Übungsblatt 13

Abgabe von $*$ Aufgaben bis zum 10.2., 11^{oo} Uhr, im Zettelkasten auf dem D1.

Aufgabe 57*: (Kurvenintegrale und Gradientenfelder. 10 Bonuspunkte)
Für welche Werte der Parameter α, β hat das Vektorfeld $\vec{f}(x,y) = \begin{pmatrix} x^2 + \alpha \cdot y \\ y^2 + \beta \cdot x \end{pmatrix}$ (mit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$) ein Potential $P(x,y)$ mit $\vec{f} = \mathrm{grad}_{x,y} P$? Bestimme P!

Musterlösung:
Seien $f_1 = x^2 + \alpha \cdot y$, $f_2 = y^2 + \beta \cdot x$ die beiden Koeffizienten des Vektorfeldes. Aus der Mathe II ist bekannt, dass $\vec{f}$ genau dann (lokal) ein Potential hat, wenn

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{\partial f_2}{\partial x}$$

gilt (dies ist genau die Symmetrie $P_{xy} = P_{yx}$ der zweiten Ableitung, wenn man hypothetisch ein Potential mit $f_1 = P_x$, $f_2 = P_y$ annimmt). Für unser Vektorfeld ist diese Bedingung:

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = \alpha \overset{(!)}{=} \frac{\partial f_2}{\partial x} = \beta.$$

Ein Potential kann also nur für $\alpha = \beta$ existieren. Man kann das Potential nun entweder raten:

$$f_1 = x^2 + \alpha y = P_x \quad \Rightarrow \quad P(x,y) = \frac{x^3}{3} + \alpha \cdot x \cdot y + c_1(y),$$

$$f_2 = y^2 + \alpha x = P_y \quad \Rightarrow \quad P(x,y) = \frac{y^3}{3} + \alpha \cdot x \cdot y + c_2(x),$$

$$\Rightarrow \quad P(x,y) = \frac{x^3 + y^3}{3} + \alpha \cdot x \cdot y + c_3$$

oder (systematisch) über ein Kurvenintegral bestimmen:

$$P(\vec{x}) = \int_{\vec{x}_0}^{\vec{x}} {}_{\Gamma} \langle \vec{f}(\vec{x}), d\vec{x} \rangle$$

mit einem beliebigen Punkt $\vec{x}_0$ und einem beliebigen Weg Γ von $\vec{x}_0$ nach $\vec{x}$. Dies führt natürlich zum selben Ergebnis wie oben.

Aufgabe 58*: (Der Mittelwertsatz. 10 Bonuspunkte)
Sei $f(z)$ analytisch auf einem Gebiet, das den Kreis um z_0 mit Radius r umfasst. Zeige:

$$f(z_0) = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_0^{2 \cdot \pi} f(z_0 + r \cdot e^{i \cdot t})\, dt.$$

Anschauliche Interpretation: der Mittelwert der Funktionswerte auf einem Kreis stimmt mit dem Funktionswert am Mittelpunkt überein.

Musterlösung:
Die Cauchysche Integraldarstellung

$$f(z_0) = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot i} \cdot \oint_\Gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z_0}\, d\xi$$

mit einem durch $\xi(t) = z_0 + r \cdot e^{i \cdot t}$, $t \in [0, 2 \cdot \pi]$ parametrisierten Kreis Γ liefert sofort

$$f(z_0) = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot i} \cdot \int_0^{2 \cdot \pi} \frac{f(z_0 + r \cdot e^{i \cdot t})}{r \cdot e^{i \cdot t}} \cdot \underbrace{i \cdot r \cdot e^{i \cdot t}}_{\frac{d\xi(t)}{dt}}\, dt = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_0^{2 \cdot \pi} f(z_0 + r \cdot e^{i \cdot t})\, dt.$$

Aufgabe 59*: (Der Fundamentalsatz der Algebra. 10 Bonuspunkte)

a) Sei $U \in \mathbb{C}$ ein offenes Holomorphie–Gebiet von $f(z)$. Sei $K \subset U$ eine beliebiger Kreisring mit Radius r. Nach Satz 3.28 des Skripts stellt die Taylor–Reihe $\sum_k c_k \cdot (z - z_0)^k$ von $f(z)$ um den Mittelpunkt z_0 von K die Funktion $f(z)$ für alle z in K dar. Folgere, dass für die Taylor–Koeffizienten die Abschätzung $|c_k| \leq \max_{z \in K} |f(z)|/r^k$ gilt.

