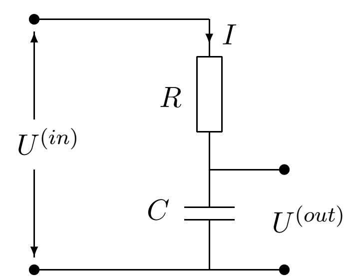
MATHE FÜR PHYSIKER III — Wintersemester 02/03
WALTER OEVEL — 11. 11. 2002

Ü b u n g s b l a t t 4

Abgabe von $*$ Aufgaben am 18.11.2002 in der Übung.

Aufgabe 18*: (Eine Anwendung. 10 + 10 + 10 + 10 Bonuspunkte)
In dieser Aufgabe soll eine Differentialgleichung mit periodischer Inhomogenität auf 2 Weisen gelöst werden: i) "analytisch", ii) über Fourier–Entwicklung. In iii) soll verifiziert werden, dass die Lösungen in der Tat übereinstimmen. In iv) wird eine konkrete Inhomogenität betrachtet.

Technischer Hintergrund:
Gegeben sei ein sogenanntes "RC-Glied", das aus einem Ohmschen Widerstand R und einem Kondensator der Kapazität C besteht. Es wird eine periodische Eingangsspannung $U^{(in)}(t)$ angelegt, man interessiert sich für die Ausgangsspannung $U^{(out)}(t)$ am Kondensator. Es gilt $U^{(in)} = R\cdot I + U^{(out)}$, wobei die Stromstärke I über $I = \dot{Q} = C \cdot \dot{U}^{(out)}$ mit der Ladung $Q = C \cdot U$ des Kondensators zusammenhängt. Damit ist das Ausgangssignal gegeben als Lösung der Differentialgleichung



$$\tau \cdot \dot{U}^{(out)} + U^{(out)} = U^{(in)} \quad (\text{mit } \tau = R \cdot C).$$

i.a) (Vollständige analytische Lösung) Zeige, dass die Ausgangsspannung durch

$$U^{(out)}(t) = U^{(out)}(0) \cdot e^{-t/\tau} + \frac{e^{-t/\tau}}{\tau} \cdot \int_0^t e^{\xi/\tau} \cdot U^{(in)}(\xi)\, d\xi$$

gegeben ist. Anleitung: Variation der Konstanten.

i.b) Das Eingangssignal $U^{(in)}(t)$ sei $2 \cdot \pi$–periodisch. Die in a) gefundene Lösung $U^{(out)}$ besteht aus einem exponentiell abklingenden Anteil $U^{(out)}_{transient}(t)$ (mit $\lim\limits_{t\to\infty} U^{(out)}_{transient}(t) = 0$) und einem periodischen Anteil $U^{(out)}_{periodic}(t)$. Versuche, die in a) gefundene Darstellung entsprechend zu zerlegen. Die Antwort ist:

$$\begin{aligned} U^{(out)}(N\cdot 2\cdot\pi + \Delta t) = \;& \overbrace{e^{-(N\cdot 2\cdot\pi+\Delta t)/\tau}\cdot (U^{(out)}(0) - U_0)}^{U^{(out)}_{transient}} \\ & \underbrace{+\, e^{-\Delta t/\tau}\cdot \left(U_0 + \frac{1}{\tau}\cdot \int_0^{\Delta t} e^{\eta/\tau}\cdot U^{(in)}(\eta)\, d\eta\right)}_{U^{(out)}_{periodic}} \end{aligned}$$

mit $N \in \mathbb{N}_0$, $\Delta t \in [0, 2\cdot\pi)$ und

$$U_0 = \frac{1}{e^{2\cdot\pi/\tau} - 1} \cdot \frac{1}{\tau} \cdot \int_0^{2\cdot\pi} e^{\eta/\tau} \cdot U^{(in)}(\eta)\, d\eta.$$

