Übungsblatt 15

Das Semester ist abgeschlossen `;-)`. Für dieses Aufgabenblatt ist keine Korrektur mehr vorgesehen.

Aufgabe 65: (Die Laplace–Transformation periodischer Funktionen.)
Sei $f \in L_{1loc}([0,\infty))$ X-periodisch. Zeige, daß die Konvergenzhalbebene der Laplace–Transformation gegeben ist durch die Konvergenzabszisse $\alpha_f = 0$ und dass in der rechten Halbebene gilt:

$$F(s) = \mathcal{L}[f](s) = \frac{1}{1 - e^{-s\cdot X}} \cdot \int_0^X e^{-s\cdot x} \cdot f(x)\, dx.$$

(Vergleiche auch den Rechengang in Aufgabe 18.i.b). Gehört die Grenzlinie $\Re(s) = \alpha_f$ mit zum Konvergenzbereich? Offensichtlich ist durch die obige Darstellung gegebene Funktion $F(s)$ analytisch fortsetzbar auf ganz $\mathbb{C}$ bis auf abzählbar viele Polstellen erster Ordnung. Wo liegen diese?

Aufgabe 66: (Grenzwertsätze. Vorsicht: technisch!)
Zeige, dass bei Existenz des Grenzwerts auf der linken Seite des Gleichheitszeichens gilt:

$$a) \quad \lim_{x\to 0_+} f(x) = \lim_{s\to\infty} s\cdot\mathcal{L}[f](s), \qquad b) \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{s\to 0_+} s\cdot\mathcal{L}[f](s).$$

Die Grenzwerte im Laplace–Raum sind zu verstehen als $\lim\limits_{r\to\infty}$ bzw. $\lim\limits_{r\to 0}$ bzw. innerhalb von Winkelbereichen der Form $s = r\cdot e^{i\phi}$, $|\phi| \le \phi_0 < \pi/2$.

Aufgabe 67: (Eine einfache Laplace–Transformation)

a) Für $0 < \alpha \in \mathbb{R}$ definiere die „Gamma-Funktion“

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1}\cdot e^{-x}\, dx.$$

Zeige, dass die Funktionalgleichung $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\cdot\Gamma(\alpha)$ gilt und folgere $\Gamma(n+1) = n!$ für $n \in \mathbb{N}$.

b) Zeige für $-1 < \alpha \in \mathbb{R}$ und $\Re(s) > 0$: $\mathcal{L}[x^\alpha](s) = \dfrac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}$.

Aufgabe 68: (Laplace–Transformation als Methode zur Lösung von DGLen)

a) Löse die DGL

$$4\cdot x\cdot f''(x) + 2\cdot f'(x) + f(x) = 0$$

mit der Anfangsbedingung $f(0) = 0$.

Anleitung: Die Laplace–Transformierte der Lösung ist $\mathcal{L}[f](s) = \mathrm{const}\cdot e^{-1/(4\cdot s)}/s^{3/2}$. Das Urbild ergibt sich z.B. durch Nachschlagen in Tabellen zu

$$f(x) = \mathrm{const}\cdot\frac{2}{\sqrt{\pi}}\cdot\sin(\sqrt{x}\,).$$

b) Löse das Differentialgleichungssystem

$$f'(x) + g'(x) = 1, \quad g'(x) + g(x) = f'(x) - f(x)$$

mit gegebenen Anfangsbedingungen $f(0)$ und $g(0)$ durch Laplace–Transformation.

Aufgabe 70: (Inhomogene DGLen)
Betrachte das inhomogene Anfangswertproblem

$$y''(x) + 2 \cdot y'(x) + y(x) = h(x), \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

Leite mittels Laplace–Transformation die Lösungsformel $y(x) = \int_0^x (x - \xi) \cdot e^{\xi - x} \cdot h(\xi)\, d\xi$ her.

Aufgabe 71: (Eine einfache Differential–Differenzengleichung)
Finde eine kompakte Reihendarstellung der Lösung der „Funktionalgleichung“

$$\frac{d}{dx}\, f(x) + f(x-1) = x^2$$

mit $f(x) = 0$ für $x \leq 0$. Anleitung: Die Laplace–Transformierte der Lösung ergibt sich unmittelbar als

$$\mathcal{L}[f(x)](s) = \frac{2}{s^3} \cdot \frac{1}{s + e^{-s}} = 2 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{e^{-k \cdot s}}{s^{k+4}}.$$

Jeder Summand läßt sich über die Rechenregeln der Laplace–Transformation leicht zurücktransformieren.