Mathe für Physiker III — Wintersemester 02/03
Walter Oevel — 21. 10. 2002

Ü b u n g s b l a t t 1

Abgabe von $*$ Aufgaben am 28.10.2002 in der Übung.

Aufgabe 1*: (Skalarprodukte und Normen. 10 Bonuspunkte)
Eine Menge von nicht-verschwindenden Elementen $\{F_0, F_1, \ldots\}$ eines Raums L mit einem Skalarprodukt heißt **"Orthogonalsystem"**, wenn $\langle F_i, F_j\rangle = 0$ gilt für alle $i \neq j$. Zu $f \in L$ definiere

$$c_k = \frac{\langle F_k, f\rangle}{\langle F_k, F_k\rangle}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Zeige: Für jede Wahl von Koeffizienten $\alpha_k \in \mathbb{C}$ gilt die **"allgemeine Besselsche Gleichung"**

$$\left\| f - \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \cdot F_k \right\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \sum_{k=0}^{n} |c_k|^2 \cdot \|F_k\|_2^2 + \sum_{k=0}^{n} |\alpha_k - c_k|^2 \cdot \|F_k\|_2^2.$$

Folgere: Der Abstand zwischen f und $\sum_{k=0}^{n} \alpha_k \cdot F_k$ wird minimal, wenn man $\alpha_k = c_k$ wählt.

Musterlösung:

$$\begin{aligned}
&\langle f - \textstyle\sum_i \alpha_i \cdot F_i, f - \sum_j \alpha_j \cdot F_j\rangle \\
&= \langle f, f\rangle - \textstyle\sum_i \overline{\alpha_i} \cdot \langle F_i, f\rangle - \sum_j \alpha_j \cdot \langle f, F_j\rangle + \sum_i \sum_j \overline{\alpha_i} \cdot \alpha_j \cdot \langle F_i, F_j\rangle \\
&= \langle f, f\rangle - \textstyle\sum_k \overline{\alpha_k} \cdot \langle F_k, f\rangle - \sum_k \alpha_k \cdot \langle f, F_k\rangle + \sum_k \overline{\alpha_k} \cdot \alpha_k \cdot \langle F_k, F_k\rangle \\
&= \langle f, f\rangle - \textstyle\sum_k \overline{\alpha_k} \cdot c_k \cdot \langle F_k, F_k\rangle - \sum_k \alpha_k \cdot \overline{c_k} \cdot \langle F_k, F_k\rangle + \sum_k \overline{\alpha_k} \cdot \alpha_k \cdot \langle F_k, F_k\rangle \\
&= \langle f, f\rangle - \textstyle\sum_k \overline{c_k} \cdot c_k \cdot \langle F_k, F_k\rangle + \sum_k \Big(\overline{c_k} \cdot c_k - \overline{\alpha_k} \cdot c_k - \alpha_k \cdot \overline{c_k} + \overline{\alpha_k} \cdot \alpha_k\Big) \cdot \langle F_k, F_k\rangle \\
&= \langle f, f\rangle - \textstyle\sum_k \overline{c_k} \cdot c_k \cdot \langle F_k, F_k\rangle + \sum_k \overline{(c_k - \alpha_k)} \cdot (c_k - \alpha_k) \cdot \langle F_k, F_k\rangle \\
&= \|f, f\|_2^2 - \textstyle\sum_k |c_k|^2 \cdot \langle F_k, F_k\rangle + \sum_k |c_k - \alpha_k|^2 \cdot \langle F_k, F_k\rangle.
\end{aligned}$$

Nur die letzte Summe hängt von den α_k ab. Sie wird offensichtlich genau für $\alpha_k = c_k$ minimal (nämlich 0).

Aufgabe 2*: (Der $\mathbb{R}^n$ als Hilbert–Raum. 10 Bonuspunkte)
Berechne den minimalen Euklidischen Abstand des Punktes $\vec{f} = (1, 2, 3, 4)^T \in \mathbb{R}^4$ zu den Punkten der von den (orthogonalen) Vektoren $\vec{F_0} = (1, 0, 1, 0)^T$ und $\vec{F_1} = (0, 1, 0, 1)^T$ aufgespannten 2-dimensionalen Ebene im $\mathbb{R}^4$. Hinweis: Beachte Aufgabe 1.