b) Folgere, dass eine auf ganz $\mathbb{C}$ analytische und beschränkte Funktion $f(z)$ konstant sein muss (der „Satz von Liouville"). Anleitung: die in a) gezeigte Abschätzung für die Taylor–Koeffizienten bzgl. des Nullpunktes gilt für jedes $r > 0$.

c) Folgere folgende Version des Fundamentalsatzes der Algebra: jedes Polynom vom Grad $n \geq 1$ hat mindestens eine komplexe Nullstelle. Anleitung: angenommen, es gäbe ein Polynom $p(z)$ vom Grad $n \geq 1$ ohne eine komplexe Nullstelle. Die Funktion $f(z) = 1/p(z)$ wäre dann auf ganz $\mathbb{C}$ analytisch. Außerdem ist sie beschränkt.

Anmerkung: Hat ein Polynom $p(z)$ vom Grad n eine Nullstelle $z_1 \in \mathbb{C}$, so läßt sich leicht zeigen, dass man den Faktor $z - z_1$ abspalten kann: es gilt $p(z) = (z - z_1) \cdot p_1(z)$ mit einem Polynom $p_1(z)$ mit $\text{grad}(p_1) = \text{grad}(p) - 1$. Ist $\text{grad}(p_1) > 1$, so besitzt dieses Restpolynom wiederum eine Nullstelle z_2, die abgespalten werden kann. Man erhält so rekursiv eine Zerlegung $p(z) = (z - z_1) \cdot (z - z_2) \cdot \ldots \cdot (z - z_n) \cdot p_n$ mit einem konstanten Restpolynom p_n. Aus c) folgt also unmittelbar die in Bemerkung 3.31 des Skriptes formulierte allgemeine Version des Fundamentalsatzes.

Musterlösung:
a) Nach Satz 3.28 gilt

$$c_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot i} \cdot \oint_K \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{k+1}}\, d\xi.$$

Mit der Parametrisierung $\xi(t) = z_0 + r \cdot e^{i \cdot t}$, $t \in [0, 2 \cdot \pi]$ folgt

$$c_k = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot i} \cdot \int_0^{2 \cdot \pi} \frac{f(\xi(t))}{r^{(k+1)} \cdot e^{i \cdot (k+1) \cdot t}} \cdot r \cdot i \cdot e^{i \cdot t}\, dt = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_0^{2 \cdot \pi} \frac{f(\xi(t))}{r^k \cdot e^{i \cdot k \cdot t}}\, dt$$

$$\Rightarrow \quad |c_k| \leq \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_0^{2 \cdot \pi} \left| \frac{f(\xi(t))}{r^k \cdot e^{i \cdot k \cdot t}} \right| dt \leq \frac{\max\{|f(z)|; z \in K\}}{r^k}.$$

b) Wähle in a) als Holomorphie–Gebiet $U = \mathbb{C}$, sei K ein Kreis um den Ursprung mit einem beliebigen Radius r. Für die Taylor–Koeffizienten von $f(z)$ gilt mit a):

$$|c_k| \leq \frac{\max\{|f(z)|; z \in K\}}{r^k} \leq \frac{\max\{|f(z)|; z \in \mathbb{C}\}}{r^k}.$$

Da r beliebig wählbar ist, folgt $|c_k| = 0$ für alle $k \neq 0$. Die Taylor–Reihe besteht also nur aus dem konstanten Term. Andererseits stellt sie $f(z)$ dar, d.h., eine beschränke überall analytische Funktion muss konstant sein.

c) Für $|z| \geq 1$ gilt für jedes Polynom vom Grad n (also $a_n \neq 0$):