Anleitung: Zerlege die Zeit t nach Perioden von $2\cdot\pi$, also $t = N\cdot 2\cdot\pi + \Delta t$ mit $N \in \mathbb{N}_0$ und $\Delta t \in [0, 2\cdot\pi)$. Zerlege das Integral in der Lösungsformel in a) in eine Summe von Teilintegralen über jeweils eine Periode $[k\cdot 2\cdot\pi, (k+1)\cdot 2\cdot\pi)$ (mit $k \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$) und ein Restintegral der Länge Δt. Der explizit von der Periodennummer N abhängende Teil der Lösung konvergiert gegen 0. Der restliche Anteil hängt nicht von N ab und ist damit periodisch.

ii) (Lösung über Fourier–Entwicklung) Zeige: für ein Fourier–entwickeltes Eingangssignal

$$U^{(in)}(t) = a_0^{(in)} + \sum_{k=1}^{\infty} \Big(a_k^{(in)} \cdot \cos(k\cdot t) + b_k^{(in)} \cdot \sin(k\cdot t) \Big)$$

ergibt sich die Fourier–Entwicklung des periodischen Anteils des Ausgangssignals zu

$$U_{periodic}^{(out)}(t) = a_0^{(out)} + \sum_{k=1}^{\infty} \Big(a_k^{(out)} \cdot \cos(k\cdot t) + b_k^{(out)} \cdot \sin(k\cdot t) \Big)$$

mit

$$a_0^{(out)} = a_0^{(in)}, \quad a_k^{(out)} = \frac{a_k^{(in)} - k\cdot\tau\cdot b_k^{(in)}}{1 + k^2\cdot\tau^2}, \quad b_k^{(out)} = \frac{b_k^{(in)} + k\cdot\tau\cdot a_k^{(in)}}{1 + k^2\cdot\tau^2} \quad (k > 0).$$

Anleitung: Rechentechnisch ist es einfacher, die “komplexen” Entwicklungen

$$U^{(in)}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k^{(in)} \cdot e^{i\cdot k\cdot t}, \quad U^{(out)}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k^{(out)} \cdot e^{i\cdot k\cdot t}$$

zu betrachten. Es ergibt sich: $c_k^{(out)} = \dfrac{c_k^{(in)}}{1 + i\cdot k\cdot\tau}$, $k \in \mathbb{Z}$.

iii) (Vergleich der analytischen Lösung mit der per Fourier–Entwicklung gefundenen Lösung) In i.b) war die Darstellung

$$U_{periodic}^{(out)}(N\cdot 2\cdot\pi + \Delta t) = e^{-\Delta t/\tau} \cdot \Big(U_0 + \frac{1}{\tau} \cdot \int_0^{\Delta t} e^{\eta/\tau} \cdot U^{(in)}(\eta)\, d\eta \Big)$$

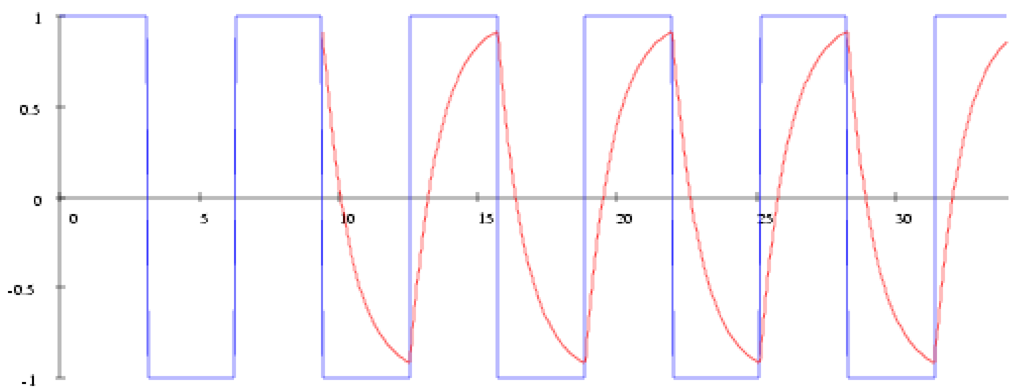
des periodischen Lösungsanteils gefunden worden. Setze die Fourier–Entwicklung des Eingangssignals ein und verifiziere, dass sich die in ii) gefundene Fourier–Entwicklung von $U^{(out)}$ ergibt.

iv) (Ein konkretes Beispiel). Als Eingangssignal wird eine periodische Rechteckschwingung der Grundform

$$U^{(in)}(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } t \in [0, \pi), \\ -1 & \text{für } t \in [\pi, 2 \cdot \pi) \end{cases}$$

angelegt. Berechne das Ausgangssignal nach langer Zeit.

