# Übungsblatt 15

Das Semester ist abgeschlossen `;-)`. Für dieses Aufgabenblatt ist keine Korrektur mehr vorgesehen.

**Aufgabe 65:** (Die Laplace–Transformation periodischer Funktionen.)
Sei $f \in L_{1loc}([0,\infty))$ $X$-periodisch. Zeige, daß die Konvergenzhalbebene der Laplace–Transformation gegeben ist durch die Konvergenzabszisse $\alpha_f = 0$ und dass in der rechten Halbebene gilt:

$$F(s) = \mathcal{L}[f](s) = \frac{1}{1-e^{-s\cdot X}} \cdot \int_0^X e^{-s\cdot x} \cdot f(x)\, dx.$$

(Vergleiche auch den Rechengang in Aufgabe 18.i.b). Gehört die Grenzlinie $\Re(s) = \alpha_f$ mit zum Konvergenzbereich? Offensichtlich ist durch die obige Darstellung gegebene Funktion $F(s)$ analytisch fortsetzbar auf ganz $\mathbb{C}$ bis auf abzählbar viele Polstellen erster Ordnung. Wo liegen diese?

**Musterlösung:**
Betrachte

$$\begin{aligned}\int_0^{n\cdot X} e^{-s\cdot x} \cdot f(x)\, dx &= \sum_{k=0}^{n} \int_{k\cdot X}^{(k+1)\cdot X} e^{-s\cdot x} \cdot f(x)\, dx \\ &\overset{(x=k\cdot X+\xi)}{=} \sum_{k=0}^{n} \int_0^X e^{-s\cdot\xi} \cdot e^{-s\cdot k\cdot X} \cdot \underbrace{f(\xi + k\cdot X)}_{=f(\xi)}\, d\xi \\ &= \Big(\sum_{k=0}^{n} e^{-s\cdot k\cdot X}\Big) \cdot \int_0^X e^{-s\cdot\xi} \cdot f(\xi)\, d\xi = \frac{1-e^{-n\cdot s\cdot X}}{1-e^{-s\cdot X}} \cdot \int_0^X e^{-s\cdot\xi} \cdot f(\xi)\, d\xi.\end{aligned}$$

Dies konvergiert für $\Re(s) > 0$, da dann

$$|e^{-n\cdot X\cdot s}| = e^{-n\cdot X\cdot\Re(s)} \overset{(n\to\infty)}{\longrightarrow} 0$$

und divergiert für $\Re(s) < 0$, dann dann

$$|e^{-n\cdot X\cdot s}| = e^{-n\cdot X\cdot\Re(s)} \overset{(n\to\infty)}{\longrightarrow} \infty.$$

Für $\Re(s) = 0$ konvergiert das Integral nicht, da $\sum_{k=0}^{n} e^{-k\cdot sX}$ nicht konvergiert ($e^{-k\cdot s\cdot X} = (e^{-i\cdot X\cdot\Im(s)})^k$ bildet keine Nullfolge). Der Konvergenzbereich des Laplace–Integrals ist damit die offene Halbebene $\Re(s) > 0$. Die Darstellung

$$F(s) = \frac{1}{1-e^{-s\cdot X}} \cdot \int_0^X e^{-s\cdot x} \cdot f(x)\, dx$$

ist offensichtlich für alle $s$ mit $1 - e^{-s\cdot X} \neq 0$ wohldefiniert und stellt eine analytische Funktion dar, denn

$$\frac{d}{ds} \int_0^X e^{-s\cdot\xi} \cdot f(\xi)\, d\xi = \int_0^X \frac{d}{ds} e^{-s\cdot\xi} \cdot f(\xi)\, d\xi = -\int_0^X \xi \cdot e^{-s\cdot\xi} \cdot f(\xi)\, d\xi$$

existiert für jedes $s \in \mathbb{C}$. Die Singularitäten

$$1 - e^{-s\cdot X} = 0 \quad\Leftrightarrow\quad s\cdot X = 2\cdot\pi\cdot i\cdot k \quad\Leftrightarrow\quad s = \frac{2\cdot\pi\cdot i}{X}\cdot k$$

mit $k \in \mathbb{Z}$ liegen äquidistant auf der imaginären Achse.