Musterlösung:
Nach Aufgabe 1) ist

$$\vec{S} = \frac{\langle \vec{F}_0, \vec{f} \rangle}{\langle \vec{F}_0, \vec{F}_0 \rangle} \cdot \vec{F}_0 + \frac{\langle \vec{F}_1, \vec{f} \rangle}{\langle \vec{F}_1, \vec{F}_1 \rangle} \cdot \vec{F}_1$$

der Ebenenpunkt mit dem geringsten Abstand zu $\vec{f}$:

$$\vec{S} = \frac{\langle (1,0,1,0)^T, (1,2,3,4)^T \rangle}{\langle (1,0,1,0)^T, (1,0,1,0)^T \rangle} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{\langle (0,1,0,1)^T, (1,2,3,4)^T \rangle}{\langle (0,1,0,1)^T, (0,1,0,1)^T \rangle} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{4}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{6}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Der Abstand ist $\|\vec{f} - \vec{S}\|_2 = \left\| \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|_2 = \sqrt{4} = 2.$

Aufgabe 3: (MuPAD, 0 Bonuspunkte)
Lies die MuPAD–Hilfeseite zu `int` (anzufordern z.B. per `?int`). Berechne

$$\int \sin(x) \cdot e^{5 \cdot x} \, dx, \qquad \int_0^1 x^7 \cdot e^{-x^2} \, dx.$$

Lies die MuPAD–Hilfeseite zu `float`, `DIGITS` und `infinity`. Berechne eine auf 30 Dezimalstellen genaue Gleitpunktnäherung von

$$\int_0^\infty x^{7/2} \cdot e^{-x^2} \, dx.$$

Lies die MuPAD–Hilfeseite zu `plotfunc2d`. Stelle die beiden Funktionen $\cos(20 \cdot x^2)$ und $\sin(40 \cdot x^2)$ für $x \in [0, 2]$ in einer gemeinsamen (brauchbaren) Graphik dar.
Finde heraus, über welches Symbol in MuPAD die Kreiszahl $\pi \approx 3.1415\ldots$ dargestellt wird.
Finde die 65-te Nachkommastelle von π.

Musterlösung:

```
2.5.0 > int(sin(x)*exp(5*x), x)

                                 5                 5
               5 sin(x) exp(x)     cos(x) exp(x)
               ---------------- - -------------
                      26                26
```

```
2.5.0 > int(x^7*exp(-x^2), x = 0..1)

                          3 - 8 exp(-1)

2.5.0 > DIGITS:= 30:
2.5.0 > float(int(x^(7/2)*exp(-x^2), x = 0..infinity))

               0.566501548159673173739169555604
2.5.0 > DIGITS:= 10:
```

In der Graphik muss man die `Grid`–Option benutzen, um die schnell oszillierenden Bereiche hinreichend genau aufzulösen. Mit etwa 1000 Stützstellen hat man die maximal sinnvolle Auflšoung erreicht (der Bildschirm hat eine Größenordnung von 1000 Pixeln in x-Richtung):

```
2.5.0 > plotfunc2d(cos(20*x^2), sin(40*x^2), x = 0 .. 2, Grid = 1000)
```

Mit

```
2.5.0 > ?pi

Sorry, no help page available for 'pi' !

Try:  PI psi numlib::phi
```

wird man auf das Symbol `PI` hingewiesen. Der Aufruf

```
2.5.0 > ?PI
```

liefert die Übersichtsseite der in MuPAD definierten Konstanten und speziellen Funktionen. Wir berechnen `PI` auf 70 Stellen genau. Nach Multiplikation mit 10^{65} ist die 65-te Nachkommastelle die erste Stelle vor dem Dezimalpunkt, die leicht zu finden ist. Es ist eine 0:

```
2.5.0 > DIGITS:= 70:
2.5.0 > float(PI)

 3.141592653589793238462643383279502884197169399375105820974944592307816

2.5.0 > 10^65*float(PI)

 314159265358979323846264338327950288419716939937510582097494459230.7816
                                                                 !!^!!
```

Aufgabe 4*: (Skalarprodukte auf Funktionenräumen. 10 Bonuspunkte)

Berechne den Abstand zwischen den Funktionen $f(x) = x$ und $g(x) = \sin(x)$ bezüglich des Skalarprodukts $\langle f, g \rangle = \int_0^\pi f(x) \cdot g(x)\, dx$.

Musterlösung:

```
2.5.0 > sqrt(int((x - sin(x))^2, x = -PI..PI))

                              /     3        \1/2
                              | 2 PI         |
                              | ----- - 3 PI |
                              \   3          /

2.5.0 > float(%)

                                  3.353516536
```

Aufgabe 5*: (Approximation durch einfache Basisfunktionen. 5 + 5 + 0 Bonuspunkte)
Betrachte den Raum der stetigen reellwertigen Funktionen über dem Intervall $[-1, 1]$ mit dem Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(x) \cdot g(x) \, dx.$$

a) Verifiziere, dass die Funktionen $F_0(x) = 1$, $F_1(x) = x$, $F_2(x) = \cos(\pi \cdot x)$ orthogonal sind.

b) Berechne die Koeffizienten c_0, c_1, c_2, die den Abstand zwischen der Funktion $f(x) = e^{-x}$ und

$$S(x) = c_0 + c_1 \cdot x + c_2 \cdot \cos(\pi \cdot x)$$

minimieren. (Siehe Aufgabe 1.)

c) Plotte $f(x)$ und $S(x)$ in einer gemeinsamen Graphik.

