Übungsblatt 5

Abgabe von $*$ Aufgaben bis zum 25.11.2002, 11^{oo} Uhr, im Zettelkasten auf dem D1.

Aufgabe 19*: (Fourier–Entwicklung von Fourier–Reihen. 10 Bonuspunkte)
(Aus gegebenem Anlass) Eine (glatte) Funktion sei punktweise als Fourier–Reihe gegeben: $f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot e^{i\cdot k\cdot x}$. Zeige, dass die c_k die Fourier–Koeffizienten von f sind.
Anleitung: vertausche hemmungslos Summen und Integrale.

Musterlösung:
Die Fourier–Koeffizienten $\tilde{c}_k$ von f sind gegeben durch

$$\tilde{c}_k = \frac{1}{2\cdot\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot e^{-i\cdot k\cdot x}\, dx = \frac{1}{2\cdot\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \Big(\sum_{k'=-\infty}^{\infty} c_{k'} \cdot e^{i\cdot k'\cdot x} \Big) \cdot e^{-i\cdot k\cdot x}\, dx.$$

Mit der bekannten Orthogonalität von $\{e^{i\cdot k\cdot x}\}_{k\in\mathbb{Z}}$:

$$\tilde{c}_k = \sum_{k'=-\infty}^{\infty} c_{k'} \cdot \frac{1}{2\cdot\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\cdot k'\cdot x} \cdot e^{-i\cdot k\cdot x}\, dx = \sum_{k'=-\infty}^{\infty} c_{k'} \cdot \frac{1}{2\cdot\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\cdot(k'-k)\cdot x}\, dx$$

$$= \sum_{k'=-\infty}^{\infty} c_{k'} \cdot \delta_{kk'} = c_k.$$

Aufgabe 20*: (Zum Gibbsschen Phänomen. 10 Bonuspunkte)
Betrachte das Gibbssche Phänomen für die Fourier–Approximation S_{2n-1} der Sprungfunktion H, die von $H(x) \equiv 0$ für $x < 0$ auf $H(x) \equiv 1$ für $x > 0$ springt. Nach der ersten „Überschwingung“ bei $x = \pi/(2\cdot n)$ (lokales Maximum) folgt eine „Unterschwingung“ bei $x = \pi/n$ (lokales Minimum). Berechne den numerischen Wert von $S_{2n-1}(x)$ an dieser Stelle für grosses n und folgere, dass die Lücke zwischen dem letzten lokalen Maximum der Fourier–Approximationen vor dem Sprung und dem ersten lokalen Minimum nach dem Sprung etwa 90% der Sprunghöhe beträgt.

Musterlösung:
Wir folgen der Diskussion des Abschnitts 1.3.5. des Skripts. Für die Fourier–Reihe S_{2n-1} zu H hatten wir die lokalen Extrema gefunden:

$$S_{2n-1}(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \cdot \sum_{m=0}^{n-1} \frac{\sin((2\cdot m+1)\cdot x)}{2\cdot m+1},$$

$$\frac{d}{dx}\, S_{2\cdot n-1}(x) = \frac{2}{\pi} \cdot \sum_{m=0}^{n-1} \cos((2\cdot m+1)\cdot x) = \ldots = \frac{\sin(2\cdot n\cdot x)}{\pi\cdot\sin(x)} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{j\cdot\pi}{2\cdot n}; \quad j \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}.$$

Die zweite positive Nullstelle ξ der Ableitung (das gesuchte Minimum) ist durch $j = 2$ gegeben, also $\xi = \pi/n$. Der Wert von $S_{2\cdot n-1}$ an dieser Stelle ist

$$S_{2\cdot n-1}(\xi) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \cdot \sum_{m=0}^{n-1} \frac{\sin((2\cdot m+1)\cdot \frac{\pi}{n})}{2\cdot m+1}.$$

Die Summe läßt sich analog zur Diskussion im Skript interpretieren. Betrachte dazu das Integral

$$\frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\cdot\pi} \frac{\sin(y)}{y}\, dy \approx 0.4514.. \,.$$

```
>> numeric::int(1/PI*sin(y)/y, y = 0..2*PI)

                      0.4514116668
```