**Aufgabe 66:** (Grenzwertsätze. Vorsicht: technisch!)
Zeige, dass bei Existenz des Grenzwerts auf der linken Seite des Gleichheitszeichens gilt:

$$a) \quad \lim_{x\to 0_+} f(x) = \lim_{s\to\infty} s\cdot\mathcal{L}[f](s), \quad b) \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{s\to 0_+} s\cdot\mathcal{L}[f](s).$$

Die Grenzwerte im Laplace–Raum sind zu verstehen als $\lim\limits_{r\to\infty}$ bzw. $\lim\limits_{r\to 0}$ bzw. innerhalb von Winkelbereichen der Form $s = r\cdot e^{i\phi}$, $|\phi| \le \phi_0 < \pi/2$.

**Musterlösung:**
a) Nach Bemerkung 4.17 des Skripts gilt für glattes $f$:

$$s\cdot\mathcal{L}[f(x)](s) = s\cdot\Big(\frac{f(0)}{s} + \frac{f'(0)}{s^2} + \cdots\Big) = f(0) + O\Big(\frac{1}{s}\Big).$$

Damit folgt die Behauptung unmittelbar (für glattes $f$).
Hier ein strenger Beweis ohne Glattheitsvoraussetzung (es wird nur die rechtsseitige Stetigkeit von $f$ am Nullpunkt vorausgesetzt). Sei $f(0) = \lim\limits_{x\to 0+0} f(x)$. Zu jedem $\epsilon > 0$ existiert ein $\delta_\epsilon > 0$ mit $|f(x) - f(0)| < \epsilon$ für alle $x \in [0, \delta_\epsilon)$. Sei $s = r\cdot e^{i\phi}$ mit $|\phi| \le \phi_0 < \pi/2$. Mit $\int_0^\infty s\cdot e^{-s\cdot x} dx = 1$ (für $\Re(s) > 0$) hat man:

$$\begin{aligned}
|s\cdot\mathcal{F}[f](s) - f_0| &= \Big|s\cdot\int_0^\infty e^{-s\cdot x}\cdot(f(x) - f_0)\,dx\Big| \le |s|\cdot\int_0^\infty |e^{-s\cdot x}|\cdot|f(x) - f_0|\,dx \\
&\le |s|\cdot\int_0^{\delta_\epsilon} |e^{-s\cdot x}|\cdot\underbrace{|f(x) - f_0|}_{<\epsilon}\,dx + |s|\cdot\int_{\delta_\epsilon}^\infty |e^{-s\cdot x}|\cdot|f(x) - f_0|\,dx \\
&\le \epsilon\cdot|s|\cdot\int_0^{\delta_\epsilon} e^{-\Re(s)\cdot x}\,dx + |s|\cdot\int_{\delta_\epsilon}^\infty e^{-\Re(s)\cdot x}\cdot|f(x) - f_0|\,dx.
\end{aligned}$$

Mit $|s| = \Re(s)/\cos(\phi) \le \Re(s)/\cos(\phi_0)$:

$$\begin{aligned}
|s\cdot\mathcal{F}[f](s) - f_0| &\le \frac{\epsilon}{\cos(\phi_0)}\cdot\underbrace{\int_0^{\delta_\epsilon}\Re(s)\cdot e^{-\Re(s)\cdot x}\,dx}_{=1-e^{-\Re(s)\cdot\delta_\epsilon}\le 1} + \frac{\Re(s)}{\cos(\phi_0)}\cdot\int_{\delta_\epsilon}^\infty \underbrace{e^{-\Re(s)\cdot x/2}}_{\le e^{-\Re(s)\cdot\delta_\epsilon/2}}\cdot e^{-\Re(s)\cdot x/2}\cdot|f(x) - f_0|\,dx \\
&\le \frac{\epsilon}{\cos(\phi_0)} + \frac{\Re(s)\cdot e^{-\Re(s)\cdot\delta_\epsilon/2}}{\cos(\phi_0)}\cdot\int_{\delta_\epsilon}^\infty e^{-\Re(s)\cdot x/2}\cdot|f(x) - f_0|\,dx.
\end{aligned}$$

