Übungsblatt 3

Abgabe von $*$ Aufgaben am 11.11.2002 in der Übung.

Aufgabe 13*: (Trigonometrische Polynome. 10 Bonuspunkte)
Zeige, dass die (trigonometrischen) Fourier–Reihen von $\cos(x)^n$ und $\sin(x)^n$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ aus endlich vielen Termen bestehen. Folgere, dass die Fourier–Reihen beliebiger Polynome in $\sin(x)$ und $\cos(x)$ aus endlich vielen Termen bestehen.
Anmerkung: probiere in MuPAD z.B. `combine(cos(x)∧3*sin(x)∧5, sincos)` aus.

Musterlösung:
Die Fourier–Entwicklungen lassen sich ganz explizit hinschreiben:

$$\cos(x)^n = \Big(\frac{e^{i\cdot x} + e^{-i\cdot x}}{2}\Big)^n = \frac{1}{2^n}\cdot\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot e^{i\cdot(n-k)\cdot x}\cdot e^{-i\cdot k\cdot x} = \frac{1}{2^n}\cdot\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot e^{i\cdot(n-2\cdot k)\cdot x},$$

$$\sin(x)^n = \Big(\frac{e^{i\cdot x} - e^{-i\cdot x}}{2\cdot i}\Big)^n = \frac{1}{2^n\cdot i^n}\cdot\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot(-1)^k\cdot e^{i\cdot(n-k)\cdot x}\cdot e^{-i\cdot k\cdot x}$$

$$= \frac{1}{2^n\cdot i^n}\cdot\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot(-1)^k\cdot e^{i\cdot(n-2\cdot k)\cdot x}.$$

Die Multiplikation solcher Summen liefert wieder Summen, die lediglich Potenzen von $e^{i\cdot x}$ und $e^{-i\cdot x}$ enthalten, welche sich wiederum mittels $e^{i\cdot k\cdot x}$ schreiben lassen. Damit lassen sich auch beliebige Polynome in $\sin(x)$ und $\cos(x)$ als endliche Summen über Terme der Form $e^{i\cdot k\cdot x}$ schreiben.

Aufgabe 14*: (Spektrale Verschiebung. 10 Bonuspunkte)
Seien $c_k(f)$ die (trigonometrischen) Fourier–Koeffizienten der Funktion f. Bestimme für $k_0 \in \mathbb{Z}$ die Fourier–Koeffizienten der Funktionen $e^{i\cdot k_0\cdot x}\cdot f(x)$, $\cos(k_0\cdot x)\cdot f(x)$ und $\sin(k_0\cdot x)\cdot f(x)$ in Termen von $c_k(f)$.

Musterlösung:

$$c_k(e^{i\cdot k_0\cdot x}\cdot f) = \frac{1}{2\cdot\pi}\cdot\int_{-\pi}^{\pi} e^{-i\cdot k\cdot x}\cdot e^{i\cdot k_0\cdot x}\cdot f(x)\,dx = \frac{1}{2\cdot\pi}\cdot\int_{-\pi}^{\pi} e^{-i\cdot(k-k_0)\cdot x}\cdot f(x)\,dx = c_{k-k_0}(f),$$

$$c_k(\cos(k_0\cdot x)\cdot f) = \frac{1}{2}\cdot\Big(c_k(e^{i\cdot k_0\cdot x}\cdot f) + c_k(e^{-i\cdot k_0\cdot x}\cdot f)\Big) = \frac{c_{k-k_0}(f) + c_{k+k_0}(f)}{2},$$

$$c_k(\sin(k_0\cdot x)\cdot f) = \frac{1}{2\cdot i}\cdot\Big(c_k(e^{i\cdot k_0\cdot x}\cdot f) - c_k(e^{-i\cdot k_0\cdot x}\cdot f)\Big) = \frac{c_{k-k_0}(f) - c_{k+k_0}(f)}{2\cdot i}.$$

Aufgabe 15*: (Faltungen. 10 Bonuspunkte)
Seien $c_k(f)$ und $c_k(g)$ die (trigonometrischen) Fourier–Koeffizienten zweier $2 \cdot \pi$–periodischer Funktionen f und g. Die **"Faltung"** $f * g$ von f und g ist die Funktion

$$(f * g)(x) = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x-y) \cdot g(y)\, dy.$$

a) Zeige $f * g = g * f$.

b) Bestimme die Fourier–Koeffizienten $c_k(f * g)$ in Termen von $c_k(f)$ und $c_k(g)$.

