

Ü b u n g s b l a t t 11

Abgabe von * Aufgaben bis zum 27.1., 11⁰⁰ Uhr, im Zettelkasten auf dem D1.

Ich bin vom 14.1. – 20.1. nicht in Paderborn. Die entsprechenden Vorlesungen finden nicht statt und werden später nachgeholt. Der Übungstermin am 13.1. findet wie gewohnt statt.

Aufgabe 46*: (Legendre–Polynome: die „Multipolentwicklung“. 10 Bonuspunkte)

Sei $\rho(\vec{y}) \geq 0$ die Massenverteilung innerhalb eines Planeten P , der Ursprung des Koordinatensystems liege im Schwerpunkt. Die Masse im Volumen dV an der Stelle \vec{y} erzeugt an der Stelle \vec{x} das Gravitationspotential $-\gamma \cdot \frac{\rho(\vec{y}) dV}{\|\vec{x}-\vec{y}\|}$ (mit der Gravitationskonstanten γ). Das Gravitationspotential des Planeten ist damit durch

$$\phi(\vec{x}) = -\gamma \cdot \int_{\vec{y} \in P} \frac{\rho(\vec{y}) dV}{\|\vec{x} - \vec{y}\|}$$

gegeben.

a) Finde Entwicklungskoeffizienten m_1, m_2, \dots mit

$$\phi(\vec{x}) \approx -\gamma \cdot \left(\frac{m_1}{\|\vec{x}\|} + \frac{m_2}{\|\vec{x}\|^2} + \dots \right).$$

b) Folgere, dass in grossem Abstand $\|\vec{x}\|$ vom Planeten das Gravitationspotential durch

$$\phi(\vec{x}) \approx -\gamma \cdot \frac{\text{Gesamtmasse des Planeten}}{\|\vec{x}\|}$$

gegeben ist.

c) Zeige, dass bei rotationsymmetrischer Massenverteilung $\rho(\vec{y}) = \rho(\|\vec{y}\|)$ die Näherungsformel in b) das Potential exakt darstellt.

Anleitung: Lege das Koordinatensystem so, dass \vec{x} über dem Nordpol des Planeten liegt und betrachte das Integral in Kugelkoordinaten (r, ϕ, θ) . Benutze Aufgabe 43.g).

Musterlösung:

a) In Kugelkoordinaten

$$\vec{y} = (r \cdot \cos(\phi) \cdot \sin(\theta), r \cdot \sin(\phi) \cdot \sin(\theta), r \cdot \cos(\theta)), \quad r \geq 0, \phi \in [0, 2 \cdot \pi), \theta \in [0, \pi]$$

gilt

$$dV = r^2 \cdot \sin(\theta) dr d\phi d\theta.$$

Man erhält die Integraldarstellung

$$\phi(\vec{x}) = -\gamma \cdot \int_{\vec{y} \in P} \frac{\rho(\vec{y}) dV}{\|\vec{x} - \vec{y}\|} = -\gamma \cdot \int_{\vec{y} \in P} \frac{\rho(\vec{y})}{\|\vec{x} - \vec{y}\|} \cdot r^2 \cdot \sin(\theta) dr d\phi d\theta.$$

Der Punkt $\|\vec{x}\|$ wird auf die y_3 -Achse gelegt: $\vec{x} = (0, 0, \|\vec{x}\|)$. Damit gilt

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \|\vec{x}\| \cdot r \cdot \cos(\theta). \quad (\#)$$

Nach Aufgabe 43.g) gilt

$$\frac{1}{\|\vec{x} - \vec{y}\|} = \frac{1}{\|\vec{x}\|} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} P_k(\cos(\theta)) \cdot \left(\frac{r}{\|\vec{x}\|}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{P_k(\cos(\theta)) \cdot r^k}{\|\vec{x}\|^{k+1}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{P_{k-1}(\cos(\theta)) \cdot r^{k-1}}{\|\vec{x}\|^k}$$

(das Argument der Legendre–Polynome P_k ist $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle / (\|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|)$, das mit (#) zu $\cos(\theta)$ berechnet wurde). Dies liefert die Integraldarstellung

$$\phi(\vec{x}) = -\gamma \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\|\vec{x}\|^k} \cdot \underbrace{\int_{\vec{y} \in P} \rho(\vec{y}) \cdot P_{k-1}(\cos(\theta)) \cdot r^{k+1} \cdot \sin(\theta) \, dr \, d\phi \, d\theta}_{m_k} = -\gamma \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{m_k}{\|\vec{x}\|^k}$$

mit

$$m_k = \int_{\vec{y} \in P} \rho(\vec{y}) \cdot P_{k-1}(\cos(\theta)) \cdot r^{k+1} \cdot \sin(\theta) \, dr \, d\phi \, d\theta, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

b) Für großes $\|\vec{x}\|$ gilt

$$\phi(\vec{x}) = -\gamma \cdot \left(\frac{m_1}{\|\vec{x}\|} + \frac{m_2}{\|\vec{x}\|^2} + \dots \right) \approx -\gamma \cdot \frac{m_1}{\|\vec{x}\|},$$

wobei mit $P_0(\cos(\theta)) = 1$ gilt:

$$m_1 = \int_{\vec{y} \in P} \rho(\vec{y}) \cdot r^2 \cdot \sin(\theta) \, dr \, d\phi \, d\theta = \int_{\vec{y} \in P} \rho(\vec{y}) \, dV = \text{Gesamtmasse des Planeten.}$$

c) Es gelte $\rho(\vec{y}) = \rho(r, \phi)$, d.h., die Dichte hänge nicht vom Polarwinkel θ ab. (Die in der Aufgabenstellung geforderte Rotationssymmetrie $\rho(\vec{y}) = \rho(r)$ ist ein Spezialfall). Es folgt:

$$\begin{aligned} m_k &= \int_{\vec{y} \in P} \rho(r, \phi) \cdot P_{k-1}(\cos(\theta)) \cdot r^{k+1} \cdot \sin(\theta) \, dr \, d\phi \, d\theta, \\ &= \left(\int_{\vec{y} \in P} \rho(r, \phi) \cdot r^{k+1} \cdot dr \, d\phi \right) \cdot \left(\int_0^\pi P_{k-1}(\cos(\theta)) \cdot \sin(\theta) \, d\theta \right). \end{aligned}$$

Mit $\xi = \cos(\theta)$ ergibt sich mit der Orthogonalität der Legendre–Polynome über dem Intervall $[0, 1]$:

$$\int_0^\pi P_{k-1}(\cos(\theta)) \cdot \sin(\theta) \, d\theta = - \int_1^{-1} P_{k-1}(\xi) \, d\xi = \int_{-1}^1 \underbrace{1}_{P_0(\xi)} \cdot P_{k-1}(\xi) \, d\xi = \langle P_0, P_{k-1} \rangle = 2 \cdot \delta_{k1}.$$

Also gilt $m_2 = m_3 = \dots = 0$, d.h., die in b) gefundene asymptotische Näherung ist bei rotationssymmetrischer Massenverteilung die exakte Darstellung.

Aufgabe 47*: (Die Wielandt–Iteration. 10 Bonuspunkte)

Sei L ein invertierbarer linearer Operator mit einem vollständigen Orthonormalsystem (ψ_k) von Eigenfunktionen: $L\psi_k = \lambda_k \cdot w \cdot \psi_k$. Alle Eigenwerte seien einfach. Wähle ein $\mu \in \mathbb{R}$, das mit keinem der Eigenwerte übereinstimmt und eine beliebige Startfunktion $\psi^{(0)}$. Iteriere

$$\psi^{(i+1)} = (L - \mu \cdot w)^{-1} \cdot w \cdot \psi^{(i)}, \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

Sei $\psi^{(0)} = \sum_k c_k^{(0)} \cdot \psi_k$ die Fourier–Entwicklung der Startfunktion bzgl. der Eigenfunktionen.

a) Zeige: $\psi^{(i)} = \sum_k \frac{c_k^{(0)}}{(\lambda_k - \mu)^i} \cdot \psi_k$.

b) Sei k_0 der Index des Eigenwertes, dem der Wert μ am nächsten liegt:

$$|\lambda_{k_0} - \mu| = \min_k \{|\lambda_k - \mu|\}.$$

Setze voraus, dass dieses Minimum von genau einem λ_{k_0} angenommen wird, setze weiterhin $c_{k_0}^{(0)} \neq 0$ voraus. Zeige: für großes i gilt

$$\frac{\psi^{(i)}}{\|\psi^{(i)}\|_{2w}} \approx \left(\frac{|\lambda_{k_0} - \mu|}{\lambda_{k_0} - \mu} \right)^i \cdot \frac{c_{k_0}^{(0)}}{|c_{k_0}^{(0)}|} \cdot \psi_{k_0} = (\pm 1)^i \cdot \frac{c_{k_0}^{(0)}}{|c_{k_0}^{(0)}|} \cdot \psi_{k_0}.$$

In Worten: die „Wielandt–Iteration“ konvergiert gegen den Eigenvektor zu demjenigen Eigenwert, der dem gewählten Parameter μ am nächsten liegt.

Musterlösung:

a) Durch $\psi^{(i)} = \sum_k \frac{c_k^{(0)}}{(\lambda_k - \mu)^i} \cdot \psi_k$ wird in der Tat die Iteration erfüllt:

$$\begin{aligned} (L - \mu \cdot w) \psi^{(i)} &= \sum_k \frac{c_k^{(0)}}{(\lambda_k - \mu)^i} \cdot (L - \mu \cdot w) \psi_k = \sum_k \frac{c_k^{(0)}}{(\lambda_k - \mu)^i} \cdot (\lambda_k - \mu) \cdot w \cdot \psi_k \\ &= w \cdot \sum_k \frac{c_k^{(0)}}{(\lambda_k - \mu)^{i-1}} \cdot \psi_k = w \cdot \psi^{(i-1)}. \end{aligned}$$