Wir können $\Re(s) > 2\cdot\alpha_f$ (mit der Konvergenzabszisse $\alpha_f$ von $f$) voraussetzen, denn wir sind nur am Grenzwert $\Re(s)\to\infty$ interessiert. Für solch ein $s$ existiert das verbleibende obige Integral. Der Vorfaktor $\Re(s)\cdot e^{-\Re(s)\cdot\delta_\epsilon}$ konvergiert gegen 0, d.h., der zweite Summand wird beliebig klein, wenn wir nur $\Re(s)$ hinreichend groß wählen. Damit existiert zu jedem $\epsilon > 0$ einen Bereich für $\Re(s)$, so dass

$$|s\cdot\mathcal{F}[f](s) - f_0| \le \frac{\epsilon}{\cos(\phi_0)} + \frac{\epsilon}{\cos(\phi_0)} = \frac{2\cdot\epsilon}{\cos(\phi_0)}$$

gilt. Dies ist genau die Aussage $\lim\limits_{s\to\infty} s\cdot\mathcal{L}[f](s) = f(0)$ (auf einem Winkelbereich $|\phi| = |\arg(s)| \le \phi_0 < \pi/2$).

b) Sei $f \in L_{1loc}([0,\infty))$ und es existiere $f_\infty = \lim_{x\to\infty} f(x)$. Für endliches $K$ existiert das Integral

$$\int_0^K e^{-s\cdot x}\cdot f(x)\,dx$$

für jedes $s \in \mathbb{C}$. Für das Restintegral gilt für $\Re(s) > 0$

$$\Big| \int_K^\infty e^{-s\cdot x} \cdot f(x)\, dx \Big| \leq \int_K^\infty e^{-\Re(s)\cdot x} \cdot |f(x)|\, dx < \infty,$$

da wegen des Existenz von $f_\infty$ die Funkion $f(x)$ für $x \in [K, \infty)$ bei hinreichend großem $K$ beschränkt ist. Damit ist die Konvergenzabszisse $\alpha_f$ des Laplace–Intgrals für Funktionen, die für $x \to \infty$ gegen einen endlichen Grenzwert laufen, sicherlich $\leq 0$. Wir betrachten im Folgenden nur noch Werte von $s$ mit $\Re(s) > 0 \geq \alpha_f$, die also sicherlich in der Konvergenzhalbebene der Laplace–Transformierten liegen.
Zu jedem $\epsilon > 0$ existiert ein $K_\epsilon > 0$, so dass $|f(x) - f_\infty| < \epsilon$ gilt für alle $x > K_\epsilon$. Mit $\int_0^\infty s \cdot e^{-s\cdot x} dx = 1$ (für $\Re(s) > 0$) gilt:

$$\begin{aligned}
|s \cdot \mathcal{F}[f](s) - f_\infty| &= \Big| s \cdot \int_0^\infty e^{-s\cdot x} \cdot (f(x) - f_\infty)\, dx \Big| \leq |s| \cdot \int_0^\infty |e^{-s\cdot x}| \cdot |f(x) - f_\infty|\, dx \\
&\leq |s| \cdot \int_0^{K_\epsilon} |e^{-s\cdot x}| \cdot |f(x) - f_\infty|\, dx + |s| \cdot \int_{K_\epsilon}^\infty |e^{-s\cdot x}| \cdot \underbrace{|f(x) - f_0|}_{<\epsilon}\, dx \\
&\leq |s| \cdot \int_0^{K_\epsilon} e^{-\Re(s)\cdot x} \cdot |f(x) - f_\infty|\, dx + \epsilon \cdot |s| \cdot \int_{K_\epsilon}^\infty e^{-\Re(s)\cdot x}\, dx.
\end{aligned}$$

Mit $|s| = \Re(s)/\cos(\phi) \leq \Re(s)/\cos(\phi_0)$:

$$\begin{aligned}
|s \cdot \mathcal{F}[f](s) - f_\infty| &\leq \frac{\Re(s)}{\cos(\phi_0)} \cdot \int_0^{K_\epsilon} \underbrace{e^{-\Re(s)\cdot x}}_{\leq 1} \cdot |f(x) - f_\infty|\, dx + \frac{\epsilon}{\cos(\phi_0)} \cdot \underbrace{\Re(s) \cdot \int_{K_\epsilon}^\infty e^{-\Re(s)\cdot x} \cdot\, dx}_{e^{-\Re(s)\cdot K_\epsilon} \leq 1} \\
&\leq \frac{\Re(s)}{\cos(\phi_0)} \cdot \int_0^{K_\epsilon} |f(x) - f_\infty|\, dx + \frac{\epsilon}{\cos(\phi_0)}.
\end{aligned}$$