Musterlösung:
a) Substitution $y \to z = x - y$:

$$(f * g)(x) = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x-y) \cdot g(y)\, dy = -\frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{z+\pi}^{z-\pi} f(z) \cdot g(x-z)\, dz$$

$$= \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{z-\pi}^{z+\pi} f(z) \cdot g(x-z)\, dz \overset{(*)}{=} \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(z) \cdot g(x-z)\, dz = (g * f)(x).$$

Im Schritt $(*)$ wurde die $2 \cdot \pi$–Periodizität des Integranden verwendet.

b)

$$c_k(f * g) = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} (f * g)(x) \cdot e^{-i \cdot k \cdot x}\, dx = \frac{1}{(2 \cdot \pi)^2} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \Big(\int_{-\pi}^{\pi} f(x-y) \cdot g(y)\, dy \Big) \cdot e^{-i \cdot k \cdot x}\, dx$$

$$= \frac{1}{(2 \cdot \pi)^2} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-y) \cdot g(y) \cdot e^{-i \cdot k \cdot x}\, dy\, dx = \frac{1}{(2 \cdot \pi)^2} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \Big(\int_{-\pi}^{\pi} f(x-y) \cdot e^{-i \cdot k \cdot x}\, dx \Big) \cdot g(y)\, dy.$$

Substitution $x \to z = x - y$ liefert

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x-y) \cdot e^{-i \cdot k \cdot x}\, dx = \int_{-\pi-y}^{\pi-y} f(z) \cdot e^{-i \cdot k \cdot (z+y)}\, dx$$

$$= \int_{\pi-y}^{\pi-y} f(z) \cdot e^{-i \cdot k \cdot z}\, dx \cdot e^{-i \cdot k \cdot y} = \int_{-\pi}^{\pi} f(z) \cdot e^{-i \cdot k \cdot z}\, dx \cdot e^{-i \cdot k \cdot y}.$$

Das ergibt:

$$c_k(f * g) = \frac{1}{(2 \cdot \pi)^2} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \Big(\int_{-\pi}^{\pi} f(z) \cdot e^{-i \cdot k \cdot z}\, dx \cdot e^{-i \cdot k \cdot y} \Big) \cdot g(y)\, dy$$

$$= \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} c_k(f) \cdot e^{-i \cdot k \cdot y} \cdot g(y)\, dy = c_k(f) \cdot c_k(g).$$

Aufgabe 16*: (Fourier–Koeffizienten bestimmen die Funktion eindeutig. 10 Bonuspunkte) (Für mathematisch Interessierte) Zeige, dass eine stetige Funktion identisch 0 sein muss, wenn alle ihre Fourier–Koeffizienten bzgl. der trigonometrischen Funktionen verschwinden.

Anleitung: Sei f eine (o.B.d.A. reellwertige) stetige Funktion. Angenommen, es gibt einen Punkt x_0 mit $|f(x_0)| \neq 0$ (o.B.d.A. $x_0 = 0$ und $f(x_0) > 0$). Wähle $\delta > 0$ so, dass $f(x) \geq f(0)/2$ gilt für alle $x \in [-\delta, \delta]$ (so ein δ existiert wegen der Stetigkeit von f). Sei o.B.d.A. $0 < \delta < \pi$. Setze $p(x) = 1 + \cos(x) - \cos(\delta)$. Sei $U_\delta = [-\delta, \delta]$, sei $C = [-\pi, \pi] \setminus U_\delta$. Die entscheidende Tatsache ist, dass $p(x) \geq 1$ gilt für alle $x \in U_\delta$ und $|p(x)| \leq 1$ für alle $x \in C$. Zeige:

$$\begin{aligned}
\left| \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot p(x)^n \, dx \right| &\geq \int_{U_\delta} f(x) \cdot p(x)^n \, dx - \int_C |f(x)| \cdot |p(x)|^n \, dx \\
&\geq \frac{f(0)}{2} \cdot \int_{U_\delta} p(x)^n \, dx - \int_C |f(x)| \, dx \\
&\geq \frac{f(0)}{2} \cdot \int_{U_{\frac{\delta}{2}}} p(x)^n \, dx - \int_C |f(x)| \, dx.
\end{aligned}$$

Was ist der Grenzwert der rechten Seite für $n \to \infty$? Andererseits muss $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot p(x)^n \, dx = 0$ gelten für alle n (warum? Beachte Aufgabe 13). Widerspruch zur Existenz eines Punktes x_0 mit $f(x_0) > 0$!

