Mathe für Physiker III — Wintersemester 02/03
Walter Oevel — 10. 2. 2003

Übungsblatt 14

Das Semester ist abgeschlossen ;-). Für dieses Aufgabenblatt ist keine Korrektur mehr vorgesehen.

Aufgabe 61: (Eine einfache Residuenformel)
Seien $a(z)$ und $b(z)$ auf einer Umgebung von z_0 analytisch, sei z_0 eine einfache Nullstelle von $b(z)$ (also $b(z_0) = 0$, $b'(z_0) \neq 0$).

a) Zeige: $\mathrm{Res}_{\frac{a(z)}{b(z)}}(z_0) = \dfrac{a(z_0)}{b'(z_0)}$.

b) Berechne alle Residuen von $f(z) = \dfrac{1}{z^2+1}$.

c) Bestimme mittels b) das Integral $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+1}$.

Aufgabe 62: (Residuen)
Bestimme alle Singularitäten und die entsprechenden Residuen für

$$a)\ \frac{\sin(z)}{z+z^2}, \quad b)\ \frac{z\cdot e^{i\cdot k\cdot z}}{(1+z^2)^2}, \quad c)\ \frac{1}{(z^2+a^2)^2}, \quad d)\ \frac{1}{e^z-1}.$$

Aufgabe 63: (Residuenkalkül: ein Fourier–Integral)
Zeige mit Hilfe des Residuenkalküls: $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\cdot k\cdot x}\,dx}{4+x^4} = \frac{\pi}{4}\cdot e^{-|k|}\cdot \Big(\cos(k)+\sin(|k|)\Big),\ k\in\mathbb{R}.$

Aufgabe 64: (Residuenkalkül)
Zeige mit Hilfe des Residuenkalküls: $\displaystyle\int_0^{2\cdot\pi} \frac{dx}{1+\epsilon\cdot\cos(x)} = \frac{2\cdot\pi}{\sqrt{1-\epsilon^2}}$ für $-1<\epsilon<1$.

Aufgabe 65: (Residuenkalkül)
Zeige mit Hilfe des Residuenkalküls: $\displaystyle\int_0^{2\cdot\pi} \frac{\sin^2(x)\,dx}{2-\cos(x)} = 2\cdot\pi\cdot\frac{26\cdot\sqrt{3}-45}{7\cdot\sqrt{3}-12}.$