Auch der Start mit $i = 0$ ist OK:

$$\sum_k \frac{c_k^{(0)}}{(\lambda_k - \mu)^0} \cdot \psi_k = \sum_k c_k^{(0)} \cdot \psi_k = \text{Startvektor } \psi^{(0)}.$$

b) Es gilt (Parsevalsche Gleichung)

$$\langle \psi^{(i)}, \psi^{(i)} \rangle_w = \sum_{k'} \frac{|c_{k'}^{(0)}|^2}{(|\lambda_{k'} - \mu|^i)^2} \cdot \underbrace{\langle \psi_{k'}, \psi_{k'} \rangle_w}_{=1} = \sum_{k'} \frac{|c_{k'}^{(0)}|^2}{(|\lambda_{k'} - \mu|^i)^2},$$

also

$$\frac{\psi^{(i)}}{\|\psi^{(i)}\|_{2w}} = \sum_k \frac{\frac{c_k^{(0)}}{(\lambda_k - \mu)^i}}{\sqrt{\sum_{k'} \frac{|c_{k'}^{(0)}|^2}{(|\lambda_{k'} - \mu|^i)^2}}} \cdot \psi_k =: \sum_k c_k^{(i)} \cdot \psi_k.$$

Für die Entwicklungskoeffizienten der normierten Wielandt–Iterierten $\psi^{(i)} / \|\psi^{(i)}\|_{2w}$ gilt

$$c_k^{(i)} = \frac{\frac{c_k^{(0)}}{(\lambda_k - \mu)^i}}{\sqrt{\sum_{k'} \frac{|c_{k'}^{(0)}|^2}{(|\lambda_{k'} - \mu|^i)^2}}} = \frac{\frac{c_k^{(0)}}{(\lambda_k - \mu)^i}}{\sqrt{(|\lambda_{k_0} - \mu|^i)^2 + \sum_{k' \neq k_0} \frac{|c_{k'}^{(0)}|^2}{(|\lambda_{k'} - \mu|^i)^2}}}$$

$$= \frac{\frac{c_k^{(0)}}{(\lambda_k - \mu)^i}}{\frac{|c_{k_0}^{(0)}|}{|\lambda_{k_0} - \mu|^i} \cdot \sqrt{1 + \sum_{k' \neq k_0} \frac{|c_{k'}^{(0)}|^2}{|c_{k_0}^{(0)}|^2} \cdot \left(\frac{|\lambda_{k_0} - \mu|^i}{|\lambda_{k'} - \mu|^i}\right)^2}} = \frac{\frac{c_k^{(0)}}{|c_{k_0}^{(0)}|} \cdot \left(\frac{|\lambda_{k_0} - \mu|}{\lambda_k - \mu}\right)^i}{\sqrt{1 + \sum_{k' \neq k_0} \frac{|c_{k'}^{(0)}|^2}{|c_{k_0}^{(0)}|^2} \cdot \left(\frac{|\lambda_{k_0} - \mu|^i}{|\lambda_{k'} - \mu|^i}\right)^2}}$$

Offensichtlich gilt:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \sqrt{1 + \sum_{k' \neq k_0} \frac{|c_{k'}^{(0)}|^2}{|c_{k_0}^{(0)}|^2} \cdot \left(\frac{|\lambda_{k_0} - \mu|^i}{|\lambda_{k'} - \mu|^i}\right)^2} = 1,$$

da μ dem Eigenwert λ_{k_0} am nächsten liegen soll, also $|\lambda_{k_0} - \mu| < |\lambda_{k'} - \mu| \forall k' \neq k_0$ gilt. Hiermit folgt für $k \neq k_0$

$$\lim_{i \rightarrow \infty} c_k^{(i)} = \frac{\frac{c_k^{(0)}}{|c_{k_0}^{(0)}|} \cdot \lim_{i \rightarrow \infty} \left(\frac{|\lambda_{k_0} - \mu|}{\lambda_k - \mu}\right)^i}{\lim_{i \rightarrow \infty} \sqrt{1 + \sum_{k' \neq k_0} \frac{|c_{k'}^{(0)}|^2}{|c_{k_0}^{(0)}|^2} \cdot \left(\frac{|\lambda_{k_0} - \mu|^i}{|\lambda_{k'} - \mu|^i}\right)^2}} = 0.$$

Für $k = k_0$ gilt

$$c_{k_0}^{(i)} = \frac{\frac{c_{k_0}^{(0)}}{|c_{k_0}^{(0)}|} \cdot \left(\frac{|\lambda_{k_0} - \mu|}{\lambda_{k_0} - \mu}\right)^i}{\sqrt{1 + \sum_{k' \neq k_0} \frac{|c_{k'}^{(0)}|^2}{|c_{k_0}^{(0)}|^2} \cdot \left(\frac{|\lambda_{k_0} - \mu|^i}{|\lambda_{k'} - \mu|^i}\right)^2}} \approx \frac{c_{k_0}^{(0)}}{|c_{k_0}^{(0)}|} \cdot \left(\frac{|\lambda_{k_0} - \mu|}{\lambda_{k_0} - \mu}\right)^i.$$

Insgesamt gilt also für großes i :

$$\frac{\psi^{(i)}}{\|\psi^{(i)}\|_{2w}} \approx \frac{c_{k_0}^{(0)}}{|c_{k_0}^{(0)}|} \cdot \left(\frac{|\lambda_{k_0} - \mu|}{\lambda_{k_0} - \mu}\right)^i \cdot \psi_{k_0},$$

wobei $\left(\frac{|\lambda_{k_0} - \mu|}{\lambda_{k_0} - \mu}\right)^i$ (bei reellem λ_{k_0} und μ) konstant 1 oder ein mit i wechselndes Vorzeichen ist.