Musterlösung:
Beachte, dass der Integrand $f(x) \cdot p(x)^n$ auf U_δ positiv ist:

$$\begin{aligned}
\left| \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot p(x)^n \, dx \right| &= \left| \int_{U_\delta} f(x) \cdot p(x)^n \, dx + \int_C f(x) \cdot p(x)^n \, dx \right| \\
&\geq \int_{U_\delta} f(x) \cdot p(x)^n \, dx - \left| \int_C f(x) \cdot p(x)^n \, dx \right| \\
&\geq \frac{f(0)}{2} \cdot \int_{U_\delta} p(x)^n \, dx - \int_C |f(x)| \cdot |p(x)|^n \, dx \\
&= \frac{f(0)}{2} \cdot \int_{U_{\frac{\delta}{2}}} p(x)^n \, dx + \frac{f(0)}{2} \cdot \int_{U_\delta \setminus U_{\frac{\delta}{2}}} p(x)^n \, dx - \int_C |f(x)| \, dx \\
&\geq \frac{f(0)}{2} \cdot \int_{U_{\frac{\delta}{2}}} p(x)^n \, dx - \int_C |f(x)| \, dx.
\end{aligned}$$

Für alle $x \in U_{\frac{\delta}{2}}$ gilt (cos ist auf $U_{\frac{\delta}{2}}$ monoton fallend):

$$p(x) = 1 + \cos(x) - \cos(\delta) \geq 1 + \cos\left(\frac{\delta}{2}\right) - \cos(\delta) =: p^* > 1.$$

Es folgt

$$
\begin{aligned}
\left|\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot p(x)^n\ dx\right| &\geq \frac{f(0)}{2}\cdot\int_{U_{\frac{\delta}{2}}} p(x)^n\ dx - \int_C |f(x)|\ dx \\
&\geq \frac{f(0)}{2}\cdot\int_{U_{\frac{\delta}{2}}} p^{*n}\ dx - \int_C |f(x)|\ dx \\
&= \frac{f(0)}{2}\cdot\delta\cdot p^{*n} - \int_C |f(x)|\ dx.
\end{aligned}
$$

Wegen $p^* > 1$ konvergiert dieser Wert für $n\to\infty$ gegen ∞. Andererseits ist $p(x)^n$ ein Polynom in $\sin(x)$ und $\cos(x)$ und läßt sich nach Aufgabe 13 als endliche Summe von Termen der Form $e^{i\cdot k\cdot x}$ schreiben. Damit liefert

$$\frac{1}{2\cdot\pi}\cdot\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot p(x)^n\ dx$$

eine Summe von Termen, in denen die Fourier–Koeffizienten

$$\frac{1}{2\cdot\pi}\cdot\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot e^{i\cdot k\cdot x}\ dx$$

auftauchen, die nach Voraussetzung aber alle verschwinden sollen. Damit muss $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot p(x)^x\ dx = 0$ gelten. Widerspruch!

Aufgabe 17: (MuPAD. 0 Bonuspunkte)

a) Man beschäftige sich mit dem Punkt “Programmieren” unter

`http://www.mupad.de/schule/mupad-lernen/grundkurs/index.html`

b) Ermittle mittels einer `for`–Schleife numerische Approximation der ersten 40 Fourier–Koeffizienten a_k der Funktion $f(x) = x/(1+x^2)$, $x\in[-\pi,\pi]$. Definiere die Fourier–Approximation $S(n,x) = \sum_{k=1}^{n} a_k\cdot\sin(x)$ als MuPAD–Funktion und plotte $f(x)$, $S(3,x)$, $S(10,x)$, $S(40,x)$ mit einer hinreichend grossen Auflösung in einer gemeinsamen Graphik.
MuPAD–Funktionen: `numeric::int, _plus`.

Musterlösung:

```
>> f:= x -> x/(1 + x^2);

>> for k from 1 to 40 do
     a[k]:= float(2/PI)*numeric::int(f(x)*sin(k*x), x = 0..PI);
   end_for:

>> S:= (n, x) -> _plus(a[k]*sin(k*x) $ k=1..n);

>> plotfunc2d(f(x), S(3, x), S(10, x), S(40, x),
              x = -PI..PI, Grid = 1000)
```
