Ü b u n g s b l a t t 10

Abgabe von ∗ Aufgaben bis zum 13.1., 11^{oo} Uhr, im Zettelkasten auf dem D1.

Ich bin vom 14.1. – 20.1. nicht in Paderborn. Die entsprechenden Vorlesungen finden nicht statt und werden später nachgeholt. Der Übungstermin am 13.1. findet wie gewohnt statt.

Aufgabe 43*: (Zu den Legendre–Polynomen. Insgesamt 20 Bonuspunkte)

a) Zeige, dass die durch die Entwicklung

$$f(x,t) = \frac{1}{\sqrt{1-2\cdot x\cdot t+t^2}} = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(x)\cdot t^k$$

definierten Polynome $P_k(x)$ die Legendresche Differentialgleichung

$$-\Big((1-x^2)\cdot P_k'(x)\Big)' = \lambda_k\cdot P_k(x)$$

mit den Eigenwerten $\lambda_k = k\cdot(k+1)$ erfüllen.

Anleitung: Verifiziere, dass die Funktion $f(x,t)$ die partielle DGL

$$-\frac{\partial}{\partial x}\,\Big((1-x^2)\cdot\frac{\partial f}{\partial x}\Big) = t\cdot\frac{\partial^2}{\partial t^2}\,(t\cdot f)$$

erfüllt. Setze die Entwicklung ein und vergleiche die einzelnen t-Potenzen.

b) Zeige, dass die Polynome $P_k(x)$ die Rekursion

$$P_1(x) = x\cdot P_0(x),\quad (k+1)\cdot P_{k+1}(x) = (2\cdot k+1)\cdot x\cdot P_k(x) - k\cdot P_{k-1}(x)$$

erfüllen. Anleitung: Verifiziere, dass $(1-2\cdot x\cdot t+t^2)\cdot\frac{df}{dt} = (x-t)\cdot f$ gilt. Setze die Entwicklung ein und vergleiche die t-Potenzen.

c) Bestimme $P_0(x),\ldots,P_4(x)$. Anleitung: b).

d) Zeige: $P_k(1) = 1$, $P_k(-1) = (-1)^k$. Anleitung: Betrachte $f(\pm 1, t)$.

e) Zeige: $P_k(-x) = (-1)^k\cdot P_k(x)$. Anleitung: $f(-x,t) = f(x,-t)$.

f) Zeige: $\langle P_k, P_k\rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} P_k(x)^2\,dx = \frac{2}{2\cdot k+1}$.

Anleitung: Benutze

$$\frac{1}{t}\cdot\ln\Big(\frac{1+t}{1-t}\Big) = \int_{-1}^{1}\frac{dx}{1-2\cdot x+t^2} = \int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-2\cdot x+t^2}\cdot\sqrt{1-2\cdot x+t^2}}$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{k'=0}^{\infty}\int_{-1}^{1} P_k(x)\cdot P_{k'}(x)\,dx\cdot t^{k+k'} = \sum_{k=0}^{\infty}\int_{-1}^{1} P_k(x)^2\,dx\cdot t^{2\cdot k}.$$

Es verbleibt, die Taylor–Reihe von $\frac{1}{t}\cdot\ln(\frac{1+t}{1-t})$ um $t=0$ zu ermitteln.

g) Seien $\vec{x}, \vec{x}_0$ Vektoren im $\mathbb{R}^n$ mit den Längen $r = \|x\| > r_0 = \|x_0\|$ und dem durch $\langle\vec{x},\vec{x}_0\rangle = r\cdot r_0\cdot\cos(\phi)$ gegebenen Zwischenwinkel ϕ. Zeige:

$$\frac{1}{\|\vec{x}-\vec{x}_0\|} = \frac{1}{r}\cdot\sum_{k=0}^{\infty} P_k(\cos(\phi))\cdot\Big(\frac{r_0}{r}\Big)^k.$$