Aufgabe 48*: (Greens-Funktionen. 10 Bonuspunkte)

a) Finde eine explizite Darstellung der Greens-Funktion des Randwertproblems

$$\psi''(x) + \psi(x) = f(x), \quad \psi(0) = \psi'(\pi) = 0.$$

b) Berechne die Lösung für $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x < \frac{\pi}{2}, \\ -1 & \text{für } x \geq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$

Musterlösung:

a) Wir folgen dem Rezept aus Bemerkung 2.26 des Skripts, um die Gleichung

$$\psi''(x) + \psi(x) = \delta(x - y)$$

zu lösen. Die allgemeine homogene Lösung der DGL ist

$$g(x, y) = \begin{cases} \alpha_-(y) \cdot \cos(x) + \beta_-(y) \cdot \sin(x) & \text{für } x < y, \\ \alpha_+(y) \cdot \cos(x) + \beta_+(y) \cdot \sin(x) & \text{für } y < x, \end{cases}$$

also

$$g_x(x, y) = \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = \begin{cases} -\alpha_-(y) \cdot \sin(x) + \beta_-(y) \cdot \cos(x) & \text{für } x < y, \\ -\alpha_+(y) \cdot \sin(x) + \beta_+(y) \cdot \cos(x) & \text{für } y < x. \end{cases}$$

Aus den Randbedingungen $g(0, y) = 0$ und $g_x(\pi, y) = 0$ folgt $\alpha_-(y) = 0$, $\beta_+(y) = 0$, also

$$g(x, y) = \begin{cases} \beta_-(y) \cdot \sin(x) & \text{für } x < y, \\ \alpha_+(y) \cdot \cos(x) & \text{für } y < x \end{cases}, \quad g_x(x, y) = \begin{cases} \beta_-(y) \cdot \cos(x) & \text{für } x < y, \\ -\alpha_+(y) \cdot \sin(x) & \text{für } y < x. \end{cases}$$

Die Stetigkeitsbedingung $g(y - 0, y) = g(y + 0, y)$ bei $x = y$ liefert die Gleichung

$$\beta_-(y) \cdot \sin(y) = \alpha_+(y) \cdot \cos(y).$$

Zusammen mit die Sprungbedingung

$$\frac{\partial g}{\partial x}(y - 0, y) - \frac{\partial g}{\partial x}(y + 0, y) = -1 \quad \Rightarrow \quad \beta_-(y) \cdot \cos(y) - (-\alpha_+(y) \cdot \sin(y)) = -1$$

bei $x = y$ erhält man also die beiden linearen Gleichungen

$$\beta_-(y) \cdot \sin(y) = \alpha_+(y) \cdot \cos(y), \quad \beta_-(y) \cdot \cos(y) + \alpha_+(y) \cdot \sin(y) = -1$$

mit der eindeutigen Lösung $\alpha_+(y) = -\sin(y)$, $\beta_-(y) = -\cos(y)$.

Ergebnis:

$$g(x, y) = \begin{cases} -\sin(x) \cdot \cos(y) & \text{für } x < y, \\ -\cos(x) \cdot \sin(y) & \text{für } y < x. \end{cases}$$

Probe: Sei

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \int_0^\pi g(x, y) \cdot f(y) dy = - \int_0^x \cos(x) \cdot \sin(y) \cdot f(y) dy - \int_x^\pi \sin(x) \cdot \cos(y) \cdot f(y) dy \\ &= -\cos(x) \cdot \int_0^x \sin(y) \cdot f(y) dy - \sin(x) \cdot \int_x^\pi \cos(y) \cdot f(y) dy. \end{aligned}$$

Es folgt

$$\begin{aligned} \psi'(x) &= \sin(x) \cdot \int_0^x \sin(y) \cdot f(y) dy - \cos(x) \cdot \sin(x) \cdot f(x) - \cos(x) \cdot \int_x^\pi \cos(y) \cdot f(y) dy + \sin(x) \cdot \cos(x) \cdot f(x) \\ &= \sin(x) \cdot \int_0^x \sin(y) \cdot f(y) dy - \cos(x) \cdot \int_x^\pi \cos(y) \cdot f(y) dy \end{aligned}$$

$$\psi''(x) = \cos(x) \cdot \int_0^x \sin(y) \cdot f(y) dy + \sin(x) \cdot \sin(x) \cdot f(x) + \sin(x) \cdot \int_x^\pi \cos(y) \cdot f(y) dy + \cos(x) \cdot \cos(x) \cdot f(x)$$

$$= \cos(x) \cdot \int_0^x \sin(y) \cdot f(y) dy + \sin(x) \cdot \int_x^\pi \cos(y) \cdot f(y) dy + \underbrace{(\cos^2(x) + \sin^2(x))}_{=1} \cdot f(x).$$

Hiermit folgt, dass $\psi(x) = \int_0^\pi g(x, y) \cdot f(y) dy$ in der Tat die DGL erfüllt: $\psi''(x) + \psi(x) = f(x)$.

b) Die Lösung für $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x < \frac{\pi}{2} \\ -1 & \text{für } x \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$ ist in die Fälle $0 \leq x < \pi/2$ und $\pi/2 \leq x \leq \pi$ aufzupalten.