Zerlege das Integrationsintervall $[0, 2\cdot\pi]$ durch die n Stützstellen $y_m = \frac{(2\cdot m+1)\cdot\pi}{n}$, $(m = 0, \ldots, n-1)$ in äquidistante Intervalle der Länge $2\cdot\pi/n$. Für $n \to \infty$ konvergieren die Riemann–Summen gegen das Integral:

$$\frac{2}{\pi}\cdot\sum_{m=0}^{n-1} \frac{\sin(\frac{(2\cdot m+1)\cdot\pi}{n})}{2\cdot m+1} = \frac{1}{\pi}\cdot\sum_{m=0}^{n-1} \frac{\sin(\frac{(2\cdot m+1)\cdot\pi}{n})}{\frac{(2\cdot m+1)\cdot\pi}{n}}\cdot\frac{2\cdot\pi}{n} = \frac{1}{\pi}\cdot\sum_{m=0}^{n-1} \frac{\sin(y_m)}{y_m}\cdot\frac{2\cdot\pi}{n} \overset{(n\to\infty)}{\longrightarrow} \frac{1}{\pi}\cdot\int_0^{2\cdot\pi} \frac{\sin(y)}{y}\, dy.$$

Die Höhe des ersten positiven Minimums der Fourier–Approximation konvergiert damit für $n \to \infty$:

$$S_{2\cdot n-1}(\xi) \approx \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\cdot\pi} \frac{\sin(y)}{y}\, dy \approx \frac{1}{2} + 0.4514.. \approx 0.9514... \,.$$

Das letzte Maximum vor dem Sprung ergibt sich bei $x = -\xi$, aus Symmetriegründen hat man

$$S_{2\cdot n-1}(-\xi) \approx \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\cdot\pi} \frac{\sin(y)}{y}\, dy \approx \frac{1}{2} - 0.4514.. \approx 0.0486 \,.$$

Das ergibt folgende Differenz zwischen dem letzten Maximum und dem ersten Minimum:

$$S_{2\cdot n-1}(\xi) - S_{2\cdot n-1}(-\xi) \approx \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{2\cdot\pi} \frac{\sin(y)}{y}\, dy \approx 0.9028... \quad (\approx 90\% \text{ der Sprunghöhe}).$$

Aufgabe 21*: (10 Bonuspunkte)

a) Zeige: $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

b) Identifiziere den Reihenwert $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2}$.

Anleitung zu a) und b): Betrachte die Fourier–Entwicklung von $f(x) = |x|\cdot(\pi - |x|)$ $(|x| \le \pi)$ und werte an geeigneten Punkten aus.

Musterlösung:
Die Funktion ist ungerade, die Fourier–Koeffizienten

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^\pi f(x)\, dx = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^\pi x \cdot (\pi - x)\, dx,$$

$$a_k = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^\pi f(x) \cdot \cos(k \cdot x)\, dx = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^\pi x \cdot (\pi - x) \cdot \cos(k \cdot x)\, dx \quad (k > 0)$$

ergeben sich mit MuPAD zu:

```
>> a[0]:= 1/PI*int(x*(PI - x), x = 0..PI)

                                  2
                                PI
                                ---
                                 6

>> assume(k <> 0):
>> a[k]:= 2/PI*int(x*(PI - x)*cos(k*x), x = 0..PI);

              / 2 sin(k PI) - k PI cos(k PI)   PI \
            2 | ---------------------------- - -- |
              |              3                  2 |
              \             k                  k  /
            ---------------------------------------
                                 PI

>> assume(k, Type::Integer):
>> simplify(a[k]):
                                           k
                    2 (- k PI - k PI (-1) )
                    -----------------------
                               3
                              k  PI
>> factor(%);

                               k
                       (-2) ((-1)  + 1)
                       ----------------
                               2
                              k
```

Für ungerades k verschwinden diese Koeffizienten. Ergebnis:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\pi^2}{6} - 4 \cdot \Big(\frac{\cos(2 \cdot x)}{2^2} + \frac{\cos(4 \cdot x)}{4^2} + \frac{\cos(6 \cdot x)}{6^2} + \cdots \Big) \\ &= \frac{\pi^2}{6} - \Big(\frac{\cos(2 \cdot x)}{1^2} + \frac{\cos(4 \cdot x)}{2^2} + \frac{\cos(6 \cdot x)}{3^2} + \cdots \Big). \end{aligned}$$