Musterlösung:

a) Für $f(x,t) = \dfrac{1}{\sqrt{1-2\cdot x\cdot t+t^2}}$ verifiziert man nach mühseliger, aber elementarer Rechnung:

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left((1-x^2)\cdot\frac{\partial f}{\partial x}\right) = t\cdot\frac{\partial^2}{\partial t^2}(t\cdot f).$$

Die rechte Seite ergibt mit $f(x,t) = \sum_k P_k(x)\cdot t^k$:

$$t\cdot f = t\cdot\sum_{k=0}^{\infty} P_k(x)\cdot t^k = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(x)\cdot t^{k+1}$$

$$\Rightarrow\quad \frac{\partial^2}{\partial t^2}\,(t\cdot f) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(x)\cdot(k+1)\cdot k\cdot t^{k-1}$$

$$\Rightarrow\quad t\cdot\frac{\partial^2}{\partial t^2}\,(t\cdot f) = \sum_{k=0}^{\infty}\Big[k\cdot(k+1)\cdot P_k(x)\Big]\cdot t^k.$$

Die linke Seite ergibt:

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left((1-x^2)\cdot\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\left[-\Big((1-x^2)\cdot P_k'(x)\Big)'\,\right]\cdot t^k.$$

Da für alle t die partielle DGL

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left[-\Big((1-x^2)\cdot P_k'(x)\Big)'\,\right]\cdot t^k = \sum_{k=0}^{\infty}\Big[k\cdot(k+1)\cdot P_k(x)\Big]\cdot t^k$$

erfüllt ist, folgt

$$-\Big((1-x^2)\cdot P_k'(x)\Big)' = k\cdot(k+1)\cdot P_k(x)$$

für jedes $k = 0, 1, 2, \ldots$.

b) Es gilt

$$\begin{aligned}(1-2\cdot x\cdot t+t^2)\cdot\frac{df}{dt} &= (1-2\cdot x\cdot t+t^2)\cdot\left(\frac{-1}{2}\right)\cdot\frac{-2\cdot x+2\cdot t}{\sqrt{(1-2\cdot x\cdot t+t^2)^3}}\\ &= \frac{x-t}{\sqrt{1-2\cdot x\cdot t+t^2}} = (x-t)\cdot f.\end{aligned}$$

Einsetzen der Entwicklung. Die linke Seite ergibt:

$$(1-2\cdot x\cdot t+t^2)\cdot\frac{df}{dt} = (1-2\cdot x\cdot t+t^2)\cdot\frac{d}{dt}\sum_{k=0}^{\infty}P_k(x)\cdot t^k = (1-2\cdot x\cdot t+t^2)\cdot\sum_{k=0}^{\infty}P_k(x)\cdot k\cdot t^{k-1}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}P_k(x)\cdot k\cdot t^{k-1} - \sum_{k=0}^{\infty}\Big(2\cdot x\cdot P_k(x)\Big)\cdot k\cdot t^k + \sum_{k=0}^{\infty}P_k(x)\cdot k\cdot t^{k+1}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}P_{k+1}(x)\cdot(k+1)\cdot t^k - \sum_{k=1}^{\infty}\Big(2\cdot x\cdot P_k(x)\Big)\cdot k\cdot t^k + \sum_{k=1}^{\infty}P_{k-1}(x)\cdot(k-1)\cdot t^k$$

$$= P_1(x) + \sum_{k=1}^{\infty}\Big[(k+1)\cdot P_{k+1}(x) - 2\cdot x\cdot k\cdot P_k(x) + (k-1)\cdot P_{k-1}(x)\Big]\cdot t^k. \quad (\#)$$