Hier ist die graphische Antwort zu iv) (mit $\tau = 1$):



Musterlösung:
i.a) Die Lösung der homogenen DGL $\tau \cdot \dot{U}^{(out)} + U^{(out)} = 0$ ist offensichtlich $U^{(out)}(t) = c \cdot e^{-t/\tau}$ mit einer beliebigen Konstanten c. Durch Variation der Konstanten, also durch den Ansatz $U^{(out)}(t) = c(t) \cdot e^{-t/\tau}$, erhält man für die inhomogene DGL:

$$\tau \cdot \dot{U}^{(out)}(t) + U^{(out)}(t) = \tau \cdot \dot{c}(t) \cdot e^{-t/\tau} - c(t) \cdot e^{-t/\tau} + c(t) \cdot e^{-t/\tau} = U^{(in)}(t)$$

$$\Rightarrow \quad \dot{c}(t) = \frac{e^{t/\tau}}{\tau} \cdot U^{(in)}(t).$$

Durch Integration folgt

$$c(t) = c(0) + \frac{1}{\tau} \cdot \int_0^t e^{\xi/\tau} \cdot U^{(in)}(\xi)\, d\xi$$

und damit

$$U^{(out)}(t) = \Big(c(0) + \int_0^t e^{\xi/\tau} \cdot U^{(in)}(\xi)\, d\xi \Big) \cdot \frac{e^{-t/\tau}}{\tau}.$$

Für $t = 0$ findet man $U^{(out)}(0) = c_0$, also:

$$U^{(out)}(t) = U^{(out)}(0) \cdot e^{-t/\tau} + \frac{e^{-t/\tau}}{\tau} \cdot \int_0^t e^{\xi/\tau} \cdot U^{(in)}(\xi)\, d\xi.$$

i.b) Das Aufspalten der Lösung geschieht der Anleitung folgend in vielen kleinen Schritten, wobei die Substitutionen $\xi \to \eta = \xi - k \cdot 2 \cdot \pi$, $\xi \to \eta = \xi - N \cdot 2 \cdot \pi$ und $t - N \cdot 2 \cdot \pi = \Delta t$ benutzt werden:

$$U^{(out)}(t) = U^{(out)}(N \cdot 2 \cdot \pi + \Delta t) = U^{(out)}(0) \cdot e^{-t/\tau} + \frac{e^{-t/\tau}}{\tau} \cdot \int_0^t e^{\xi/\tau} \cdot U^{(in)}(\xi)\, d\xi$$

$$= U^{(out)}(0) \cdot e^{-t/\tau} + \frac{e^{-t/\tau}}{\tau} \cdot \sum_{k=0}^{N-1} \int_{k\cdot 2\cdot\pi}^{(k+1)\cdot 2\cdot\pi} e^{\xi/\tau} \cdot U^{(in)}(\xi)\, d\xi + \frac{e^{-t/\tau}}{\tau} \cdot \int_{N\cdot 2\cdot\pi}^{N\cdot 2\cdot\pi+\Delta t} e^{\xi/\tau} \cdot U^{(in)}(\xi)\, d\xi$$

$$= U^{(out)}(0) \cdot e^{-t/\tau} + \frac{e^{-t/\tau}}{\tau} \cdot \sum_{k=0}^{N-1} \int_{0}^{2\cdot\pi} e^{(\eta+k\cdot 2\cdot\pi)/\tau} \cdot U^{(in)}(\eta)\, d\eta + \frac{e^{-t/\tau}}{\tau} \cdot \int_{0}^{\Delta t} e^{(\eta+N\cdot 2\cdot\pi)/\tau} \cdot U^{(in)}(\eta)\, d\eta$$