Durch hinreichend kleines $\Re(s)$ unterschreitet der erste Term jede noch so kleine positive Schranke. Man kann damit $\Re(s) > 0$ so klein wählen, dass

$$|s \cdot \mathcal{F}[f](s) - f_\infty| \leq \frac{\epsilon}{\cos(\phi_0)} + \frac{\epsilon}{\cos(\phi_0)} = \frac{2\cdot\epsilon}{\cos(\phi_0)}$$

gilt. Dies ist genau die Aussage $\lim\limits_{s\to 0+0} s \cdot \mathcal{L}[f](s) = f_\infty$ (auf einem Winkelbereich $|\phi| = |\arg(s)| \leq \phi_0 < \pi/2$).

---

**Aufgabe 67:** (Eine einfache Laplace–Transformation)

a) Für $0 < \alpha \in \mathbb{R}$ definiere die „Gamma-Funktion“

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} \cdot e^{-x}\, dx.$$

Zeige, dass die Funktionalgleichung $\Gamma(\alpha + 1) = \alpha \cdot \Gamma(\alpha)$ gilt und folgere $\Gamma(n + 1) = n!$ für $n \in \mathbb{N}$.

b) Zeige für $-1 < \alpha \in \mathbb{R}$ und $\Re(s) > 0$: $\quad \mathcal{L}[x^\alpha](s) = \dfrac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}$.

**Musterlösung:**
a) Partielle Integration:

$$\Gamma(\alpha+1) = \int_0^\infty \underbrace{x^\alpha}_{u(x)} \cdot \underbrace{e^{-x}}_{v'(x)} \; dx = \Big[ \underbrace{x^\alpha}_{u(x)} \cdot \underbrace{(-e^{-x})}_{v(x)} \Big]_{x=0}^{x=\infty} - \int_0^\infty \underbrace{\alpha \cdot x^{\alpha-1}}_{u'(x)} \cdot \underbrace{(-e^{-x})}_{v(x)} \; dx$$

$$= \alpha \cdot \int_0^\infty x^{\alpha-1} \cdot e^{-x} \; dx = \alpha \cdot \Gamma(\alpha).$$

Mit $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x} \; dx = 1$ folgt für $n \in \mathbb{N}$:

$$\Gamma(n+1) = n \cdot \Gamma(n) = n \cdot (n-1) \cdot \Gamma(n-1) = \ldots = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 1 \cdot \Gamma(1) = n!.$$

b) Wir haben zunächst zu definieren, was $s^\alpha$ für $s \in \mathbb{C}$ bedeuten soll. Dies geschieht wieder über Polarkoordinaten $s = r \cdot e^{i \cdot \phi}$, $\phi \in (-\pi, \pi]$. Wir definieren:

$$(r \cdot e^{i \cdot \phi})^\alpha = r^\alpha \cdot e^{i \cdot \phi / \alpha}.$$

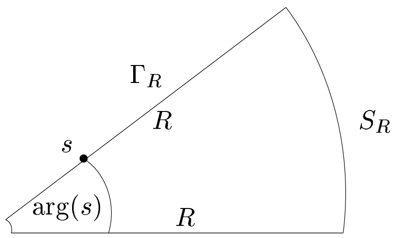
Offensichtlich ist diese Funktion stetig (und auch analytisch) für alle $s \in \mathbb{C}$ außer an denjenigen Stellen, wo die Polarkoordinaten springen, also $\phi = \pm\pi$, d.h., für $s$ auf der negativen reellen Halbachse. Wir betrachten im Folgenden nur $s \in \mathbb{C}$ mit $\Re(s) > 0$. In der rechten Halbebene ist $s^\alpha$ für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$ eine analytische Funktion.