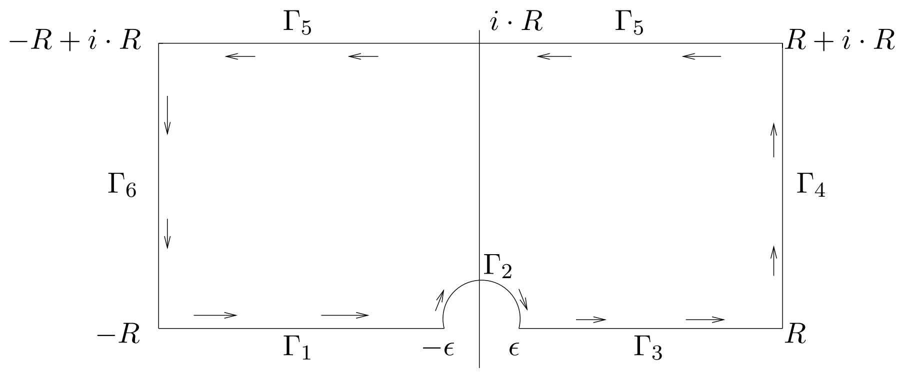
$$|p(z)| = \left|a_n \cdot z^n + \cdots + a_1 \cdot z + a_0\right| = \underbrace{|z|^n}_{\geq 1} \cdot \left|a_n + \frac{a_{n-1}}{z} + \cdots + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \frac{a_0}{z^n}\right|$$

$$\geq \left|a_n + \frac{a_{n-1}}{z} + \cdots + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \frac{a_0}{z^n}\right| \geq \frac{|a_n|}{2},$$

wenn nur $|z|$ genügend groß ist. Damit gilt $|f(z)| = |1/p(z)| \leq |2|/|a_n|$ für alle hinreichend grossen Punkte z. In endlichen Bereichen hat $|f(z)|$ ein Maximum, wenn p keine Nullstelle hat, also f stetig ist. Insgesamt ist $f(z)$ damit auf ganz $\mathbb{C}$ beschränkt. Nach b) muss $f(z) = 1/p(z)$ konstant sein, wenn p keine Nullstelle hat. Also ist auch $p(z)$ konstant im Widerspruch zur Annahme, dass der Polynomgrad von p mindestens 1 sein soll.

Aufgabe 60*: (Berechnung eines bestimmten Integrals. 10 Bonuspunkte)

Betrachte $\oint_\Gamma f(z)dz$ mit $f(z) = e^{i \cdot z}/z$ und der folgenden Kontur $\Gamma = \Gamma_1 \cup \cdots \cup \Gamma_6$:



a) Zeige: $\displaystyle\int_{\Gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\Gamma_3} f(z)\,dz = 2 \cdot i \cdot \int_\epsilon^R \frac{\sin(x)}{x}\,dx.$

b) Zeige: $\displaystyle\lim_{\epsilon \to 0} \int_{\Gamma_2} f(z)\,dz = -i \cdot \pi.$

c) Zeige: $\displaystyle\lim_{R \to \infty} \int_{\Gamma_i} f(z)\,dz = 0, \quad i = 4, 5, 6.$

d) Folgere aus a) – c): $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}.$

Musterlösung:
a)

$$\int_{\Gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\Gamma_3} f(z)\,dz = \int_{-R}^{-\epsilon} \frac{e^{i\cdot x}}{x}\,dx + \int_{\epsilon}^{R} \frac{e^{i\cdot x}}{x}\,dx = \int_{\epsilon}^{R} \frac{e^{i\cdot x} - e^{-i\cdot x}}{x}\,dx = 2\cdot i\cdot \int_{\epsilon}^{R} \frac{\sin(x)}{x}\,dx,$$

wobei das erste Integral über $x \to -x$ vom Intervall $[-R, -\epsilon]$ auf das Intervall $[\epsilon, R]$ transformiert wurde.
b) Wir parametrisieren den Halbkreis Γ_2 von $-\epsilon \in \mathbb{R}$ bis $\epsilon \in \mathbb{R}$ durch $\xi(t) = \epsilon \cdot e^{i\cdot(\pi - t)}$, $t \in [0, \pi]$:

$$\int_{\Gamma_2} \frac{e^{i\cdot z}}{z}\,dz = \int_0^{\pi} \frac{e^{i\cdot\epsilon\cdot e^{i\cdot(\pi-t)}}}{\epsilon\cdot e^{i\cdot(\pi-t)}} \cdot \underbrace{\epsilon\cdot(-i)\cdot e^{i\cdot(\pi-t)}}_{\frac{d\xi(t)}{dt}}\,dt = (-i)\cdot\int_0^{\pi} e^{i\cdot\epsilon\cdot e^{i\cdot(\pi-t)}}\,dt.$$