$$= U^{(out)}(0) \cdot e^{-t/\tau} + \frac{e^{-t/\tau}}{\tau} \cdot \underbrace{\Big(\sum_{k=0}^{N-1} e^{k\cdot 2\cdot\pi/\tau}\Big)}_{\text{geometrische Reihe}} \cdot \int_{0}^{2\cdot\pi} e^{\eta/\tau} \cdot U^{(in)}(\eta)\, d\eta + \frac{e^{-t/\tau}\cdot e^{N\cdot 2\cdot\pi/\tau}}{\tau} \cdot \int_{0}^{\Delta t} e^{\eta/\tau} \cdot U^{(in)}(\eta)\, d\eta$$

$$= U^{(out)}(0) \cdot e^{-t/\tau} + \frac{e^{-t/\tau}}{\tau} \cdot \frac{e^{N\cdot 2\cdot\pi/\tau}-1}{e^{2\cdot\pi/\tau}-1} \cdot \int_{0}^{2\cdot\pi} e^{\eta/\tau} \cdot U^{(in)}(\eta)\, d\eta + \frac{e^{-\Delta t/\tau}}{\tau} \cdot \int_{0}^{\Delta t} e^{\eta/\tau} \cdot U^{(in)}(\eta)\, d\eta$$

$$= U^{(out)}(0) \cdot e^{-t/\tau} + \frac{1}{\tau} \cdot \frac{e^{-\Delta t/\tau}-e^{-t/\tau}}{e^{2\cdot\pi/\tau}-1} \cdot \int_{0}^{2\cdot\pi} e^{\eta/\tau} \cdot U^{(in)}(\eta)\, d\eta + \frac{e^{-\Delta t/\tau}}{\tau} \cdot \int_{0}^{\Delta t} e^{\eta/\tau} \cdot U^{(in)}(\eta)\, d\eta$$

$$= U^{(out)}(0) \cdot e^{-t/\tau} + (e^{-\Delta t/\tau} - e^{-t/\tau}) \cdot U_0 + \frac{e^{-\Delta t/\tau}}{\tau} \cdot \int_{0}^{\Delta t} e^{\eta/\tau} \cdot U^{(in)}(\eta)\, d\eta$$

$$= \underbrace{U^{(out)}(0) \cdot e^{-t/\tau} - U_0 \cdot e^{-t/\tau}}_{U^{(out)}_{transient}} \;+\; \underbrace{U_0 \cdot e^{-\Delta t/\tau} + \frac{e^{-\Delta t/\tau}}{\tau} \cdot \int_{0}^{\Delta t} e^{\xi/\tau} \cdot U^{(in)}(\xi)\, d\xi}_{U^{(out)}_{periodic}}.$$

ii) Die Fourier–Entwicklung von $U^{(in)}(t)$ und der Ansatz $U^{(out)}_{periodic}(t) = \sum_k c_k^{(out)} \cdot e^{i\cdot k\cdot t}$ werden in die DGL

$$\tau \cdot \dot{U}^{(out)} + U^{(out)} = U^{(in)}$$

eingesetzt:

$$\tau \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k^{(out)} \cdot i \cdot k \cdot e^{i\cdot k\cdot t} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k^{(out)} \cdot e^{i\cdot k\cdot t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k^{(in)} \cdot e^{i\cdot k\cdot t}$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k^{(out)} \cdot (i\cdot k\cdot\tau + 1) \cdot e^{i\cdot k\cdot t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k^{(in)} \cdot e^{i\cdot k\cdot t}.$$

Vergleich der Koeffizienten links und rechts liefert $c_k^{(out)} \cdot (i\cdot k\cdot\tau+1) = c_k^{(in)}$. Fertig. Mit

$$c_k^{(in)} = \frac{a_k^{(in)} - i\cdot b_k^{(in)}}{2}, \quad c_{-k}^{(in)} = \frac{a_k^{(in)} + i\cdot b_k^{(in)}}{2},$$

und

$$a_k^{(out)} = c_k^{(out)} + c_{-k}^{(out)}, \quad b_k^{(out)} = i \cdot (c_k^{(out)} - c_{-k}^{(out)})$$

ergibt sich mit $c_k^{(out)} = c_k^{(in)}/(1 + i\cdot k\cdot\tau)$ nach elementarer Rechnung

$$a_k^{(out)} = \frac{a_k^{(in)} - k\cdot\tau\cdot b_k^{(in)}}{1+k^2\cdot\tau^2}, \quad b_k^{(out)} = \frac{b_k^{(in)} + k\cdot\tau\cdot a_k^{(in)}}{1+k^2\cdot\tau^2}$$

für $k > 0$.