Da die Funktion stetig und überall beidseitig differenzierbar ist, stellt nach dem Dirichlet–Kriterium die Fourier–Reihe die Funktion an jedem Punkt dar. Für $x = 0$ folgt:

$$\frac{\pi^2}{6} - \Big(\frac{\cos(2\cdot 0)}{1^2} + \frac{\cos(4\cdot 0)}{2^2} + \frac{\cos(6\cdot 0)}{3^2} + \cdots\Big) = \boxed{\frac{\pi^2}{6} - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = 0} = f(0).$$

Für $x = \frac{\pi}{2}$ folgt weiterhin

$$f\Big(\frac{\pi}{2}\Big) = \frac{\pi}{2}\cdot\Big(\pi - \frac{\pi}{2}\Big) = \frac{\pi^2}{4}$$

$$= \frac{\pi^2}{6} - \Big(\frac{\cos(\pi)}{1^2} + \frac{\cos(2\cdot\pi)}{2^2} + \frac{\cos(3\cdot\pi)}{3^2} + \cdots\Big) = \frac{\pi^2}{6} - \Big(-\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} \pm \cdots\Big)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi^2}{6} = \boxed{\frac{\pi^2}{12} = \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} \mp \cdots = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k^2}.}$$

Aufgabe 22*: (Die Wärmeleitgleichung. 10 Bonuspunkte)

Betrachte die Temperaturverteilung $U(X,t)$ eines Stabes, der sich von $X = 0$ bis $X = L$ erstreckt. Zum Zeitpunkt $t = 0$ habe er die vorgegebene Temperaturverteilung $U(X,0) = U_0(X)$. Die Enden des Stabes werden auf den konstanten Temperaturen $U(0,t) = T_0$ und $U(L,t) = T_1$ gehalten. Die zeitliche Dynamik der Temperaturverteilung wird durch die partielle DGL (“Wärmeleitgleichung”, “Fouriersches Gesetz”)

$$\frac{\partial}{\partial t}\, U(X,t) = c\cdot\frac{\partial^2}{\partial X^2}\, U(X,t)$$

beschrieben, wo $c > 0$ die (konstante) “Wärmeleitfähigkeit” des Materials ist, aus dem der Stab besteht.

a) Finde alle “stationären” (zeitunabhängigen) Lösungen der Wärmeleitgleichung.

b) (Transformation auf homogene Randbedingungen)
Setze $u(x,t) = U(X,t) - T_0 - (T_1 - T_0)\cdot\frac{X}{L}$ mit $x = \frac{\pi\cdot X}{L}$. Zeige, dass $u(x,t)$ die DGL

$$\frac{\partial}{\partial t}\, u(x,t) = \frac{c\cdot\pi^2}{L^2}\cdot\frac{\partial^2}{\partial x^2}\, u(x,t) \qquad (\#)$$

und die “homogenen” Randbedingungen

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0$$

für alle Zeiten t erfüllt.

c) Setze für die Lösung $u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k(t) \cdot \sin(k \cdot x)$ mit (zeitabhängigen) Fourier–Koeffizienten $b_k(t)$ an. Die Randbedingungen $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$ sind damit automatisch erfüllt. Setze den Fourier–Ansatz in die Wärmeleitgleichung (#) ein. Für die einzelnen Fourier–Koeffizienten $b_k(t)$ ergibt sich jeweils eine einfach zu lösende gewöhnliche DGL. Zeige, dass die Wärmeleitgleichung durch

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k(0) \cdot e^{-c \cdot \pi^2 \cdot k^2 \cdot t / L^2} \cdot \sin(k \cdot x)$$

mit beliebigen Konstanten $b_k(0)$ gelöst wird. Warum sollte hierbei nur $t \geq 0$ betrachtet werden? (Beachte das Abklingverhalten der Fourier–Koeffizienten zu einem gegebenen Zeitpunkt t.)

d) Gegeben sei eine Anfangsbedingung $u(x,0) = u_0(x)$ mit $0 < x < \pi$ zum Zeitpunkt $t = 0$. Wie läßt sich jede auf dem Intervall $(0,\pi)$ gegebene Funktion $u_0(x)$ in eine Sinus–Reihe entwickeln? Wie ergibt sich mit c) diejenige Lösung der Wärmeleitgleichung (für $t \geq 0$), die zum Zeitpunkt $t = 0$ die Anfangsbedingung $u(x,0) = u_0(x)$ erfüllt?

