Ü b u n g s b l a t t 14

Das Semester ist abgeschlossen `;-)`. Für dieses Aufgabenblatt ist keine Korrektur mehr vorgesehen.

Aufgabe 61: (Eine einfache Residuenformel)
Seien $a(z)$ und $b(z)$ auf einer Umgebung von z_0 analytisch, sei z_0 eine einfache Nullstelle von $b(z)$ (also $b(z_0) = 0$, $b'(z_0) \neq 0$).

a) Zeige: $\quad \mathrm{Res}_{\frac{a(z)}{b(z)}}(z_0) = \dfrac{a(z_0)}{b'(z_0)}.$

b) Berechne alle Residuen von $f(z) = \dfrac{1}{z^2+1}$.

c) Bestimme mittels b) das Integral $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+1}$.

Musterlösung:
a) Taylor–Entwicklung von Zähler und Nenner:

$$a(z) = a(z_0) + a'(z_0)\cdot(z-z_0) + \frac{a''(z_0)}{2!}\cdot(z-z_0)^2 + \cdots,$$

$$b(z) = \overbrace{b(z_0)}^{=0} + \overbrace{b'(z_0)}^{\neq 0}\cdot(z-z_0) + \frac{b''(z_0)}{2!}\cdot(z-z_0)^2 + \cdots = (z-z_0)\cdot\Big(b'(z_0) + \frac{b''(z_0)}{2!}\cdot(z-z_0) + \cdots\Big).$$

Wegen $b'(z_0) \neq 0$ ist

$$\frac{1}{b'(z_0) + \frac{b''(z_0)}{2!}\cdot(z-z_0) + \cdots} = \frac{1}{b'(z_0)} + c_1\cdot(z-z_0) + c_2\cdot(z-z_0)^2 + \cdots$$

eine bei z_0 analytische Funktion:

$$\Rightarrow \quad \frac{a(z)}{b(z)} = \frac{a(z_0) + a'(z_0)\cdot(z-z_0) + \frac{a''(z_0)}{2!}\cdot(z-z_0)^2 + \cdots}{z-z_0}\cdot\Big(\frac{1}{b'(z_0)} + c_1\cdot(z-z_0) + \cdots\Big)$$

$$= \Big(\frac{a(z_0)}{z-z_0} + a'(z_0) + \frac{a''(z_0)}{2!}\cdot(z-z_0) + \cdots\Big)\cdot\Big(\frac{1}{b'(z_0)} + c_1\cdot(z-z_0) + \cdots\Big)$$

$$= \frac{a(z_0)}{b'(z_0)\cdot(z-z_0)} + \Big(a(z_0)\cdot c_1 + \frac{a'(z_0)}{b'(z_0)}\Big) + O(z-z_0)\Big).$$

Das Residuum ist der Koeffizient von $(z-z_0)^{-1}$, also $a(z_0)/b'(z_0)$.

b) Die Funktion

$$\frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{(z-i)\cdot(z+i)}$$

hat zwei einfache Pole bei $\pm i$. Mit der obigen Formel für das Residuum ($a(z) = 1$, $b(z) = z^2+1$, $b'(z) = 2\cdot z$) gilt

$$\mathrm{Res}_f(z_0) = \frac{1}{2\cdot z_0} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Res}_f(i) = \frac{1}{2\cdot i} = -\frac{i}{2}, \quad \mathrm{Res}_f(-i) = \frac{1}{2\cdot(-i)} = \frac{i}{2}.$$

c) Nach Satz 3.38 des Skripts ist das Integral das $2 \cdot \pi \cdot i$-fache des Residuums in der oberen Halbebene:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+1} = 2 \cdot \pi \cdot i \cdot \mathrm{Res}_f(i) = 2 \cdot \pi \cdot i \cdot \frac{-i}{2} = \pi.$$

Aufgabe 62: (Residuen)

Bestimme alle Singularitäten und die entsprechenden Residuen für

$$a)\ \frac{\sin(z)}{z+z^2}, \quad b)\ \frac{z \cdot e^{i \cdot k \cdot z}}{(1+z^2)^2}, \quad c)\ \frac{1}{(z^2+a^2)^2}, \quad d)\ \frac{1}{e^z - 1}.$$