Die rechte Seite ergibt:

$$(x-t)\cdot f = (x-t)\cdot\sum_{k=0}^{\infty} P_k(x)\cdot t^k = \sum_{k=0}^{\infty} x\cdot P_k(x)\cdot t^k - \sum_{k=0}^{\infty} P_k(x)\cdot t^{k+1}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} x\cdot P_k(x)\cdot t^k - \sum_{k=1}^{\infty} P_{k-1}(x)\cdot t^k = x\cdot P_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty}\Big[x\cdot P_k(x) - P_{k-1}(x)\Big]\cdot t^k. \quad (\#\#)$$

Vergleich von (#) und (##) ergibt

$$P_1(x) = x\cdot P_0(x), \quad (k+1)\cdot P_{k+1}(x) - 2\cdot x\cdot k\cdot P_k(x) + (k-1)\cdot P_{k-1}(x) = x\cdot P_k(x) - P_{k-1}(x),$$

also

$$P_1(x) = x\cdot P_0(x), \quad (k+1)\cdot P_{k+1}(x) = (2\cdot k+1)\cdot x\cdot P_k(x) - k\cdot P_{k-1}(x).$$

c) Für $t=0$ ergibt sich

$$f(x,0) = \frac{1}{\sqrt{1-2\cdot x\cdot 0+0^2}} = 1 = P_0(x).$$

Die höheren Polynome ergeben sich am einfachsten aus der Rekursion in b):

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x\cdot P_0(x) = x, \quad P_2(x) = \frac{1}{2}\cdot\Big(3\cdot x\cdot P_1(x) - P_0(x)\Big) = \frac{3}{2}\cdot x^2 - \frac{1}{2},$$

$$P_3(x) = \frac{5}{2}\cdot x^3 - \frac{3}{2}\cdot x, \quad P_4(x) = \frac{35}{8}\cdot x^4 - \frac{15}{4}\cdot x^2 + \frac{3}{8}.$$

d) Offensichtlich gilt

$$f(\pm 1,t) = \frac{1}{\sqrt{1\mp 2\cdot t+t^2}} = \frac{1}{1\mp t} = \sum_{k=0}^{\infty}(\pm 1)^k\cdot t^k.$$

Andererseits gilt $f(\pm 1,t) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(\pm 1)\cdot t^k$, also $P_k(\pm 1) = (\pm 1)^k$.

e) Offensichtlich gilt

$$f(-x,t) = \frac{1}{\sqrt{1+2\cdot x\cdot t+t^2}} = f(x,-t).$$

Es folgt

$$f(-x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(-x)\cdot t^k = f(x,-t) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(x)\cdot(-t)^k = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(x)\cdot(-1)^k\cdot t^k,$$

also $P_k(-x) = (-1)^k\cdot P_k(x)$.

f) Die Gleichungskette

$$\frac{1}{t}\cdot\ln\Big(\frac{1+t}{1-t}\Big) = \int_{-1}^{1}\frac{dx}{1-2\cdot x+t^2} = \int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-2\cdot x+t^2}\cdot\sqrt{1-2\cdot x+t^2}}$$

$$\overset{(*)}{=} \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{k'=0}^{\infty}\int_{-1}^{1} P_k(x)\cdot P_{k'}(x)\,dx\cdot t^{k+k'} = \sum_{k=0}^{\infty}\int_{-1}^{1} P_k(x)^2\,dx\cdot t^{2\cdot k}.$$

sollte nachvollziehbar sein (in $(*)$ wird die Orthogonalität der Legendre–Polynome P_k benutzt, die aus der Tatsache folgt, dass die P_k Eigenfunktionen der Legendre–DGL zu den Eigenwerten $\lambda_k = k\cdot(k+1)$ mit dem Gewicht $w(x) = 1$ sind). Es verbleibt damit, den Ausdruck $\frac{1}{t}\cdot\ln(\frac{1+t}{1-t})$ in eine Taylor–Reihe um $t=0$ zu zerlegen. Setze dazu $h(t) = \ln(\frac{1+t}{1-t})$. Die Ableitung kann sofort in eine geometrische Reihe überführt werden:

$$h'(t) = \frac{2}{1-t^2} = 2\cdot\sum_{k=0}^{\infty}(t^2)^k = 2\cdot\sum_{k=0}^{\infty} t^{2\cdot k}.$$