iii) Einsetzen der Fourier–Entwicklung von $U^{(in)}$ in U_0 liefert

$$U_0 = \frac{1}{e^{2\cdot\pi/\tau}-1}\cdot\frac{1}{\tau}\cdot\int_0^{2\cdot\pi} e^{\eta/\tau}\cdot U^{(in)}(\eta)\,d\eta = \frac{1}{e^{2\cdot\pi/\tau}-1}\cdot\frac{1}{\tau}\cdot\int_0^{2\cdot\pi} e^{\eta/\tau}\cdot\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k^{(in)}\cdot e^{i\cdot k\eta}\,d\eta$$

$$= \frac{1}{e^{2\cdot\pi/\tau}-1}\cdot\frac{1}{\tau}\cdot\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k^{(in)}\cdot\int_0^{2\cdot\pi} e^{\eta/\tau}\cdot e^{i\cdot k\cdot\eta}\,d\eta = \frac{1}{e^{2\cdot\pi/\tau}-1}\cdot\frac{1}{\tau}\cdot\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k^{(in)}\cdot\frac{e^{2\cdot\pi\cdot(i\cdot k+1/\tau)}-1}{i\cdot k+1/\tau}$$

$$= \frac{1}{e^{2\cdot\pi/\tau}-1}\cdot\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k^{(in)}\cdot\frac{\overbrace{e^{2\cdot\pi\cdot i\cdot k}}^{1}\cdot e^{2\cdot\pi/\tau}-1}{i\cdot k\cdot\tau+1} = \frac{1}{e^{2\cdot\pi/\tau}-1}\cdot\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k^{(in)}\cdot\frac{e^{2\cdot\pi/\tau}-1}{i\cdot k\cdot\tau+1} = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{c_k^{(in)}}{i\cdot k\cdot\tau+1}.$$

Einsetzen der Fourier–Entwicklung von $U^{(in)}$ in $\frac{1}{\tau}\cdot\int_0^{\Delta t} e^{\eta/\tau}\cdot U^{(in)}(\eta)\,d\eta$ liefert

$$\frac{1}{\tau}\cdot\int_0^{\Delta t} e^{\eta/\tau}\cdot U^{(in)}(\eta)\,d\eta = \frac{1}{\tau}\cdot\int_0^{\Delta t} e^{\eta/\tau}\cdot\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k^{(in)}\cdot e^{i\cdot k\cdot\eta}\,d\eta$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k^{(in)}\cdot\frac{1}{\tau}\cdot\int_0^{\Delta t} e^{\eta/\tau}\cdot e^{i\cdot k\cdot\eta}\,d\eta = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k^{(in)}\cdot\frac{1}{\tau}\cdot\frac{e^{\Delta t\cdot(i\cdot k+1/\tau)}-1}{i\cdot k+1/\tau}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k^{(in)}\cdot\frac{e^{\Delta t\cdot i\cdot k}\cdot e^{\Delta t/\tau}-1}{i\cdot k\cdot\tau+1} = e^{\Delta t/\tau}\cdot\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{c_k^{(in)}\cdot e^{\Delta t\cdot i\cdot k}}{i\cdot k\cdot\tau+1} - \sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{c_k^{(in)}}{i\cdot k\cdot\tau+1}.$$