Musterlösung:

a) Die Funktion $\sin(z)/z = (z - z^3/3! + z^5/5! - \cdots)/z = 1 - z^2/3! + z^4/5! - \cdots$ ist auf ganz $\mathbb{C}$ analytisch. Der einzige Pol ist damit $z_0 = -1$:

$$\frac{\sin(z)}{z+z^2} = \frac{\sin(z)/z}{z+1}.$$

Nach Aufgabe 61.a) gilt $\mathrm{Res}_f(z_0) = \frac{\sin(z_0)/z_0}{1} = \sin(1)$.

b) Die Funktionen hat die beiden Pole zweiter Ordnung $\pm i$. Mit

$$f(z) = \frac{z \cdot e^{i \cdot k \cdot z}/(z+i)^2}{(z-i)^2}$$

gilt nach Bemerkung 3.35 des Skripts:

$$\mathrm{Res}_f(i) = \frac{d}{dz}\ \frac{z \cdot e^{i \cdot k \cdot z}}{(z+i)^2}\Big|_{z=i} = \frac{(i - z - k \cdot z + i \cdot k \cdot z^2) \cdot e^{i \cdot k \cdot z}}{(z+i)^3}\Big|_{z=i} = \frac{k \cdot e^{-k}}{4}$$

Mit

$$f(z) = \frac{z \cdot e^{i \cdot k \cdot z}/(z-i)^2}{(z+i)^2}$$

gilt nach Bemerkung 3.35 des Skripts:

$$\mathrm{Res}_f(-i) = \frac{d}{dz}\ \frac{z \cdot e^{i \cdot k \cdot z}}{(z-i)^2}\Big|_{z=-i} = \frac{(-i - z + k \cdot z + i \cdot k \cdot z^2) \cdot e^{i \cdot k \cdot z}}{(z-i)^3}\Big|_{z=-i} = -\ \frac{k \cdot e^{k}}{4}.$$

c) Die Funktionen hat die beiden Pole dritter Ordnung $\pm i \cdot a$. Mit

$$f(z) = \frac{1/(z+i \cdot a)^3}{(z-i \cdot a)^3}$$

gilt nach Bemerkung 3.35 des Skripts:

$$\mathrm{Res}_f(i \cdot a) = \frac{1}{2!} \cdot \frac{d^2}{dz^2}\ \frac{1}{(z+i \cdot a)^3}\Big|_{z=i \cdot a} = \frac{6}{(z+i \cdot a)^5}\Big|_{z=i \cdot a} = \frac{6}{32 \cdot i \cdot a^5} = -\ \frac{3 \cdot i}{16 \cdot a^5}.$$

Mit

$$f(z) = \frac{1/(z-i \cdot a)^3}{(z+i \cdot a)^3}$$

gilt nach Bemerkung 3.35 des Skripts:

$$\mathrm{Res}_f(-i\cdot a) = \frac{1}{2!}\cdot\frac{d^2}{dz^2}\ \frac{1}{(z-i\cdot a)^3}\Big|_{z=-i\cdot a} = \frac{6}{(z-i\cdot a)^5}\Big|_{z=-i\cdot a} = \frac{6}{32\cdot(-i)\cdot a^5} = \frac{3\cdot i}{16\cdot a^5}.$$

d) Die Lösungen von $e^z = 1$ sind $z_k = k\cdot 2\cdot\pi\cdot i$, $k\in\mathbb{Z}$. Hier liegen Pole erster Ordnung. Mit der Entwicklung

$$\frac{1}{e^z-1} = \frac{1}{\Big(1+(z-z_k)+O(z-z_k)^2\Big)-1} = \frac{1}{z-z_k}\cdot\frac{1}{1+O(z-z_k)} = \frac{1}{z-z_k}+\cdots$$

sind die Residuen = der Koeffizient von $(z-z_k)^{-1} = \mathrm{Res}_f(z_k) = 1\ \forall\ k\in\mathbb{Z}$.