Durch Integration folgt mit $h(0) = 0$:

$$h(t) = h(0) + \int_0^t h'(\tau)\, d\tau = \int_0^t \sum_{k=0}^{\infty} 2 \cdot \tau^{2\cdot k}\, d\tau = \sum_{k=0}^{\infty} 2 \cdot \int_0^t \tau^{2\cdot k}\, d\tau = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{2\cdot k+1} \cdot t^{2\cdot k+1}.$$

Ergebnis:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \int_{-1}^{1} P_k(x)^2\, dx \cdot t^{2\cdot k} = \frac{h(t)}{t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{2\cdot k+1} \cdot t^{2\cdot k}.$$

Durch Vergleich der t–Potenzen folgt

$$\langle P_k, P_k \rangle = \int_{-1}^{1} P_k(x)^2\, dx = \frac{2}{2\cdot k+1}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

g) Mit $x = \cos(\phi)$ und $t = r_0/r$ gilt

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\|x - x_0\|} &= \frac{1}{\sqrt{\langle \vec{x} - \vec{x}_0, \vec{x} - \vec{x}_0 \rangle}} = \frac{1}{\sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle - 2 \cdot \langle \vec{x}, \vec{x}_0 \rangle + \langle \vec{x}_0, \vec{x}_0 \rangle}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2 \cdot r \cdot r_0 \cdot \cos(\phi) + r_0^2}} = \frac{1}{r \cdot \sqrt{1 - 2 \cdot \cos(\phi) \cdot \frac{r_0}{r} + \left(\frac{r_0}{r}\right)^2}} \\
&= \frac{1}{r} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - 2 \cdot x \cdot t + t^2}} = \frac{1}{r} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} P_k(x) \cdot t^k = \frac{1}{r} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} P_k(\cos(\phi)) \cdot \left(\frac{r_0}{r}\right)^k.
\end{aligned}$$

Aufgabe 44*: (Zu den Bessel–Funktionen. Insgesamt 10 Bonuspunkte)
Zeige für die Bessel–Funktionen $J_\nu(x)$:

a) $J_\nu'(x) = \nu \cdot \dfrac{J_\nu(x)}{x} - J_{\nu+1}(x)$.

b) $\dfrac{d}{dx}\, \dfrac{1}{2} \cdot \left(x^2 \cdot \left(J_\nu(x)^2 + J_\nu'(x)^2 \right) - \nu^2 \cdot J_\nu(x)^2 \right) = x \cdot J_\nu(x)^2$.

Folgere aus a) und b):

c) $\dfrac{d}{dx}\, \dfrac{1}{2} \cdot \left(x^2 \cdot \left(J_\nu(\lambda \cdot x)^2 + J_{\nu+1}(\lambda \cdot x)^2 \right) - \dfrac{2 \cdot \nu}{\lambda} \cdot x \cdot J_\nu(\lambda \cdot x) \cdot J_{\nu+1}(\lambda \cdot x) \right) = x \cdot J_\nu(\lambda \cdot x)^2$.

Folgere hieraus:

d) $\displaystyle\int_0^1 x \cdot J_\nu(\lambda \cdot x)^2\, dx = \frac{1}{2} \cdot \left(\left(J_\nu(\lambda)^2 + J_{\nu+1}(\lambda)^2 \right) - \frac{2 \cdot \nu}{\lambda} \cdot J_\nu(\lambda) \cdot J_{\nu+1}(\lambda) \right)$.

Für $\lambda_{\nu k} = k$-te positive Nullstelle von $J_\nu(x)$ ergibt sich: $\displaystyle\int_0^1 x \cdot J_\nu(\lambda_{\nu k} \cdot x)^2\, dx = \frac{J_{\nu+1}(\lambda_{\nu k})^2}{2}$.