e) Betrachte $L = 1$, die Randtemperaturen $T_0 = 1$, $T_1 = 2$ und die Anfangsbedingung

$$U(X,0) = 1 + 15 \cdot \frac{X}{L} - 14 \cdot \left(\frac{X}{L}\right)^2, \quad 0 \leq X \leq L.$$

Sei $c = L^2/10$. Berechne mit MuPAD die Fourier–Koeffizienten der $U(X,0)$ entsprechenden Anfangsbedingung $u(x,0)$. Baue daraus mittels c) die Fourier–Entwicklung der Lösung $u(x,t)$ bzw. $U(X,t)$ zu Zeitpunkten $t \geq 0$ auf.
i) Berechne eine numerische Approximation von $U(\frac{L}{2}, 3.7)$.
ii) Plotte $U(X,t)$ für $t = 0, 1, 2, 4, 8$ in einer gemeinsamen Graphik.
Relevante MuPAD–Funktionen: `assume, int, sin, exp, _plus, plotfunc2d`.

Musterlösung:
a) Mit $\frac{\partial}{\partial t}\, U(X,t) = 0$ wird die Wärmeleitgleichung zur gewöhnlichen DGL $\frac{d^2U}{dX^2} = 0$ mit der allgemeinen Lösung $U(X) = a + b \cdot X$. Anpassen an die Randbedingungen $U(0) = T_0$ und $U(L) = T_1$ liefert $a = T_0$ und $b = (T_1 - T_0)/L$, d.h., die stationäre Lösung der Wärmeleitgleichung zu den Randbedingungen $U(0) = T_0$, $U(L) = T_1$ ist:

$$U(X) = T_0 + (T_1 - T_0) \cdot \frac{X}{L}.$$

---

b) Per Kettenregel der Differentiation folgt mit $X = X(x) = \frac{L \cdot x}{\pi}$:

$$\frac{\partial}{\partial x}\, u(x,t) = \frac{\partial}{\partial x} \left(U(X(x),t) - T_0 - (T_1 - T_0) \cdot \frac{X(x)}{L} \right)$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial X} \left(U(X,t) - T_0 - (T_1 - T_0) \cdot \frac{X}{L} \right) \right) \cdot \frac{\partial X}{\partial x} = \frac{L}{\pi} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial X}\, U(X,t) - \frac{T_1 - T_0}{L} \right)$$

und analog

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\, u(x,t) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{L}{\pi}\cdot\frac{\partial}{\partial X}\, U(X,t) - \frac{T_1 - T_0}{L}\right)$$

$$= \frac{L^2}{\pi^2}\cdot\frac{\partial}{\partial X}\left(\frac{\partial}{\partial X}\, U(X,t) - \frac{T_1 - T_0}{L}\right) = \frac{L^2}{\pi^2}\cdot\frac{\partial^2}{\partial X^2}\, U(X,t).$$

Mit $\frac{\partial}{\partial t}\, u(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}\, U(X,t)$ ergibt sich

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\, u(x,t)} = \frac{\partial}{\partial t}\, U(X,t) = c\cdot\frac{\partial^2}{\partial X^2}\, U(X,t) = \boxed{\frac{c\cdot\pi^2}{L^2}\cdot\frac{\partial^2}{\partial x^2}\, u(x,t).}$$

Randbedingungen: Aus $U(0,t) = T_0$ folgt

$$u(0,t) = \left(U(X,t) - T_0 - (T_1 - T_0)\cdot\frac{X}{L}\right)_{|X=0} = U(0,t) - T_0 = 0.$$

Aus $U(L,t) = T_1$ folgt mit $X(x)_{|x=\pi} = L$:

$$u(\pi,t) = \left(U(X,t) - T_0 - (T_1 - T_0)\cdot\frac{X}{L}\right)_{|X=L} = U(L,t) - T_1 = 0.$$