Wir interpretieren zunächst das Laplace–Integral $\mathcal{L}[x^\alpha](s)$ mit komplexem $s$ in der rechten Halbebene als komplexes Kurvenintegral

$$\mathcal{L}[x^\alpha](s) = \int_0^\infty x^\alpha \cdot e^{-s \cdot x} \; dx = \frac{1}{s^\alpha} \cdot \int_0^\infty (s \cdot x)^\alpha \cdot e^{-s \cdot x} \; dx$$

$$= \frac{1}{s^{\alpha+1}} \cdot \int_0^\infty (s \cdot x)^\alpha \cdot e^{-s \cdot x} \cdot s \; dx = \frac{1}{s^{\alpha+1}} \cdot \int_\Gamma z^\alpha \cdot e^{-z} \; dz$$

längs des Wegs $z(x) = s \cdot x$, $x \in [0, \infty)$ (also eine Halbgerade vom Nullpunkt aus durch den Punkt $s \in \mathbb{C}$). Es verbleibt, das komplexe Kurvenintegral $\int_\Gamma z^\alpha \cdot e^{-z} \; dz$ als reelles Inegral $\int_0^\infty x^\alpha \cdot e^{-x} \; dx$ zu interpretieren, das nach Definition $\Gamma(\alpha+1)$ darstellt.
Da der Integrand $z^\alpha \cdot e^{-z}$ in der rechten Halbebene analytisch ist, können wir den Weg zur positiven reellen Achse hin deformieren:




Längs des Kreissegments $S_R$ (mit Radius $R$) gilt die Abschätzung:

$$\left| \int_{S_R} z^\alpha \cdot e^{-z} \; dz \right| \overset{(z = R \cdot e^{i \cdot \phi})}{=} \left| \int_0^{\arg(s)} R^\alpha \cdot e^{-R \cdot \cos(\phi) - i \cdot R \cdot \sin(\phi)} \cdot R \; d\phi \right|$$

$$\leq R^{\alpha+1} \cdot \int_0^{\arg(s)} e^{-R \cdot \cos(\phi)} \; d\phi \leq R^{\alpha+1} \cdot e^{-R \cdot \cos(\arg(s))} \cdot \arg(s) \quad \overset{R \to \infty}{\longrightarrow} 0.$$

Also:

$$\int_\Gamma z^\alpha\ e^{-z}\ ds = \lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma_R} z^\alpha\ e^{-z}\ ds = \int_0^\infty x^\alpha \cdot e^{-x}\ dx = \Gamma(\alpha+1).$$

Es folgt

$$\mathcal{L}[x^\alpha](s) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}.$$

---

**Aufgabe 68:** (Laplace–Transformation als Methode zur Lösung von DGLen)

a) Löse die DGL

$$4 \cdot x \cdot f''(x) + 2 \cdot f'(x) + f(x) = 0$$

mit der Anfangsbedingung $f(0) = 0$.

Anleitung: Die Laplace–Transformierte der Lösung ist $\mathcal{L}[f](s) = \text{const} \cdot e^{-1/(4\cdot s)}/s^{3/2}$. Das Urbild ergibt sich z.B. durch Nachschlagen in Tabellen zu

$$f(x) = \text{const} \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \sin(\sqrt{x}\ ).$$

b) Löse das Differentialgleichungssystem

$$f'(x) + g'(x) = 1, \quad g'(x) + g(x) = f'(x) - f(x)$$

mit gegebenen Anfangsbedingungen $f(0)$ und $g(0)$ durch Laplace–Transformation.

**Musterlösung:**
a) Mit $F = \mathcal{L}[f(x)]$ und

$$\mathcal{L}[x \cdot f''(x)](s) = -\frac{d}{ds}\ \mathcal{L}[f''(x)](s) = -\frac{d}{ds}\ \Big(s^2 \cdot \mathcal{L}[f(x)](s) - s \cdot f(0) - f'(0)\Big)$$

$$= -s^2 \cdot \frac{d}{ds}\ F(s) - 2 \cdot s \cdot F(s) + f(0)$$

und

$$\mathcal{L}[f'(x)](s) = s \cdot \mathcal{L}[f(x)](s) - f(0) = s \cdot F(s) - f(0)$$

entsteht durch Laplace–Transformation der DGL zweiter Ordnung (in $x$) eine DGL erster Ordnung (in $s$):

$$\underbrace{-4 \cdot s^2 \cdot \frac{d}{ds}\ F(s) - 8 \cdot s \cdot F(s)}_{4\cdot\mathcal{L}[x\cdot f''(x)](s)} \ +\ \underbrace{2 \cdot s \cdot F(s)}_{2\cdot\mathcal{L}[f'(x)](s)}\ +\ F(s) = 0.$$