Musterlösung:

a) Laut Vorlesung haben die Bessel–Funktion die Darstellung $J_\nu(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j! \cdot (j+\nu)!} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2\cdot j}$. Das ergibt:

$$J_\nu'(x) - \nu \cdot \frac{J_\nu(x)}{x} + J_{\nu+1}(x)$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j \cdot (\nu + 2\cdot j)}{j! \cdot (j+\nu)!} \cdot \frac{x^{\nu+2\cdot j-1}}{2^{\nu+2\cdot j}} - \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j \cdot \nu}{j! \cdot (j+\nu)!} \cdot \frac{x^{\nu+2\cdot j-1}}{2^{\nu+2\cdot j}} + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j! \cdot (j+\nu+1)!} \cdot \frac{x^{\nu+2\cdot j+1}}{2^{\nu+2\cdot j+1}}$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j \cdot (\nu + 2\cdot j)}{j! \cdot (j+\nu)!} \cdot \frac{x^{\nu+2\cdot j-1}}{2^{\nu+2\cdot j}} - \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j \cdot \nu}{j! \cdot (j+\nu)!} \cdot \frac{x^{\nu+2\cdot j-1}}{2^{\nu+2\cdot j}} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{(j-1)}}{(j-1)! \cdot (j+\nu)!} \cdot \frac{x^{\nu+2\cdot j-1}}{2^{\nu+2\cdot j-1}}$$

$$= \frac{\nu \cdot x^{\nu-1}}{\nu! \cdot 2^\nu} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^j \cdot (\nu + 2\cdot j)}{j! \cdot (j+\nu)!} \cdot \frac{x^{\nu+2\cdot j-1}}{2^{\nu+2\cdot j}} - \frac{\nu \cdot x^{\nu-1}}{\nu! \cdot 2^\nu} - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^j \cdot \nu}{j! \cdot (j+\nu)!} \cdot \frac{x^{\nu+2\cdot j-1}}{2^{\nu+2\cdot j}}$$

$$- \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^j \cdot 2}{(j-1)! \cdot (j+\nu)!} \cdot \frac{x^{\nu+2\cdot j-1}}{2^{\nu+2\cdot j}}$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(j+\nu)!} \cdot \underbrace{\left(\frac{\nu + 2\cdot j}{j!} - \frac{\nu}{j!} - \frac{2}{(j-1)!}\right)}_{=0} \cdot \frac{x^{\nu+2\cdot j-1}}{2^{\nu+2\cdot j}} = 0.$$

b) Die Bessel–Funktion $J_\nu(x)$ ist die bei $x = 0$ reguläre Lösung der DGL

$$-J_\nu''(x) - \frac{1}{x} \cdot J_\nu'(x) + \frac{\nu^2}{x^2} \cdot J_\nu(x) = J_\nu(x).$$

Es folgt:

$$\frac{d}{dx}\ \frac{1}{2} \cdot \left(x^2 \cdot \left(J_\nu(x)^2 + J_\nu'(x)^2\right) - \nu^2 \cdot J_\nu(x)^2\right) = x \cdot J_\nu^2 + x^2 \cdot J_\nu \cdot J_\nu' + x \cdot J_\nu'^2 + x^2 \cdot J_\nu' \cdot J_\nu'' - \nu^2 \cdot J_\nu \cdot J_\nu'$$

$$= x \cdot J_\nu^2 + x^2 \cdot J_\nu' \cdot \underbrace{\left(J_\nu + \frac{1}{x} \cdot J_\nu' + J_\nu'' - \frac{\nu^2}{x^2} \cdot J_\nu\right)}_{=0} = x \cdot J_\nu^2.$$

c) Nach a) gilt

$$x \cdot J_\nu' = \nu \cdot J_\nu - x \cdot J_{\nu+1} \quad \Longrightarrow \quad x^2 \cdot J_\nu'^2 = \nu^2 \cdot J_\nu^2 - 2 \cdot \nu \cdot x \cdot J_\nu \cdot J_{\nu+1} + x^2 \cdot J_{\nu+1}^2.$$