---

c) Für den Fourier–Ansatz werden nur sin–Terme gewählt, da dadurch die Randbedingungen

$$u(0,t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k(t)\cdot\sin(k\cdot 0) = 0, \quad u(\pi,t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k(t)\cdot\sin(k\cdot\pi) = 0$$

automatisch erfüllt sind. Einsetzen des Fourier–Ansatzes in die Wärmeleitgleichung liefert

$$\frac{\partial}{\partial t}\, u(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}\sum_{k=1}^{\infty} b_k(t)\cdot\sin(k\cdot x) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{d}{dt}\, b_k(t)\right)\cdot\sin(k\cdot x)$$

$$= \frac{c\cdot\pi^2}{L^2}\cdot\frac{\partial^2}{\partial x^2}\, u(x,t) = \frac{c\cdot\pi^2}{L^2}\cdot\frac{\partial^2}{\partial x^2}\sum_{k=1}^{\infty} b_k(t)\cdot\sin(k\cdot x)$$

$$= \frac{c\cdot\pi^2}{L^2}\cdot\sum_{k=1}^{\infty} b_k(t)\cdot\frac{\partial^2}{\partial x^2}\sin(k\cdot x) = \frac{c\cdot\pi^2}{L^2}\cdot\sum_{k=1}^{\infty} b_k(t)\cdot(-k^2)\cdot\sin(k\cdot x).$$

Vergleich der einzelnen Fourier–Moden in

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{d}{dt}\, b_k(t)\right)\cdot\sin(k\cdot x) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(-\frac{c\cdot\pi^2\ \cdot k^2}{L^2}\cdot b_k(t)\right)\cdot\sin(k\cdot x)$$

liefert die gewöhnliche DGL

$$\frac{d}{dt}\, b_k(t) = -c\cdot\frac{\pi^2}{L^2}\cdot k^2\cdot b_k(t)$$

mit der allgemeinen Lösung

$$b_k(t) = b_k(0)\cdot e^{-\ c\cdot\pi^2\cdot k^2\cdot t/L^2}.$$

Nach Konstruktion erfüllt damit

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k(0) \cdot e^{-c\cdot\pi^2\cdot k^2\cdot t/L^2} \cdot \sin(k\cdot x)$$

für jede beliebige Wahl der Integrationskonstanten $b_k(0)$ die Wärmeleitgleichung und die Randbedingungen $u(0,t) = u(\pi,0) = 0$.

Beachte, dass die Fourier–Reihe der Lösung für $t > 0$ mit Sicherheit und sehr schnell konvergiert, da die Fourier–Koeffizienten

$$b_k(t) = b_k(0) \cdot e^{-c\cdot\pi^2\cdot k^2\cdot t/L^2}$$

exponentiell schnell in k abfallen (beachte $c > 0$, $t > 0$). Für $t < 0$ wird man in der Regel auf Konvergenzschwierigkeiten stoßen, da die obige Fourier–Reihe nur dann konvergiert, wenn die $b_k(0)$ so schnell in k abfallen, dass das exponentielle Wachstum der Faktoren $e^{-c\cdot\pi^2\cdot k^2\cdot t/L^2}$ für $t < 0$ aufgefangen wird. Also: wir betrachten nur noch $t \geq 0$.

---

d) Setzt man in der obigen Lösungsformel $t = 0$, so ergibt sich

$$u(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k(0) \cdot e^{-c\cdot\pi^2\cdot k^2\cdot 0/L^2} \cdot \sin(k\cdot x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k(0) \cdot \sin(k\cdot x).$$

Damit stellen sich die Integrationskonstanten $b_k(0)$ in der Tat als die Fourier–Koeffizienten von $u(x,0) = u_0(x)$ heraus.

Frage: läßt sich jede Funktion $u_0(x)$ mit $x \in (0,\pi)$ in eine Sinus–Reihe entwickeln (wo bleiben die Cosinus–Terme)? Antwort: Die Sinus–Terme reichen! Setze $u_0(x)$ (definiert auf $(0,\pi)$) <u>ungerade</u> auf das Interval $[-\pi,\pi]$ fort. Die übliche Fourier–Entwicklung auf $[-\pi,\pi]$ liefert dann eine <u>Sinus–Reihe</u>. Also:

0) Gegeben $u_0(x)$ mit $x \in (0,\pi)$.