Aufgabe 63: (Residuenkalkül: ein Fourier–Integral)

Zeige mit Hilfe des Residuenkalküls: $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\cdot k\cdot x}\,dx}{4+x^4} = \frac{\pi}{4}\cdot e^{-|k|}\cdot\Big(\cos(k)+\sin(|k|)\Big),\ k\in\mathbb{R}.$

Musterlösung:
Nach Satz 3.39 des Skripts gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} r(x)\cdot e^{i\cdot k\cdot x}\,dx = \frac{2\cdot\pi\cdot i}{|k|}\cdot\textstyle\sum_i \mathrm{Res}_f(z_i)\quad\text{mit}\quad f(z) = r\Big(\frac{z}{k}\Big)\cdot e^{i\cdot z},$$

wobei sich diese Summe über die Polstellen $z_i\in\mathbb{C}$ von $f(z)$ erstreckt, die in der oberen Halbebene liegen. Mit $r(z) = 1/(4+z^4)$ haben wir mit $\sqrt{\pm 2\cdot i} = 1\pm i$

$$f(z) = \frac{e^{i\cdot z}}{4+(z/k)^4} = \frac{k^4\cdot e^{i\cdot z}}{z^4+4\cdot k^4} = \frac{k^4\cdot e^{i\cdot z}}{(z^2+2\cdot i\cdot k^2)\cdot(z^2-2\cdot i\cdot k^2)}$$

$$= \frac{k^4\cdot e^{i\cdot z}}{(z-(1+i)\cdot k)\cdot(z+(1+i)\cdot k)\cdot(z-(1-i)\cdot k)\cdot(z+(1-i)\cdot k)}$$

$$= \frac{k^4\cdot e^{i\cdot z}}{(z-z_1)\cdot(z-z_2)\cdot(z-z_3)\cdot(z-z_4)}$$

zu betrachten. Für $k>0$ liegen die Pole

$$z_1 = (1+i)\cdot k,\quad z_4 = (-1+i)\cdot k$$

in der oberen Halbebene, für $k<0$ sind es die Pole

$$z_2 = -(1+i)\cdot k,\quad z_3 = (1-i)\cdot k.$$

Die Residuen berechnen sich durch Einsetzen von z_i in $(z-z_i)\cdot f(z)$ (aller Pole sind erster Ordnung):

$$\mathrm{Res}_f(z_1) = \frac{k^4\cdot e^{i\cdot z_1}}{(z_1-z_2)\cdot(z_1-z_3)\cdot(z_1-z_4)},\quad \mathrm{Res}_f(z_4) = \frac{k^4\cdot e^{i\cdot z_4}}{(z_4-z_1)\cdot(z_4-z_2)\cdot(z_4-z_3)},$$

$$\mathrm{Res}_f(z_2) = \frac{k^4\cdot e^{i\cdot z_2}}{(z_2-z_1)\cdot(z_2-z_3)\cdot(z_2-z_4)},\quad \mathrm{Res}_f(z_3) = \frac{k^4\cdot e^{i\cdot z_4}}{(z_3-z_1)\cdot(z_3-z_2)\cdot(z_3-z_4)}.$$

In der schreibintensiven = nervigen Auswertung kann man sich die Finger verbiegen oder –besser– MuPAD heranziehen:

```
>> z1 := (1 + I)*k: z2 := -z1:
>> z3 := (1 - I)*k: z4 := -z3:
>> Res1:= k^4*exp(I*z1)/(           (z1 - z2)*(z1 - z3)*(z1 - z4) ):
>> Res2:= k^4*exp(I*z2)/( (z2 - z1)          *(z2 - z3)*(z2 - z4) ):
>> Res3:= k^4*exp(I*z3)/( (z3 - z1)*(z3 - z2)          *(z3 - z4) ):
>> Res4:= k^4*exp(I*z4)/( (z4 - z1)*(z4 - z2)*(z4 - z3)           ):
```

Für $k > 0$:

```
>> assume(k > 0):
>> expand(rectform(Res1 + Res4));

                / k cos(k)   k sin(k) \
                | -------- + -------- | I (-1)
                \ 8 exp(k)   8 exp(k) /
```

Für $k < 0$:

```
>> assume(k < 0):
>> expand(rectform(Res2 + Res3));

              / k cos(k) exp(k)   k exp(k) sin(k) \
            I | --------------- - --------------- |
              \        8                 8        /
```

Also:

$$\sum_i \mathrm{Res}_f(z_i) = \begin{cases} \dfrac{-i \cdot k \cdot e^{-k}}{8} \cdot \Big(\cos(k) + \sin(k)\Big), & k > 0, \\ \dfrac{i \cdot k \cdot e^{k}}{8} \cdot \Big(\cos(k) - \sin(k)\Big), & k < 0, \end{cases}$$