Wir brauchen nur den Grenzwert des Integrals für $\epsilon \to 0$:

$$\lim_{\epsilon\to 0} \int_{\Gamma_2} \frac{e^{i\cdot z}}{z}\,dz = (-i)\cdot\int_0^{\pi} \lim_{\epsilon\to 0} e^{i\cdot\epsilon\cdot e^{i\cdot(\pi-t)}}\,dt = (-i)\cdot\int_0^{\pi} e^0\,dt = -i\cdot\pi.$$

c) Wir parametrisieren Γ_4 durch $\xi(t) = R + i\cdot t$, $t \in [0, R]$:

$$\int_{\Gamma_4} \frac{e^{i\cdot z}}{z}\,dz = \int_0^{R} \frac{e^{i\cdot(R+i\cdot t)}}{R+i\cdot t}\cdot i\,dt = \int_0^{R} \frac{e^{-t}\cdot e^{i\cdot R}}{R+i\cdot t}\cdot i\,dt,$$

also

$$\left|\int_{\Gamma_4} \frac{e^{i\cdot z}}{z}\,dz\right| \le \int_0^{R} \frac{e^{-t}}{|R+i\cdot t|}\,dt \le \int_0^{R} \frac{e^{-t}}{R}\,dt = \frac{1-e^{-R}}{R} \quad \overset{R\to\infty}{\to} \quad 0.$$

Wir parametrisieren Γ_6 durch $\xi(t) = -R + i\cdot(R-t)$, $t \in [0, R]$ und erhalten analog:

$$\int_{\Gamma_6} \frac{e^{i\cdot z}}{z}\,dz = \int_0^{R} \frac{e^{i\cdot(-R+i\cdot(R-t))}}{-R+i\cdot(R-t)}\cdot i\,dt = \int_0^{R} \frac{e^{-(R-t)}\cdot e^{-i\cdot R}}{-R+i\cdot(R-t)}\cdot i\,dt,$$

also

$$\left|\int_{\Gamma_6} \frac{e^{i\cdot z}}{z}\,dz\right| \le \int_0^{R} \frac{e^{-(R-t)}}{|-R+i\cdot(R-t)|}\,dt \le \int_0^{R} \frac{e^{-(R-t)}}{R}\,dt = \frac{1-e^{-R}}{R} \quad \overset{R\to\infty}{\to} \quad 0.$$

Wir parametrisieren Γ_5 durch $\xi(t) = R - t + i\cdot R$, $t \in [0, 2\cdot R]$:

$$\int_{\Gamma_5} \frac{e^{i\cdot z}}{z}\,dz = \int_0^{2\cdot R} \frac{-e^{i\cdot(R-t+i\cdot R)}}{R-t+i\cdot R}\,dt = \int_0^{2\cdot R} \frac{-e^{-R}\cdot e^{i\cdot(R-t)}}{R-t+i\cdot R}\,dt,$$

also

$$\left|\int_{\Gamma_5} \frac{e^{i\cdot z}}{z}\,dz\right| \le \int_0^{2\cdot R} \frac{e^{-R}\cdot|e^{i\cdot(R-t)}|}{|R-t+i\cdot R|}\,dt \le \int_0^{2\cdot R} \frac{e^{-R}}{R}\,dt = 2\cdot e^{-R} \quad \overset{R\to\infty}{\to} \quad 0.$$

d) Für jedes $\epsilon > 0$ und $0 < R < \infty$ liefert der Cauchysche Integralsatz die Gleichung

$$\oint_{\Gamma} f(z)\,dz = \sum_{i=1}^{6} \int_{\Gamma_i} f(z)\,dz = 0,$$

denn der Integrand ist im Innern des von Γ eingeschlossenen Gebiets analytisch. Im Grenzwert $\epsilon \to 0$ und $R \to \infty$ verbleibt mit a) – c) die Gleichung

$$\int_{\Gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\Gamma_3} f(z)\,dz \quad + \quad \int_{\Gamma_2} f(z)\,dz = \underbrace{2\cdot i\cdot\int_0^{\infty} \frac{\sin(x)}{x}\,dx}_{\int_{\Gamma_1}+\int_{\Gamma_3}} \underbrace{-\ i\cdot\pi}_{\int_{\Gamma_2}} = 0$$

also

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(x)}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}.$$