Hiermit folgt

$$x^2 \cdot \left(J_\nu^2 + J_\nu'^2\right) - \nu^2 \cdot J_\nu^2 = x^2 \cdot J_\nu^2 + \underbrace{\left(\nu^2 \cdot J_\nu^2 - 2 \cdot \nu \cdot x \cdot J_\nu \cdot J_{\nu+1} + x^2 \cdot J_{\nu+1}^2\right)}_{x^2 \cdot J_\nu'^2} - \nu^2 \cdot J_\nu^2$$

$$= x^2 \cdot J_\nu^2 - 2 \cdot \nu \cdot x \cdot J_\nu \cdot J_{\nu+1} + x^2 \cdot J_{\nu+1}^2.$$

Eingesetzt in b) liefert dies die Identität

$$x \cdot J_\nu(x)^2 = \frac{d}{dx}\ \frac{1}{2} \cdot \left(x^2 \cdot \left(J_\nu(x)^2 + J_\nu'(x)^2\right) - \nu^2 \cdot J_\nu(x)^2\right)$$

$$= \frac{d}{dx}\ \frac{1}{2} \cdot \left(x^2 \cdot J_\nu(x)^2 - 2 \cdot \nu \cdot x \cdot J_\nu(x) \cdot J_{\nu+1}(x) + x^2 \cdot J_{\nu+1}(x)^2\right).$$

Wir setzen $y = \lambda \cdot x$ und $\frac{d}{dy} = \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{d}{dx}$ in die Identität

$$y \cdot J_\nu(y)^2 = \frac{d}{dy}\ \frac{1}{2} \cdot \Big(y^2 \cdot J_\nu(y)^2 - 2 \cdot \nu \cdot y \cdot J_\nu(y) \cdot J_{\nu+1}(y) + y^2 \cdot J_{\nu+1}(y)^2 \Big)$$

ein und erhalten

$$\begin{aligned}
&\lambda \cdot x \cdot J_\nu(\lambda \cdot x)^2 \\
&= \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{d}{dx}\ \frac{1}{2} \cdot \Big((\lambda \cdot x)^2 \cdot J_\nu(\lambda \cdot x)^2 - 2 \cdot \nu \cdot \lambda \cdot x \cdot J_\nu(\lambda \cdot x) \cdot J_{\nu+1}(\lambda \cdot x) + (\lambda \cdot x)^2 \cdot J_{\nu+1}(\lambda \cdot x)^2 \Big) \\
&= \frac{d}{dx}\ \frac{1}{2} \cdot \Big(\lambda \cdot x^2 \cdot J_\nu(\lambda \cdot x)^2 - 2 \cdot \nu \cdot x \cdot J_\nu(\lambda \cdot x) \cdot J_{\nu+1}(\lambda \cdot x) + \lambda \cdot x^2 \cdot J_{\nu+1}(\lambda \cdot x)^2 \Big).
\end{aligned}$$

Nach Division durch λ erhält man die gefragte Form der Identität:

$$x \cdot J_\nu(\lambda \cdot x)^2 = \frac{d}{dx}\ \frac{1}{2} \cdot \Big(x^2 \cdot J_\nu(\lambda \cdot x)^2 - \frac{2 \cdot \nu \cdot x}{\lambda} \cdot J_\nu(\lambda \cdot x) \cdot J_{\nu+1}(\lambda \cdot x) + x^2 \cdot J_{\nu+1}(\lambda \cdot x)^2 \Big).$$