Für $0 \leq x < \pi/2$ gilt:

$$\begin{aligned} \psi(x) &= -\cos(x) \cdot \int_0^x \sin(y) \cdot f(y) dy - \sin(x) \cdot \int_x^\pi \cos(y) \cdot f(y) dy \\ &= -\cos(x) \cdot \int_0^x \sin(y) \cdot \underbrace{f(y)}_{=1} dy - \sin(x) \cdot \int_x^{\pi/2} \cos(y) \cdot \underbrace{f(y)}_{=1} dy - \sin(x) \cdot \int_{\pi/2}^\pi \cos(y) \cdot \underbrace{f(y)}_{=-1} dy \\ &= -\cos(x) \cdot \int_0^x \sin(y) dy - \sin(x) \cdot \int_x^{\pi/2} \cos(y) dy + \sin(x) \cdot \int_{\pi/2}^\pi \cos(y) dy \\ &= -\cos(x) \cdot (-\cos(x) + \cos(0)) - \sin(x) \cdot (\sin(\pi/2) - \sin(x)) + \sin(x) \cdot (\sin(\pi) - \sin(\pi/2)) \\ &= \cos^2(x) - \cos(x) + \sin^2(x) - \sin(x) = \boxed{1 - \cos(x) - 2 \cdot \sin(x)}. \end{aligned}$$

Für $\pi/2 \leq x \leq \pi$ gilt:

$$\begin{aligned} \psi(x) &= -\cos(x) \cdot \int_0^x \sin(y) \cdot f(y) dy - \sin(x) \cdot \int_x^\pi \cos(y) \cdot f(y) dy \\ &= -\cos(x) \cdot \int_0^{\pi/2} \sin(y) \cdot \underbrace{f(y)}_{=1} dy - \cos(x) \cdot \int_{\pi/2}^x \sin(y) \cdot \underbrace{f(y)}_{=-1} dy - \sin(x) \cdot \int_x^\pi \cos(y) \cdot \underbrace{f(y)}_{=-1} dy \\ &= -\cos(x) \cdot \int_0^{\pi/2} \sin(y) dy + \cos(x) \cdot \int_{\pi/2}^x \sin(y) dy + \sin(x) \cdot \int_x^\pi \cos(y) dy \\ &= -\cos(x) \cdot (-\cos(\pi/2) + \cos(0)) + \cos(x) \cdot (-\cos(x) + \cos(\pi/2)) + \sin(x) \cdot (\sin(\pi) - \sin(x)) \\ &= -\cos(x) - \cos^2(x) - \sin^2(x) = \boxed{-\cos(x) - 1}. \end{aligned}$$

Aufgabe 49*: (Zu den Legendre–Polynomen. 10 Bonuspunkte)

Betrachte die bei $x = \pm 1$ regulären Lösungen $\psi(x)$ der inhomogenen Legendre–DGL

$$-\left((1-x^2) \cdot \psi'(x)\right)' = f(x) \quad (\#)$$

für gegebenes $f(x)$.

- a) Zeige, dass eine reguläre Lösung des Problems (#) genau dann existiert, wenn $\int_{-1}^1 f(x) dx = 0$ gilt. Anleitung: Betrachte die die Fourier–Entwicklungen von f und ψ nach den Legendre–Polynomen.

b) Wieso ist die Lösung von (#) nicht eindeutig? Was ist die allgemeine Lösung?

c) Finde die allgemeine reguläre Lösung für $f(x) = x^3$.

Musterlösung:

a) Mit $L = -\frac{d}{dx}(1-x^2)\frac{d}{dx}$ gilt $LP_k = \lambda_k \cdot P_k$ mit $\lambda_k = k \cdot (k+1)$, $k = 0, 1, 2, \dots$. Einsetzen der Fourier-Entwicklungen

$$\psi = \sum_{k=0}^{\infty} d_k \cdot P_k, \quad f = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \cdot P_k$$

in die DGL liefert

$$L\psi = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k \cdot d_k \cdot P_k = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \cdot P_k,$$

also

$$\lambda_k \cdot d_k = c_k \implies d_k = \frac{c_k}{\lambda_k} = \frac{c_k}{k \cdot (k+1)}, \quad k = 1, 2, \dots$$

sowie $c_0 = 0$, also

$$c_0 = \frac{\langle P_0, f \rangle}{\langle P_0, P_0 \rangle} = \frac{1}{2} \cdot \int_{-1}^1 P_0(x) \cdot f(x) dx = \frac{1}{2} \cdot \int_{-1}^1 f(x) dx = 0.$$

Diese Bedingung läßt sich auch unmittelbar ableiten, indem man die Legendre-DGL integriert:

$$-\left((1-x^2) \cdot \psi'(x)\right)' = f(x) \implies -\left[(1-x^2) \cdot \psi'(x)\right]_{x=-1}^{x=1} = \int_{-1}^1 f(x) dx.$$

Setzt man ψ bei $x = \pm 1$ als regulär voraus, so ergibt sich $\int_{-1}^1 f(x) dx = 0$.

b) Der Legendre-Operator L hat den Eigenwert 0 und ist daher nicht invertierbar. Die allgemeine Lösung

ist $\psi = c_0 \cdot P_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{k \cdot (k+1)} \cdot P_k(x)$ mit einer beliebigen Konstanten c_0 .

