frac{2}{L} \cdot \int_0^L u_0(x) \cdot \sin(k \cdot \pi \cdot x/L)\, dx, \quad k \in \mathbb{N},$$

$$\dot{b}_k(0) = \frac{2}{L} \cdot \int_0^L \dot{u}_0(x) \cdot \sin(k \cdot \pi \cdot x/L)\, dx, \quad k \in \mathbb{N}.$$

2) Die Lösung der Wellengleichung ist gegeben durch

$$\begin{aligned} u(x,t) \quad &= \quad \sum_{k=1}^{\infty} b_k(0) \cdot \cos(c \cdot k \cdot \pi \cdot t/L) \cdot \sin(k \cdot \pi \cdot x/L) \\ &\quad + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{L \cdot \dot{b}_k(0)}{c \cdot k \cdot \pi} \cdot \sin(c \cdot k \cdot \pi \cdot t/L) \cdot \sin(k \cdot \pi \cdot x/L) \end{aligned}$$

mit den in 1) berechneten Werten $b_k(0)$ und $\dot{b}_k(0)$.

---

c) Wir ziehen die in b) aufgestellten Schritte 1), 2) durch. Die Fourier–Koeffizienten $\dot{b}_k(0)$ von $\dot{u}_0(x) = 0$ sind alle 0. Die Fourier–Koeffizienten $b_k(0)$ von $u_0(x)$ werden mit MuPAD 3.0 ermittelt:

```
>> assume(L_0 > 0):
>> assume(0 < x0 < L0):
>> assume(L > 0):
>> assume(k <> 0):
>> b[k]:= 2/L*int(x/x0*U0*sin(k*PI*x/L), x = 0 .. x0) +
          2/L*int((L-x)/(L-x0)*U0*sin(k*PI*x/L), x = x0 .. L):
>> assume(k, Type::Integer):
>> b[k]:= simplify(b[k])

                       2       / PI k x0 \
                     2 L  U0 sin| ------- |
                               \    L    /
                     ----------------------
                         2  2
                       PI  k  x0 (L - x0)
```

Anmerkung: in MuPAD 2.5 reagiert der Integrierer nicht richtig auf die per `assume` gesetzten Eigenschaften. Ein workaround besteht darin, dem Integrierer durch die Option `Continuous` mitzuteilen, dass er sich nicht um potentielle Unstetigkeiten der Stammfunktion kümmern soll:

```
>> b[k]:= 2/L*int(x/x0*U0*sin(k*PI*x/L), x = 0 .. x0, Continuous) +
          2/L*int((L-x)/(L-x0)*U0*sin(k*PI*x/L), x = x0 .. L, Continuous):
>> assume(k, Type::Integer):
>> b[k]:= simplify(b[k])

                   2        / k PI x0 \
                2 L  U0 sin| ------- |
                            \    L    /
             - ------------------------
                 2   2   2      2   2
               k  PI  x0  - L k  PI  x0
```

Hiermit ergibt sich nach b) die Lösung $u(x,t)$:

$$u(x,t) = \frac{2 \cdot U_0}{\pi^2 \cdot \frac{x_0}{L} \cdot \left(1 - \frac{x_0}{L}\right)} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(k \cdot \pi \cdot x_0/L)}{k^2} \cdot \cos(c \cdot k \cdot \pi \cdot t/L) \cdot \sin(k \cdot \pi \cdot x/L).$$

Sei

$$a_k = \frac{2 \cdot U_0}{\pi^2 \cdot \frac{x_0}{L} \cdot \left(1 - \frac{x_0}{L}\right)} \cdot \frac{\sin(k \cdot \pi \cdot x_0/L)}{k^2} \cdot \sin(k \cdot \pi \cdot x/L)$$

die Amplitude der k-ten Oberschwingung, die vom Ort x ausgesandt wird. Das Amplitudenverhältnis der k-ten Harmonischen zum Grundton ist damit

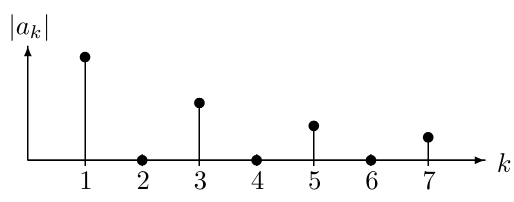
$$\frac{a_k}{a_1} = \frac{1}{k^2} \cdot \frac{\sin(k \cdot \pi \cdot x_0/L)}{\sin(\pi \cdot x_0/L)} \cdot \frac{\sin(k \cdot \pi \cdot x_0/L)}{\sin(\pi \cdot x_0/L)}.$$

<u>Für $x_0 = L/2$:</u>

$$\frac{a_k}{a_1} = \frac{1}{k^2} \cdot \frac{\sin(k \cdot \pi/2)}{\sin(\pi/2)} \cdot \frac{\sin(k \cdot \pi \cdot x/L)}{\sin(\pi \cdot x/L)} = \frac{\sin(k \cdot \pi/2)}{k^2} \cdot \frac{\sin(k \cdot \pi \cdot x/L)}{\sin(\pi \cdot x/L)}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{für gerades } k, \\ \frac{(-1)^n}{k^2} \cdot \frac{\sin(k \cdot \pi \cdot x/L)}{\sin(\pi \cdot x/L)} & \text{für ungerades } k = 2 \cdot n + 1. \end{cases}$$

$x_0 = L/2$:

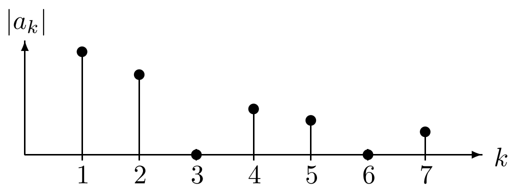


Alle geraden Harmonischen verschwinden!

Für $x_0 = L/3$:

$$\frac{a_k}{a_1} = \frac{1}{k^2} \cdot \frac{\sin(k \cdot \pi/3)}{\sin(\pi/3)} \cdot \frac{\sin(k \cdot \pi \cdot x/L)}{\sin(\pi \cdot x/L)} = \begin{cases} 0 & \text{für } k = 3 \cdot n, n \in \mathbb{N}, \\ \dfrac{(-1)^n}{k^2} \cdot \dfrac{\sin(k \cdot \pi \cdot x/L)}{\sin(\pi \cdot x/L)} & \text{für } k = 3 \cdot n + 1, n \in \mathbb{N}_0, \\ \dfrac{(-1)^n}{k^2} \cdot \dfrac{\sin(k \cdot \pi \cdot x/L)}{\sin(\pi \cdot x/L)} & \text{für } k = 3 \cdot n + 2, n \in \mathbb{N}_0. \end{cases}$$

$x_0 = L/3$:



Jede dritte Harmonische verschwindet!

---

d) Am Punkt $x = x_p$ ist die Auslenkung der Seite

$$u(x_p, t) \sim \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\left(\frac{\sin(k \cdot \pi \cdot x_0/L) \cdot \sin(k \cdot \pi \cdot x_p/L)}{k^2} \right)}_{\text{Amplitude der Zeitschwingung}} \cdot \cos(c \cdot k \cdot \pi \cdot t/L).$$

Die Abhängigkeit des Klangs von x_p ist damit die selbe wie die Abhängigkeit vom „Zupfpunkt“ x_0.