d) Integration der letzten Gleichung liefert

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x \cdot J_\nu(\lambda \cdot x)^2 \, dx &= \frac{1}{2} \cdot \Big[x^2 \cdot J_\nu(\lambda \cdot x)^2 - \frac{2 \cdot \nu \cdot x}{\lambda} \cdot J_\nu(\lambda \cdot x) \cdot J_{\nu+1}(\lambda \cdot x) + x^2 \cdot J_{\nu+1}(\lambda \cdot x)^2 \Big]_{x=0}^{x=1} \\
&= \frac{1}{2} \cdot \Big(J_\nu(\lambda)^2 - \frac{2 \cdot \nu}{\lambda} \cdot J_\nu(\lambda) \cdot J_{\nu+1}(\lambda) + J_{\nu+1}(\lambda)^2 \Big).
\end{aligned}$$

Aufgabe 45*: (Bessel–Funktionen und Neumannsche Randbedingungen. 5 + 5 + 0 Bonuspunkte)

a) Verifiziere, dass die parametrische Bessel–Gleichung

$$-\psi''(x) - \frac{1}{x} \cdot \psi'(x) + \frac{\nu^2}{x^2} \cdot \psi(x) = \mu^2 \cdot \psi(x)$$

durch $\psi(x) = J_\nu(\mu \cdot x)$ gelöst wird. Anleitung: starte mit der Bessel–DGL für J_ν.

b) Charakterisiere die Eigenwerte und bestimme die Eigenfunktionen der parametrischen Bessel–Gleichung

$$-\psi''(x) - \frac{1}{x} \cdot \psi'(x) + \frac{\nu^2}{x^2} \cdot \psi(x) = \lambda \cdot \psi(x)$$

mit den Randbedingungen $|\psi(0)| < \infty$, $\psi'(1) = 0$.

Anleitung: analog zu Beispiel 2.16 der Vorlesung. Benutze, dass es neben der in a) gefundenen Lösung der parametrischen Bessel–DGL keine weiteren bei $x = 0$ regulären Lösungen gibt, und dass zwischen je zwei aufeinander folgenden positiven Nullstellen von $J_\nu(x)$ jeweils genau ein lokales Extremum von $J_\nu(x)$ liegt.

c) Benutze MuPAD, um für $\nu = 1, 2, \ldots, 10$ numerische Approximationen des kleinsten Eigenwertes („Grundenergie“) des Eigenwertproblems in b) zu berechnen.

Musterlösung:
a) Die Bessel–Funktion $J_\nu(y)$ ist die bei $y=0$ reguläre Lösung der DGL

$$-J_\nu''(y) - \frac{1}{y}\cdot J_\nu'(y) + \frac{\nu^2}{y^2}\cdot J_\nu(y) = J_\nu(y).$$

Setze $\psi(x) = J_\nu(y(x))$ mit $y(x) = \mu\cdot x$, also $\psi'(x) = J_\nu'(y)\cdot\mu$, $\psi''(x) = J_\nu''(y)\cdot\mu^2$. Es folgt:

$$\begin{aligned}-\psi''(x) - \frac{1}{x}\cdot\psi'(x) + \frac{\nu^2}{x^2}\cdot\psi(x) &= -J_\nu''(y)\cdot\mu^2 - \frac{\mu}{x}\cdot J_\nu'(y) + \frac{\nu^2}{x^2}\cdot J_\nu(y)\\ &= \mu^2\cdot\Big(-J_\nu''(y) - \frac{1}{\mu\cdot x}\cdot J_\nu'(y) + \frac{\nu^2}{\mu^2\cdot x^2}\cdot J_\nu(y)\Big)\\ &= \mu^2\cdot\Big(-J_\nu''(y) - \frac{1}{y}\cdot J_\nu'(y) + \frac{\nu^2}{y^2}\cdot J_\nu(y)\Big) = \mu^2\cdot J_\nu(y) = \mu^2\cdot\psi(x).\end{aligned}$$

b) Die Lösung von

$$-\psi''(x) - \frac{1}{x}\cdot\psi'(x) + \frac{\nu^2}{x^2}\cdot\psi(x) = \mu^2\cdot\psi(x)$$