c) Mit

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_2(x) = \frac{3}{2} \cdot x^2 - \frac{1}{2}, \quad P_3(x) = \frac{5}{2} \cdot x^3 - \frac{3}{2} \cdot x$$

gilt

$$f(x) = x^3 = \frac{2}{5} \cdot \left(\frac{5}{2} \cdot x^3 - \frac{3}{2} \cdot x\right) + \frac{3}{5} \cdot x = \frac{2}{5} \cdot P_3(x) + \frac{3}{5} \cdot P_1(x),$$

also $c_1 = \frac{3}{5}$, $c_3 = \frac{2}{5}$ und $c_k = 0$ für alle anderen $k \notin \{1, 3\}$. Damit ist die allgemeine Lösung

$$\begin{aligned} \psi(x) &= c + \sum_{k=1,3} \frac{c_k \cdot P_k(x)}{k \cdot (k+1)} = c + \frac{c_1 \cdot P_1(x)}{2} + \frac{c_3 \cdot P_3(x)}{12} \\ &= c + \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} \cdot x + \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{12} \cdot \left(\frac{5}{2} \cdot x^3 - \frac{3}{2} \cdot x\right) = \boxed{\frac{x^3}{12} + \frac{x}{4} + c}. \end{aligned}$$

Probe:

$$-\left((1-x^2) \cdot \left(\frac{x^3}{12} + \frac{x}{4} + c\right)'\right)' = -\left((1-x^2) \cdot \left(\frac{x^2}{4} + \frac{1}{4}\right)'\right)' = -\left(\frac{1-x^4}{4}\right)' = x^3 \quad (OK).$$

Aufgabe 50*: (Die Wellengleichung mit Rotationssymmetrie. 10 Bonuspunkte)

Berechne die von einem runden Trommelfell erzeugten Tonfrequenzen.

Anleitung: Es ist die Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \cdot \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

mit der Randbedingung $u(t, x, y) = 0$ für $x^2 + y^2 = r_0^2$ ($r_0 =$ Radius des Trommelfells) und den Anfangsbedingungen $u(0, x, y) = u_0(x, y)$, $\frac{\partial u}{\partial t}(0, x, y) = \dot{u}_0(x, y)$ zu lösen. Für die Frage nach den Tonfrequenzen braucht die Lösung nicht an konkrete Anfangsbedingungen angepasst zu werden: es reicht, die Grundlösungen (Eigenfunktionen des Laplace-Operators) zu betrachten. Siehe Beispiel 2.29 des Skripts.

Musterlösung:

Gemäß der am Ende von Beispiel 2.29 des Skripts gelieferten Interpretation ist (in Polarkoordinaten)

$$\Psi_{\nu k}(r, \phi) = J_{|\nu|} \left(\lambda_{|\nu|k} \cdot \frac{r}{r_0} \right) \cdot e^{i \cdot \nu \cdot \phi}, \quad \nu \in \mathbb{Z}, \quad k \in \mathbb{N}$$

ein orthogonaler Satz von Eigenfunktionen des Laplace-Operators:

$$\Delta \Psi_{\nu k} = -\Lambda_{\nu k} \cdot \Psi_{\nu k}, \quad \Lambda_{\nu k} = \frac{\lambda_{|\nu|k}^2}{r_0^2}.$$

Hierbei ist $\lambda_{|\nu|k}$ die k -te positive Nullstelle der Bessel-Funktion $J_{|\nu|}$. Betrachte

$$u(t, x, y) = f_{\nu k}(t) \cdot \Psi_{\nu k}(r(x, y), \phi(x, y)).$$

Einsetzen in die Wellengleichung liefert

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \left(\frac{d^2}{dt^2} f_{\nu k}(t) \right) \cdot \Psi_{\nu k} = c^2 \cdot \Delta u = -c^2 \cdot \Lambda_{\nu k} \cdot f_{\nu k}(t) \cdot \Psi_{\nu k}.$$

Es folgt die gewöhnliche DGL

$$\frac{d^2}{dt^2} f_{\nu k}(t) = -c^2 \cdot \Lambda_{\nu k} \cdot f_{\nu k}(t) = -\frac{c^2 \cdot \lambda_{|\nu|k}^2}{r_0^2} \cdot f_{\nu k}(t)$$

mit der allgemeinen Lösung

$$f_{\nu k}(t) = c_1 \cdot e^{i \cdot c \cdot \lambda_{|\nu|k} \cdot t / r_0} + c_2 \cdot e^{-i \cdot c \cdot \lambda_{|\nu|k} \cdot t / r_0}.$$

Die vom Trommelfell erzeugten Töne haben damit die Frequenzen

$$\pm \frac{c \cdot \lambda_{|\nu|k}}{r_0}, \quad \nu \in \mathbb{Z}, \quad k \in \mathbb{N},$$

wobei die Werte von $\lambda_{|\nu|k}$ z.B. aus der Tabelle in Bemerkung 2.17 des Skripts ersichtlich sind.

Aufgabe 51: (Der MuPAD-Führerschein: die Poisson-Gleichung auf der Kreisscheibe.)