Diese DGL

$$\frac{d}{ds}\ F(s) = \Big(\frac{1}{4 \cdot s^2} - \frac{3}{2 \cdot s}\Big) \cdot F(s)$$

kann durch Separation leicht gelöst werden:

$$\frac{dF}{F} = (\frac{1}{4 \cdot s^2} - \frac{3}{2 \cdot s}\Big)\ ds \quad \Rightarrow \quad \ln(F) = -\frac{1}{4 \cdot s} - \frac{3}{2} \cdot \ln(s) + \text{const}$$

$$\Rightarrow \quad F(s) = \text{const} \cdot \frac{1}{s^{3/2}} \cdot e^{-\frac{1}{4\cdot s}}.$$

Man findet in Tabellen:

$$\mathcal{L}^{-1}\Big[\frac{e^{-\alpha/s}}{s^{3/2}}\Big](x) = \frac{\sin(2\cdot\sqrt{\alpha\cdot x})}{\sqrt{\pi\cdot a}}.$$

Mit $a = 1/4$ folgt die Lösung

$$f(x) = \text{const}\cdot\frac{2}{\sqrt{\pi}}\cdot\sin(\sqrt{x}\,).$$

b) Durch Laplace–Transformation ensteht aus den DGLen das System linearer Gleichungen

$$s\cdot F - f(0) + s\cdot G - g(0) = \frac{1}{s}, \quad s\cdot G - G(0) + G = s\cdot F - f(0) - F$$

für $F = \mathcal{L}[f]$, $G = \mathcal{L}[g]$. Die Lösung ist

$$\begin{pmatrix} s & s \\ s+1 & 1-s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} F \\ S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{s} + f(0) + g(0) \\ g(0) - f(0) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{pmatrix} F(s) \\ G(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{g(0)}{s} + \frac{1 - f(0) - g(0)}{2\cdot s^2} - \frac{1}{2\cdot s^3} \\ \frac{f(0)}{s} + \frac{1 + f(0) + g(0)}{2\cdot s^2} + \frac{1}{2\cdot s^3} \end{pmatrix}.$$

Mit $\mathcal{L}^{-1}[1/s](x) = 1$, $\mathcal{L}^{-1}[1/s^2](x) = x$, $\mathcal{L}^{-1}[1/s^3](x) = x^2/2$ erhält man die Lösung

$$f(x) = f(0) + \frac{1 + f(0) + g(0)}{2}\cdot x + \frac{1}{4}\cdot x^2, \quad g(x) = g(0) + \frac{1 - f(0) - g(0)}{2}\cdot x - \frac{1}{4}\cdot x^2.$$

---

**Aufgabe 70:** (Inhomogene DGLen)
Betrachte das inhomogene Anfangswertproblem

$$y''(x) + 2\cdot y'(x) + y(x) = h(x), \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

Leite mittels Laplace–Transformation die Lösungsformel $y(x) = \int_0^x (x-\xi)\cdot e^{\xi - x}\cdot h(\xi)\,d\xi$ her.

**Musterlösung:**
Durch Laplace–Transformation wird aus der DGL die Gleichung

$$s^2\cdot F(s) + 2\cdot s\cdot F(s) + F(s) = \mathcal{L}[h](s) \quad \Rightarrow \quad F(s) = \frac{\mathcal{L}[h](s)}{(s+1)^2}$$

für $F(s) = \mathcal{L}[y](s)$. Aus unseren Rechenregeln/Tabellen entnimmt man $\mathcal{L}\Big[\frac{1}{(s+1)^2}\Big] = x\cdot e^{-x}$, also:

$$y(x) = \mathcal{L}^{-1}\Big[\mathcal{L}[x\cdot e^{-x}]\cdot\mathcal{L}[h(x)](s)\Big](x).$$

Das Produkt der Laplace–Funktionen entspricht einer Faltung der Funktionen $g(x) = x\cdot e^{-x}$ und $h(x)$ im Ortsraum:

$$y(x) = (g \otimes h)(x) = \int_0^x g(x-\xi)\cdot h(\xi)\,d\xi = \int_0^x (x-\xi)\cdot e^{\xi - x}\cdot h(\xi)\,d\xi.$$