Insgesamt ergibt sich in kompakter Form:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i \cdot k \cdot x}\, dx}{4 + k^4} = \frac{2 \cdot \pi \cdot i}{|k|} \cdot \textstyle\sum_i \mathrm{Res}_f(z_i) = \dfrac{2 \cdot \pi \cdot i}{|k|} \cdot \begin{cases} \dfrac{-i \cdot k \cdot e^{-k}}{8} \cdot \Big(\cos(k) + \sin(k)\Big), & k > 0 \\ \dfrac{i \cdot k \cdot e^{k}}{8} \cdot \Big(\cos(k) - \sin(k)\Big), & k < 0 \end{cases}$$

$$= \frac{\pi}{4} \cdot e^{-|k|} \cdot \Big(\cos(k) + \sin(|k|)\Big).$$

Aus Stetigkeitsgründen gilt diese Darstellung auch für $k = 0$.

Aufgabe 64: (Residuenkalkül)

Zeige mit Hilfe des Residuenkalküls: $\displaystyle\int_0^{2\cdot\pi} \frac{dx}{1 + \epsilon \cdot \cos(x)} = \frac{2 \cdot \pi}{\sqrt{1 - \epsilon^2}}$ für $-1 < \epsilon < 1$.

Musterlösung:
Nach Satz 3.40 des Skripts gilt

$$\int_0^{2\cdot\pi} r\Big(\cos(t), \sin(t)\Big)\, dt = 2 \cdot \pi \cdot i \cdot \textstyle\sum_i \mathrm{Res}_f(z_i)$$

mit

$$f(z) = \frac{1}{i \cdot z} \cdot r\left(\frac{1}{2} \cdot \Big(z + \frac{1}{z}\Big), \frac{1}{2 \cdot i} \cdot \Big(z - \frac{1}{z}\Big)\right),$$

wobei sich diese Summe über die Polstellen $z_i \in \mathbb{C}$ von $f(z)$ erstreckt, die im Inneren des Einheitskreises liegen. Mit $r(\cos(t), \sin(t)) = 1/(1 + \epsilon \cdot \cos(t))$ haben wir

$$f(z) = \frac{1}{i \cdot z} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\epsilon}{2} \cdot (z + \frac{1}{z})} = \frac{2}{i \cdot \epsilon} \cdot \frac{1}{z^2 + \frac{2}{\epsilon} \cdot z + 1} = \frac{2}{i \cdot \epsilon} \cdot \frac{1}{(z - z_+) \cdot (z - z_-)}$$

mit den beiden Polstellen

$$z_\pm = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - \epsilon^2}}{\epsilon}.$$

der Ordnung 1 zu betrachten. Es ist festzustellen, welche Pole innerhalb des komplexen Einheitskreises liegen. Mit $|\epsilon| < 1$ ergibt sich:

$$|z_+| = \left| \frac{-1 + \sqrt{1 - \epsilon^2}}{\epsilon} \right| = \left| \frac{(-1 + \sqrt{1 - \epsilon^2}) \cdot (1 + \sqrt{1 - \epsilon^2})}{\epsilon \cdot (1 + \sqrt{1 - \epsilon^2})} \right| = \frac{|\epsilon|}{1 + \sqrt{1 - \epsilon^2}} \leq |\epsilon|,$$

$$|z_-| = \left| \frac{-1 - \sqrt{1 - \epsilon^2}}{\epsilon} \right| = \left| \frac{1 + \sqrt{1 - \epsilon^2}}{\epsilon} \right| \geq \frac{1}{|\epsilon|} \geq 1.$$

Damit liegt z_+ innerhalb des Einheitskreises, z_- liegt ausserhalb. Es folgt:

$$\int_0^{2 \cdot \pi} \frac{dx}{1 + \epsilon \cdot \cos(x)} = 2 \cdot \pi \cdot i \cdot \mathrm{Res}_f(z_+).$$