Betrachte gemäß Beispiel 2.29 des Skripts die Lösung der Poisson-Gleichung

$$-\Delta u(r, \phi) = f(r, \phi), \quad u(r_0, \phi) = 0 \quad \text{mit} \quad f(r, \phi) = 5 \cdot e^{-30 \cdot (r-1/2)^2} \cdot e^{-2 \cdot \sin(\phi)^2}.$$

auf der Kreisscheibe $0 \leq r \leq r_0 = 1$, $\phi \in [0, 2 \cdot \pi)$. Plote mit MuPAD die Funktion $f(r, \phi)$ sowie die Lösung $u(r, \phi)$.

Anleitung: die Lösungsformel findet sich in Beispiel 2.29. Wähle eine geeignete Anzahl von Eigenfunktionen des Laplace-Operators zur Fourier-Entwicklung. Berechne die Fourier-Koeffizienten numerisch. Zum Plotten einer in Polarkoordinaten gegebenen Funktion $f(r, \phi)$ benutze man

```
>> plot(plot::Surface3d([r*cos(phi), r*sin(phi), f(r, phi)],
                        r = 0 .. r0, phi = 0 .. 2*PI));
```

Musterlösung:

Die Lösungsformel aus Beispiel 2.29 wird rekapituliert. Die Eigenfunktionen des Laplace-Operators sind

$$\Psi_{\nu k}(r, \phi) = J_{|\nu|} \left(\lambda_{|\nu|k} \cdot \frac{r}{r_0} \right) \cdot e^{i \cdot \nu \cdot \phi}, \quad \nu \in \mathbb{Z}, \quad k \in \mathbb{N},$$

es gilt

$$-\Delta \Psi_{\nu k} = \Lambda_{\nu k} \cdot \Psi_{\nu k}, \quad \Lambda_{\nu k} = \frac{\lambda_{|\nu|k}^2}{r_0^2},$$

wobei $\lambda_{|\nu|k}$ die k -te positive Nullstelle der Bessel-Funktion $J_{|\nu|}$ ist. Es gilt

$$\langle \Psi_{\nu k}, \Psi_{\nu' k'} \rangle = r_0^2 \cdot \pi \cdot \left(J_{|\nu|+1}(\lambda_{|\nu|k}) \right)^2 \cdot \delta_{\nu \nu'} \cdot \delta_{kk'}.$$

Die Lösung von $-\Delta u = f$ ist gegeben durch

$$u(r, \phi) = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{1}{\Lambda_{\nu k}} \cdot \frac{\langle \Psi_{\nu k}, f \rangle}{\langle \Psi_{\nu k}, \Psi_{\nu k} \rangle} \cdot \Psi_{\nu k}(r, \phi) = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{c_{\nu k}}{\Lambda_{\nu k}} \cdot \Psi_{\nu k}(r, \phi)$$

mit den Fourier-Koeffizienten

$$c_{\nu k} = \frac{\langle \Psi_{\nu k}, f \rangle}{\langle \Psi_{\nu k}, \Psi_{\nu k} \rangle} = \frac{1}{\langle \Psi_{\nu k}, \Psi_{\nu k} \rangle} \cdot \int_0^{2 \cdot \pi} \int_0^{r_0} J_{|\nu|} \left(\lambda_{|\nu|k} \cdot \frac{r}{r_0} \right) \cdot e^{-i \cdot \nu \cdot \phi} \cdot f(r, \phi) \cdot r \, dr \, d\phi.$$

Hier der entsprechende MuPAD-Code:

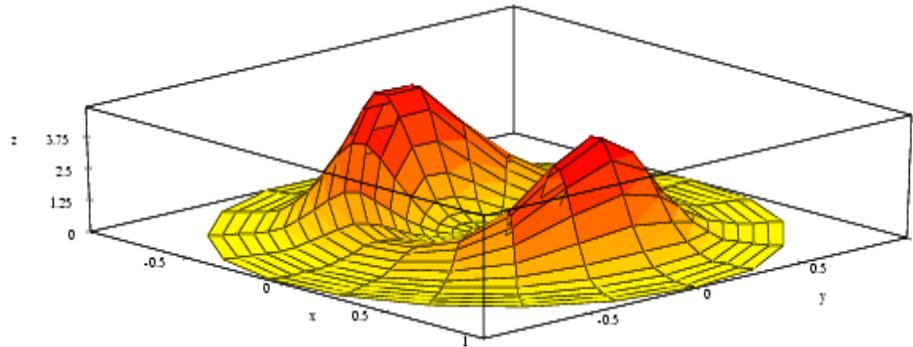
```

//-----
//setting up the problem
>> r0:= 1: // radius of the disc
>> fR:= r -> 5*exp(-30*(r - 1/2)^2): // radial part of f(r, phi)
>> fPHI:= phi -> exp(-2*sin(phi)^2): // angular part of f(r, phi)
>> f:= (r, phi) -> fR(r)*fPHI(phi): // the 'right hand side'
//-----
// setting up numerical parameters:
>> V:= 10: // the range for the angular frequencies v is -V <= v <= V
>> K:= 10: // number of radial Fourier terms
//-----
>> print("Computing Bessel zeroes"):
// initialize the array lambda to contain the Bessel zeroes
>> lambda:= array(0..V, 1..K):
>> // approximation of the first zero:
>> lambda1:= v -> float(v) + 1.856*float(v)^(1/3):
// systematic numerical search for the zeroes:
>> for v from 0 to V do
    searchrange:= lambda1(v) .. lambda1(v) + PI;
    lambda[v, 1]:= numeric::realroot(besselJ(v, x), x = searchrange):
    for k from 2 to K do
        searchrange:= lambda[v,k-1] + PI/2 .. lambda[v,k-1] + 3*PI/2;
        lambda[v, k]:= numeric::realroot(besselJ(v, x) = 0, x = searchrange);
    end_for:
end_for:
//-----
>> print("Computing n[v,k] = <PSI(v,k), PSI(v,k)>"):
>> for v from 0 to V do
    for k from 1 to K do
        n[v, k]:= float(r0^2*PI*besselJ(abs(v)+1, lambda[abs(v), k])^2):
        n[-v, k]:= n[v, k]:
    end_for:
end_for:
//-----
>> print("Computing the Fourier coefficients c[v,k] = <PSI(v,k), f>/n[v,k]"):
>> c:= array(-V..V, 0..K):
>> for v from -V to V do
    for k from 1 to K do
        c[v, k]:= numeric::int(r*fR(r)*besselJ(abs(v), lambda[abs(v),k]*r/r0), r=0..r0) *
            numeric::int(fPHI(phi)*exp(-I*v*phi), phi = 0..2*PI)/n[v, k];
        // cut off tiny Fourier coefficients (just for efficiency)
        if abs(c[v,k]) < 10^(-10) then
            c[v, k]:= 0
        end_if;
    end_for:
end_for:
//-----
// The eigenfunctions
>> PSI:= (v, k, r, phi) -> besselJ(abs(v), lambda[abs(v),k]*r/r0)*exp(I*v*phi):
//-----
// The eigenvalues
>> LAMBDA:= (v, k) -> lambda[abs(v), k]^2/r0^2:

```

Hier ist die Funktion $f(r, \phi)$:

```
>> plot(plot::Surface3d([r*cos(phi),r*sin(phi), f(r, phi)], r = 0..r0, phi = 0..2*PI));
```

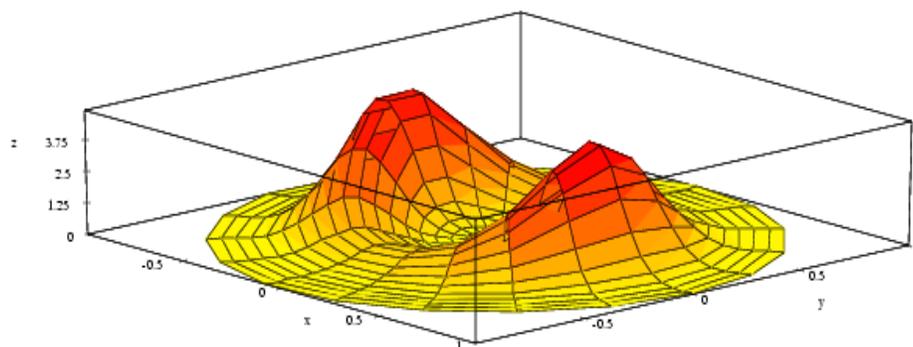


Zur Kontrolle des Programms: es sollte

$$f = \sum_{\nu} \sum_k \frac{\langle \Psi_{\nu k}, f \rangle}{\langle \Psi_{\nu k}, \Psi_{\nu k} \rangle} \cdot \Psi_{\nu k} = \sum_{\nu} \sum_k c_{\nu k} \cdot \Psi_{\nu k}$$

gelten. Hier wird die Fourier-Reihe von f geplottet, die in der Tat eine gute Approximation von f liefert. (Der Aufruf des Realteils Re dient dazu, die durch die $e^{i \cdot \nu \cdot \phi}$ -Anteile in $\Psi_{\nu k}$ eingeschleppten Imaginärteile zu entfernen. Diese sollten theoretisch zwar alle exakt verschwinden, es bleiben aber durch die numerischen Rundungsungenauigkeiten sehr kleine Imaginärteile übrig, die die Graphik nicht verträgt.)

```
>> f:= (r, phi) -> Re(_plus(_plus(c[v,k]*PSI(v, k, r, phi) $ v = -V..V) $ k = 1..K)):
>> plot(plot::Surface3d([r*cos(phi),r*sin(phi), f(r, phi)], r = 0..r0, phi = 0..2*PI));
```



Zuletzt wird die Lösung

$$u = \sum_{\nu} \sum_k \frac{1}{\Lambda_{|\nu|k}} \cdot \frac{\langle \Psi_{\nu k}, f \rangle}{\langle \Psi_{\nu k}, \Psi_{\nu k} \rangle} \cdot \Psi_{\nu k} = \sum_{\nu} \sum_k \frac{c_{\nu k}}{\Lambda_{|\nu|k}} \cdot \Psi_{\nu k}$$

von $-\Delta u = f$ geplottet:

```
>> u:= (r, phi) -> Re(_plus(_plus(c[v,k]*PSI(v, k, r, phi)/LAMBDA(v,k)
                                     $ v = -V..V) $ k = 1..K)):
>> plot(plot::Surface3d([r*cos(phi),r*sin(phi), u(r, phi)], r = 0..r0, phi = 0..2*PI));
```