Das ergibt auf der ersten Periode ($N=0$):

$$U_{periodic}^{(out)}(\Delta t) = e^{-\Delta t/\tau}\cdot\left(U_0 + \frac{1}{\tau}\cdot\int_0^{\Delta t} e^{\eta/\tau}\cdot U^{(in)}(\eta)\,d\eta\right)$$

$$= e^{-\Delta t/\tau}\cdot e^{\Delta t/\tau}\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k^{(in)}\cdot\frac{e^{\Delta t\cdot i\cdot k}}{i\cdot k\cdot\tau+1} = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\underbrace{\frac{c_k^{(in)}}{i\cdot k\cdot\tau+1}}_{c_k^{(out)}}\cdot e^{\Delta t\cdot i\cdot k}.$$

Dies ist die in ii) gefundene Fourier–Reihe (in Δt statt in t).

iv) Mit den Formeln der analytischen Lösung i.a)/i.b) berechnet man für das Rechtecksignal $U^{(in)}$:

$$U_0 = \frac{1}{e^{2\cdot\pi/\tau}-1}\cdot\frac{1}{\tau}\cdot\int_0^{2\cdot\pi} e^{\eta/\tau}\cdot U^{(in)}(\eta)\,d\eta = \frac{1}{e^{2\cdot\pi/\tau}-1}\cdot\frac{1}{\tau}\cdot\left(\int_0^{\pi} e^{\eta/\tau}\,d\eta - \int_{\pi}^{2\cdot\pi} e^{\eta/\tau}\,d\eta\right)$$
$$= \frac{2\cdot e^{\pi/\tau}-1-e^{2\cdot\pi/\tau}}{e^{2\cdot\pi/\tau}-1} = \frac{-(e^{\pi/\tau}-1)^2}{(e^{\pi/\tau}-1)\cdot(e^{\pi/\tau}+1)} = \frac{1-e^{\pi/\tau}}{1+e^{\pi/\tau}}$$

und

$$\frac{1}{\tau} \cdot \int_0^{\Delta t} e^{\eta/\tau} \cdot U^{(in)}(\eta)\, d\eta = \begin{cases} \frac{1}{\tau} \cdot \int_0^{\Delta t} e^{\eta/\tau}\, d\eta & \text{für } \Delta t \in [0, \pi], \\ \frac{1}{\tau} \cdot \int_0^{\pi} e^{\eta/\tau}\, d\eta - \frac{1}{\tau} \cdot \int_{\pi}^{\Delta t} e^{\eta/\tau}\, d\eta & \text{für } \Delta t \in [\pi, 2 \cdot \pi), \end{cases}$$
$$= \begin{cases} e^{\Delta t/\tau} - 1 & \text{für } \Delta t \in [0, \pi], \\ 2 \cdot e^{\pi/\tau} - 1 - e^{\Delta t/\tau} & \text{für } \Delta t \in [\pi, 2 \cdot \pi). \end{cases}$$

Dies ergibt folgenden periodischen Teil des Ausgangssignals:

$$U_{periodic}^{(out)}(\Delta t) = e^{-\Delta t/\tau} \cdot \left(U_0 + \frac{1}{\tau} \cdot \int_0^{\Delta t} e^{\eta/\tau} \cdot U^{(in)}(\eta)\, d\eta \right)$$
$$= \begin{cases} \left(\frac{1 - e^{\pi/\tau}}{1 + e^{\pi/\tau}} - 1 \right) \cdot e^{-\Delta t/\tau} + 1 & \text{für } \Delta t \in [0, \pi], \\ \left(\frac{1 - e^{\pi/\tau}}{1 + e^{\pi/\tau}} - 1 \right) \cdot e^{-\Delta t/\tau} - 1 + 2 \cdot e^{-(\Delta t - \pi)/\tau} & \text{für } \Delta t \in [\pi, 2 \cdot \pi), \end{cases}$$
$$= \begin{cases} 1 - \frac{2 \cdot e^{\pi/\tau} \cdot e^{-\Delta t/\tau}}{1 + e^{\pi/\tau}} & \text{für } \Delta t \in [0, \pi], \\ -1 + \frac{2 \cdot e^{\pi/\tau} \cdot e^{-(\Delta t - \pi)/\tau}}{1 + e^{\pi/\tau}} & \text{für } \Delta t \in [\pi, 2 \cdot \pi). \end{cases}$$