zusammen mit der Regularitätsbedingung $|\psi(0)| < \infty$ ist nach a) durch $\psi(x) = J_\nu(\mu\cdot x)$ gegeben, wobei $\mu\in\mathbb{R}$ beliebig ist. Für ganzzahliges ν gilt

$$J_\nu(-\mu\cdot x) = (-1)^\nu\cdot J_\nu(\mu\cdot x),$$

so dass nur $\mu\ge 0$ betrachtet zu werden braucht. Die zweite Randbedingung

$$\psi'(1) = \mu\cdot J_\nu'(\mu) = 0$$

schränkt μ auf 0 oder eine der (positiven) reellen Nullstellen von J_ν' ein. Sei $\mu_{\nu k}$ die k-te reelle positive Nullstelle von J_ν' ($k = 1, 2, \ldots$ für $\nu\neq 0$ bzw. $k = 0, 1, 2, \ldots$ für $\nu = 0$). Es gibt hiervon unendlich viele, die jeweils zwischen zwei benachbarten Nullstellen von J_ν liegen.
Die Eigenwerte λ von

$$-\psi''(x) - \frac{1}{x}\cdot\psi'(x) + \frac{\nu^2}{x^2}\cdot\psi(x) = \lambda\cdot\psi(x)$$

sind damit $\lambda_k = \mu_{\nu k}^2$ mit den Eigenfunktionen

$$\psi_0(x) = J_0(0) = 1,\quad \psi_k(x) = J_0(\mu_{0k}\cdot x),\quad k = 1, 2, \ldots$$

für $\nu = 0$ bzw.

$$\psi_k(x) = J_\nu(\mu_{\nu k}\cdot x),\quad k = 1, 2, \ldots$$

für $\nu\neq 0$ (für $\nu\neq 0$ ergibt $\mu = 0$ nur die triviale Funktion $J_\nu(0\cdot x) = 0$, die als Eigenfunktion nicht interessant ist).

c) Wir betrachten nur $\nu = 1, 2, 3, \ldots$, denn die Grundenergie $\mu^2 = 0$ für $\nu = 0$ ist bekannt. Analog zu Bemerkung 2.17 des Skripts wird zunächst die erste Nullstelle `lambda[v]` von J_ν gesucht. Die erste Nullstelle `mu[v]` von J_ν' liegt dann zwischen 0 und `lambda[v]`:

```
// Approximationen der ersten Nullstelle von besselJ(v, x)
>> lambda1:= v -> float(v) + 1.856*float(v)^(1/3):

// Systematische numerische Suche nach der ersten Nullstelle von besselJ(v, x)
>> for v from 1 to 10 do
     searchrange:= lambda1(v) .. lambda1(v) + PI;
     lambda[v]:= numeric::realroot(besselJ(v, x), x = searchrange):
   end_for:
```

```
// Systematische numerische Suche nach der ersten Nullstelle mu[v] von
// diff(besselJ(v, x),x). Es gilt 0 < mu[v] < lambda[v].
>> for v from 1 to 10 do
     searchrange:= 1/10^10 .. lambda[v]:
     mu[v]:= numeric::realroot(diff(besselJ(v, x), x), x = searchrange):
   end_for:
>> mu;
                       table(
                         10 = 11.77087667,
                         9 = 10.71143397,
                         8 = 9.647421652,
                         7 = 8.57783649,
                         6 = 7.501266145,
                         5 = 6.415616376,
                         4 = 5.317553126,
                         3 = 4.201188941,
                         2 = 3.054236928,
                         1 = 1.841183781
                       )

// Die Grundenergien:
>> mu[k]^2 $ k = 1..10

   3.389957717, 9.328363213, 17.64998852, 28.27637125,

      41.16013348, 56.26899377, 73.57927884, 93.07274453,

      114.7348177, 138.5535377
```