1) Berechne die Fourier–Koeffizienten von $u_0(x)$ über die Formel für ungerade Funktionen:

$$b_k(0) = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} u_0(x) \cdot \sin(k\cdot x)\, dx, \quad k \in \mathbb{N}.$$

2) Die Lösung der Wärmeleitgleichung ist gegeben durch

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k(0) \cdot e^{-c\cdot\pi^2\cdot k^2\cdot t/L^2} \cdot \sin(k\cdot x)$$

mit den in 1) berechneten Werten $b_k(0)$.

---

e) Wir rechnen die physikalischen Vorgaben $U(X,0)$ auf $u(x,0) = U(X,0) - T_0 - (T_1 - T_0) \cdot \frac{X}{L} = U(X,0) - 1 - \frac{X}{L}$ um (beachte $\frac{X}{L} = \frac{x}{\pi}$):

$$u(x,0) = 1 + 15 \cdot \frac{X}{L} - 14 \cdot \left(\frac{X}{L}\right)^2 - 1 - \frac{X}{L} = 14 \cdot \frac{X\cdot(L-X)}{L^2} = 14 \cdot \frac{x\cdot(\pi-x)}{\pi^2}.$$

Wir ziehen die in d) aufgestellten Schritte 1), 2) mittels MuPAD durch. Zunächst werden die Fourier–Koeffizienten der Anfangsbedingung symbolisch ermittelt:

```
>> assume(k <> 0):
>> b[k]:= 2/PI*int( 14*x*(PI - x)/PI^2*sin(k*x), x = 0..PI);
>> assume(k, Type::Integer):
>> b[k]:= simplify(b[k])
                                   k
                     2 (28 (-1)  - 28)
                   - -----------------
                              3  3
                            PI   k
```

Hiermit ergibt sich nach c) die Lösung $u(x,t)$ bzw. $U(X,t)$, die hier mittels $n = 20$ mit 10 Sinus-Termen approximiert wird (die Koeffizienten mit geradem k sind 0):

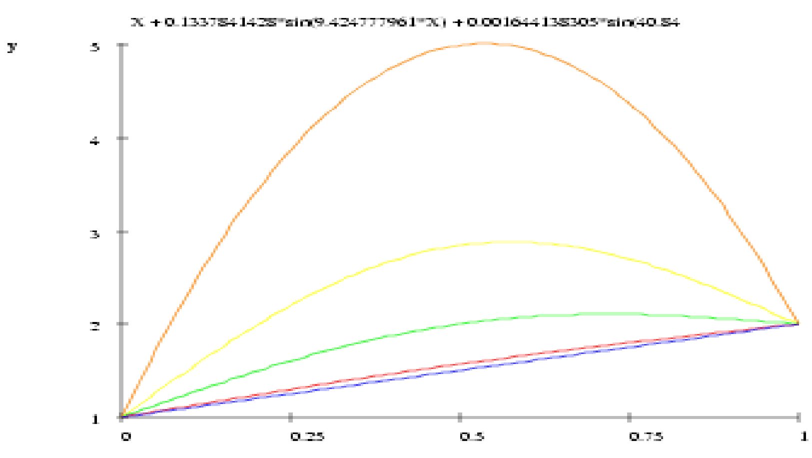
```
>> T0:= 1: T1:= 2: L:= 1: c:= L^2/10:
>> b:= k -> 56*(1 - (-1)^k)/PI^3/k^3:
>> n:= 20:
>> u:= (x, t) -> float(_plus(b(k)*exp(-c*PI^2/L^2*k^2*t)*sin(k*x) $ k = 1..n)):
>> U:= (X, t) -> u(X/L*PI, t) + T0 + (T1 - T0)*X/L:
```

Eine numerische Approximation der Temperatur in der Stabmitte für $t = 3.7$:

```
>> U(L/2, 3.7);
                          1.59371993
```

Hier die Graphik der Lösung zu verschiedenen Zeiten:

```
>> plotfunc2d(U(X, 0), U(X, 1), U(X, 2), U(X, 4), U(X, 8), X = 0..L)
```



Nach kurzer Zeit hat sich die Temperatur "gleichmäßig" verteilt. Genauer: sie hat sich der stationären Lösung angenähert, die linear von $U(0,t) = 1$ auf $U(L,t) = 2$ ansteigt ($t \gg 0$).