Es sind etliche Integrale zu berechnen, für die sich MuPAD anbietet. Relevante MuPAD–Funktionen und Objekte: `sin, cos, exp, PI, int, plotfunc2d`.

Musterlösung:
Zur Berechnung wird MuPAD benutzt:
a) Die Entwicklungsfunktionen werden definiert

```
2.5.0 > F[0]:= 1:
2.5.0 > F[1]:= x:
2.5.0 > F[2]:= cos(PI*x):
```

Aus Bequemlichkeit definieren wir das Skalarprodukt als Prozedur `sc` und lassen MuPAD die Skalarprodukte zwischen den 3 Basisfunktionen `F[k]` berechnen. Sie stellen sich in der Tat als orthogonal heraus:

```
2.5.0 > sp:= (f, g) -> int(f*g, x = -1..1):
2.5.0 > sp(F[0], F[1])
                                      0
2.5.0 > sp(F[0], F[2])
                                      0
2.5.0 > sp(F[1], F[2])
                                      0
```

b) Die zu entwickelnde Funktion `f` wird definiert. Die Fourier–Approximation ist durch die Koeffizienten $c_k = \langle F_k, f\rangle / \langle F_k, F_k\rangle$ gegeben:

```
2.5.0 > f:= exp(-x):
2.5.0 > c[0]:= sp(F[0], f) / sp(F[0], F[0])

                       exp(1)   exp(-1)
                       ------ - -------
                          2        2

2.5.0 > c[1]:= sp(F[1], f) / sp(F[1], F[1])

                                -3 exp(-1)


2.5.0 > c[2]:= sp(F[2], f) / sp(F[2], F[2])

                         1                       1
                ------------------- - ---------------------
                           2                       2
                exp(1) + PI  exp(1)   exp(-1) + PI  exp(-1)
```

Die Fourier–Approximation:

```
2.5.0 > S:=  c[0]*F[0] + c[1]*F[1] + c[2]*F[2]

exp(1)   exp(-1)
------ - ------- - 3 x exp(-1) -
   2        2

            /           1                       1          \
   cos(PI x) | --------------------- - ------------------- |
            |             2                       2        |
            \ exp(-1) + PI  exp(-1)   exp(1) + PI  exp(1) /
```

c) Die Graphik zeigt, dass die Approximation von `f` durch `S` recht gut ist, obwohl nur 3 Basisfunktionen benutzt wurden:

```
2.5.0 > plotfunc2d(f, S, x = -1..1)
```

Aufgabe 6*: (Die Cauchy–Schwarzsche Ungleichung. 10 Bonuspunkte)
Beweise

$$|\langle f, g\rangle|^2 \leq \langle f, f\rangle \cdot \langle g, g\rangle$$

für beliebiges f, g in einem Raum mit Skalarprodukt. Wann gilt das Gleichheitszeichen?
Anleitung: Starte mit $0 \leq \langle f - \alpha \cdot g, f - \alpha \cdot g\rangle$ und wähle ein geeignetes $\alpha \in \mathbb{C}$. Man erinnere sich auch an Aufgabe 4 von Blatt 2 der "Mathe für Physiker I".

Musterlösung:
Für jedes Skalarprodukt gilt

$$0 \leq \langle f - \alpha \cdot g, f - \alpha \cdot g\rangle = \langle f, f\rangle - \alpha \cdot \langle f, g\rangle - \overline{\alpha} \cdot \langle g, f\rangle + \overline{\alpha} \cdot \alpha \cdot \langle g, g\rangle$$

für jedes f, g und jedes $\alpha \in \mathbb{C}$. Für $g = 0$ ist Cauchy–Schwarz sicherlich erfüllt, betrachte also $g \neq 0$.
Für den Wert

$$\alpha = \frac{\langle g, f\rangle}{\langle g, g\rangle}, \quad \text{also} \quad \overline{\alpha} = \frac{\langle f, g\rangle}{\langle g, g\rangle}$$

folgt

$$0 \leq \langle f, f\rangle - \frac{\langle g, f\rangle}{\langle g, g\rangle} \cdot \langle f, g\rangle - \frac{\langle f, g\rangle}{\langle g, g\rangle} \cdot \langle g, f\rangle + \frac{\langle f, g\rangle \cdot \langle g, f\rangle}{\langle g, g\rangle^2} \cdot \langle g, g\rangle = \langle f, f\rangle - \frac{\langle f, g\rangle \cdot \langle g, f\rangle}{\langle g, g\rangle}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{|\langle f, g\rangle|^2}{\langle g, g\rangle} \leq \langle f, f\rangle \qquad \Rightarrow \qquad |\langle f, g\rangle|^2 \leq \langle f, f\rangle \cdot \langle g, g\rangle.$$

Das Gleichheitszeichen gilt genau dann, wenn

$$f - \alpha \cdot g = 0$$

gilt, d.h., wenn f und g proportional sind.