Da z_+ ein Pol erster Ordnung ist, ergibt sich das Residuum durch Einsetzen von $z = z_+$ in $(z - z_+) \cdot f(z)$:

$$\mathrm{Res}_f(z_+) = \frac{2}{i \cdot \epsilon} \cdot \frac{1}{z_+ - z_-} = \frac{2}{i \cdot \epsilon} \cdot \frac{\epsilon}{2 \cdot \sqrt{1 - \epsilon^2}} = \frac{1}{i \cdot \sqrt{1 - \epsilon^2}},$$

und wir erhalten letztlich

$$\int_0^{2 \cdot \pi} \frac{dx}{1 + \epsilon \cdot \cos(x)} = 2 \cdot \pi \cdot i \cdot \mathrm{Res}_f(z_+) = \frac{2 \cdot \pi}{\sqrt{1 - \epsilon^2}}.$$

Aufgabe 65: (Residuenkalkül)

Zeige mit Hilfe des Residuenkalküls: $\displaystyle\int_0^{2 \cdot \pi} \frac{\sin^2(x)\, dx}{2 - \cos(x)} = 2 \cdot \pi \cdot \frac{26 \cdot \sqrt{3} - 45}{7 \cdot \sqrt{3} - 12}.$

Musterlösung:
Nach Satz 3.40 des Skripts gilt

$$\int_0^{2 \cdot \pi} r\Big(\cos(t), \sin(t)\Big)\, dt = 2 \cdot \pi \cdot i \cdot \textstyle\sum_i \mathrm{Res}_f(z_i)$$

mit

$$f(z) = \frac{1}{i \cdot z} \cdot r\left(\frac{1}{2} \cdot \left(z + \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2 \cdot i} \cdot \left(z - \frac{1}{z}\right)\right),$$

wobei sich diese Summe über die Polstellen $z_i \in \mathbb{C}$ von $f(z)$ erstreckt, die im Inneren des Einheitskreises liegen. Mit $r(\cos(t), \sin(t)) = 1/(1 + \epsilon \cdot \cos(t))$ haben wir

$$f(z) = \frac{1}{i \cdot z} \cdot \frac{\left(\frac{1}{2 \cdot i} \cdot \left(z - \frac{1}{z}\right)\right)^2}{2 - \frac{1}{2} \cdot (z + \frac{1}{z})} = \frac{1}{2 \cdot i} \cdot \frac{(z^2 - 1)^2}{z^2 \cdot (z^2 - 4 \cdot z + 1)} = \frac{1}{2 \cdot i} \cdot \frac{(z^2 - 1)^2}{z^2 \cdot (z - z_-) \cdot (z - z_+)}$$

mit der Polstelle $z_0 = 0$ der Ordnung 2 und den beiden Polstellen $z_\pm = 2 \pm \sqrt{3}$. der Ordnung 1 zu betrachten. Die Pole $z_0 = 0$ und $z_- = 2 - \sqrt{3} \approx 0.268$ liegen innerhalb des Einheitskreises. Da z_- ein Pol erster Ordnung ist, ergibt sich das Residuum durch Einsetzen von $z = z_-$ in $(z - z_-) \cdot f(z)$:

$$\mathrm{Res}_f(z_-) = \frac{1}{2 \cdot i} \cdot \frac{(z_-^2 - 1)^2}{z_-^2 \cdot (z_- - z_+)} = i \cdot \frac{-12 \cdot \sqrt{3} + 21}{7 \cdot \sqrt{3} - 12}.$$

Das Residuum des Pols $z_0 = 0$ zweiter Ordnung ist

$$\mathrm{Res}_f(z_0) = \frac{d}{dz} \; \frac{1}{2 \cdot i} \cdot \frac{(z^2 - 1)^2}{z^2 - 4 \cdot z + 1}|_{z=0} = -2 \cdot i.$$

Wir erhalten letztlich

$$\int_0^{2 \cdot \pi} \frac{\sin^2(x) \; dx}{2 - \cos(x)} = 2 \cdot \pi \cdot i \cdot \Big(\mathrm{Res}_f(z_0) + \mathrm{Res}_f(z_-)\Big) = 2 \cdot \pi \cdot \Big(2 - \frac{-12 \cdot \sqrt{3} + 21}{7 \cdot \sqrt{3} - 12}\Big) = 2 \cdot \pi \cdot \frac{26 \cdot \sqrt{3} - 45}{7 \cdot \sqrt{3} - 12}.$$