---

**Aufgabe 71:** (Eine einfache Differential–Differenzengleichung)
Finde eine kompakte Reihendarstellung der Lösung der „Funktionalgleichung“

$$\frac{d}{dx}\, f(x) + f(x-1) = x^2$$

mit $f(x) = 0$ für $x \leq 0$. Anleitung: Die Laplace–Transformierte der Lösung ergibt sich unmittelbar als

$$\mathcal{L}[f(x)](s) = \frac{2}{s^3} \cdot \frac{1}{s + e^{-s}} = 2 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{e^{-k\cdot s}}{s^{k+4}}.$$

Jeder Summand läßt sich über die Rechenregeln der Laplace–Transformation leicht zurücktransformieren.

**Musterlösung:**
a) **Stückweise Konstruktion:**
Zunächst eine ohne Laplace–Transformation stückweise konstruierte Lösung von

$$\frac{d}{dx}\, f(x) = x^2 - f(x-1), \quad f(x) = 0 \;\forall\; x \leq 0.$$

Beachte, daß für $0 \leq x \leq 1$ die rechte Seite mit $f(x-1) = 0$ bekannt ist. Also ist $f(x)$ auf diesem Intervall als Lösung von $\frac{d}{dx}\, f(x) = x^2$ gegeben. Für $1 \leq x \leq 2$ ist dann $f(x-1)$ bekannt, und $f(x)$ ist auf dem neuen Intervall durch Integration zu bestimmen. Usw.:

$$\begin{aligned}
x \in [0,1]: &\quad f'(x) = x^2 && \Rightarrow \quad f(x) = \frac{x^3}{3}, \\
x \in [1,2]: &\quad f'(x) = x^2 - \frac{(x-1)^3}{3} && \Rightarrow \quad f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{12}, \\
x \in [2,3]: &\quad f'(x) = x^2 - \frac{(x-1)^3}{3} + \frac{(x-2)^4}{12} && \Rightarrow \quad f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{12} + \frac{(x-2)^5}{60}, \\
&\quad \text{usw.}
\end{aligned}$$

Die Integrationskonstanten wurden dabei so gewählt, dass $f(x)$ an den Intervallgrenzen stetig ist.

b) **Konstruktion per Laplace–Transformation:**
Laplace–Transformation der Gleichung liefert mit $\mathcal{L}[x^2](s) = 2/s^3$:

$$\mathcal{L}[f'(x)](s) + \mathcal{L}[f(x-1)](s) = \frac{2}{s^3}.$$

Mit $\mathcal{F}[f'(x)](s) = s \cdot \mathcal{F}[f(x)](s) - f(0) = s \cdot \mathcal{F}[f(x)](s)$ und $\mathcal{F}[f(x-1)] = e^{-s} \cdot \mathcal{F}[f(x)](s)$ entsteht im Laplace–Raum die Gleichung

$$s \cdot \mathcal{L}[f](s) + e^{-s} \cdot \mathcal{L}[f](s) = \frac{2}{s^3}$$

mit der Lösung

$$\mathcal{L}[f(x)](s) = \frac{1}{s + e^{-s}} \cdot \frac{2}{s^3} = \frac{2}{s^4} \cdot \frac{1}{1 - (-\frac{e^{-s}}{s})} = \frac{2}{s^4} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot e^{-k\cdot s}}{s^k} = 2 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot e^{-k\cdot s}}{s^{k+4}}.$$

Die Entwicklung in eine geometrische Reihe ist dabei für hinreichend großes $s$ (mit $|e^{-s}/s| < 1$) möglich. Mit unseren Tabellen findet man:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-k\cdot s}}{s^{k+4}}\right](x) = \begin{cases} \dfrac{(x-k)^{k+3}}{(k+3)!} & \text{für } x \geq n, \\ 0 & \text{für } x < n. \end{cases}$$

Damit ergibt sich die Lösung als die Reihe

$$f(x) = 2 \cdot \sum_{k=0}^{\lfloor x \rfloor} \frac{(-1)^k \cdot (x-k)^{k+1}}{(k+3)!},$$

wobei $\lfloor x \rfloor$ die übliche Gauss–Klammer (= die größte ganze Zahl $\leq x$) ist.