

W. Oevel

Mathematik für Physiker III

Veranstaltungsnr: 172090

Skript zur Vorlesung, Universität Paderborn, Wintersemester 2002/2003

Zeit und Ort:	V2	Mi	9.15 – 10.45	D1.312
	V2	Fr	11.15 – 12.45	E2.304
	Ü2	Mo	9 – 11	E2.304 (Kai Gehrs)

Zur Homepage der Veranstaltung:
math-www.uni-paderborn.de.de/~walter (→ Lehrveranstaltungen)

Email: walter@upb.de

Inhalt

1	Fourier–Analysis	1
1.1	Motivation: Ein erstes Beispiel	1
1.2	Approximation im quadratischen Mittel	7
1.2.1	Skalarprodukte und Hilbert–Räume	7
1.2.2	Orthogonale Systeme	12
1.2.3	Bestapproximation und Konvergenz im quadratischen Mittel	15
1.3	Fourier–Reihen	18
1.3.1	Definition der trigonometrischen Fourier–Reihen	19
1.3.2	Konvergenz im quadratischen Mittel	22
1.3.3	Punktweise Konvergenz	24
1.3.4	Abklingverhalten der Fourier–Koeffizienten	33
1.3.5	Das Gibbs’sche Phänomen	36
1.3.6	Diskrete Fourier–Transformation (DFT)	40
1.3.7	Schnelle Fourier–Transformation (FFT)	43
1.3.8	Technische Durchführung der FFT	46
1.3.9	Beliebige Perioden	53
1.3.10	Mehrdimensionale Fourier–Transformation	54
1.3.11	Einige Anwendungen	56
1.4	Die Fourier–Integraltransformation	63
1.4.1	Motivation	63
1.4.2	L_1 –Theorie	64
1.4.3	L_2 –Theorie	72
1.4.4	Distributionen und ihre Fourier–Transformation	78
1.4.5	Die Unschärferelation	82
1.4.6	Zusammenfassung	87
2	Sturm–Liouville–Probleme	89
2.1	Das Eigenwertproblem	89
2.2	Reguläre Sturm–Liouville–Probleme	104
2.3	Inverse Sturm–Liouville–Operatoren	107

2.4	Anwendungen	112
3	Komplexe Funktionen	117
3.1	Differenzierbarkeit in \mathbb{C}	117
3.2	Konturintegrale in \mathbb{C}	120
3.3	Der Cauchysche Integralsatz	126
3.4	Potenzreihen	131
3.5	Der Residuenkalkül	136
4	Laplace–Transformation	145
4.1	Strukturelles: Existenz und Eindeutigkeit	145
4.2	Rechenregeln	152
4.3	Rücktransformation	158
4.3.1	Vereinfachungen über Rechenregeln	158
4.3.2	Systematische Rücktransformation	161
4.3.3	Numerische Rücktransformation	168
4.4	Anwendung: die „Systemtheorie“ der Ingenieure	172

Literatur

Die Vorlesung baut nicht streng auf irgendeinem Buch auf, sondern geht ihren eigenen Weg. Die angegebenen Referenzen dienen dazu, sich *unabhängig* vom Skript entsprechende Grundlagen anzueignen oder spezielle Inhalte zu vertiefen. Es handelt sich um eine recht willkürliche Auswahl: Neben den angegebenen Büchern gibt es sicherlich jede Menge weiterer Literatur, die den behandelten Stoff analog abdeckt.

Zu Kapitel 1 (Fourier–Analysis):

- 1) H. DYM AND H. P. MCKEAN : *Fourier Series and Integrals*, Academic Press, 1972
This book contains numerous applications of Fourier analysis. Strongly recommended for anyone who is interested in applications and wants to deepen their understanding of Fourier analysis. It also includes a nice description of Lebesgue integration and group theory.
- 2) T. W. KÖRNER : *Fourier Analysis*, Cambridge University Press, 1988
This is a monumental work on Fourier analysis, consisting of a bunch of interrelated essays. Read one section per day! You will gain a lot. Highly recommended.
- 3) J. S. WALKER : *Fourier Analysis*, Oxford University Press, 1988
A well-written and solid book on Fourier analysis with applications on optics, computer-aided tomography, spherical harmonics, etc.
- 4) G. B. FOLLAND : *Fourier Analysis and Its Applications*, Brooks/Cole Publishing Co., 1992
An introductory but extremely well-written textbook on Fourier analysis. Contains chapters on special functions, generalized functions (distributions), and Greens functions. Applications are mainly for differential equations. Expensive but worth buying it.
- 5) J. M. ASH (ED.) : *Studies in Harmonic Analysis*, Mathematical Association of America, 1976

This is a collection of conference talks by the authorities held in Chicago in 1975. Most of the chapters are as if these authorities are directly talking to you in a friendly manner about the essence of the ideas in harmonic analysis without much detailed proofs. Contains really deep mathematics.

- 6) S. G. KRANTZ : *A Panorama of Harmonic Analysis*, Mathematical Association of America, 1999
This book gives a historical perspective of harmonic analysis ranging from classical to modern, from elementary to advanced. One can see how subtle it is to sum multiple Fourier series. This also includes short description on wavelets. Highly recommended.
- 7) E. M. STEIN AND G. WEISS : *Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces*, Princeton University Press, 1971 A classic of the multidimensional Fourier analysis. Includes detailed discussions on the invariance properties of Fourier transform.
- 8) A. ZYGMUND : *Trigonometric Serie*, (2nd Ed., Volume I & II combined), Cambridge University Press, 1959
An ultimate bible on Fourier series and integrals for hard analysts. This is basically a dictionary. Almost no applications are treated here.
- 9) R. N. BRACEWELL : *The Fourier Transform and Its Application*, (2nd Ed., Revised), MacGraw-Hill, 1986
Another bible for engineers. Contains an excellent pictorial dictionary of many functions and their Fourier transforms.
- 10) G. P. TOLSTOV : *Fourier Series*, Dover, 1972.
The most cost effective book (about \$12). Very well written. Highly recommended.
- 11) G. H. HARDY AND W. W. ROGOSINSKI : *Fourier Series*, Dover, 1999.
This is a prelude to Zygmund's book. Spirit of pure mathematics. No applications included. Economical (\$7).
- 12) W. L. BRIGGS AND V. E. HENSON : *The DFT: An Owner's Manual for the Discrete Fourier Transform*, SIAM 1995
This is a very useful book on DFT. Includes many practical applications, such as tomography, seismic migrations, difference equation solvers. Detailed analysis on the error of the DFT. A nice book to keep on your desk.
- 13) A. TERRAS : *Fourier Analysis on Finite Groups and Applications*, Cambridge University Press, 1999.
Another type of Fourier analysis. A more detailed version of the first half

of Chapter 4 of Dym and McKean plus many more examples and applications of that aspect of Fourier analysis.

Zu Kapitel 2 (Sturm–Liouville–Probleme):

[WW] WOLFGANG WALTER, *Gewöhnliche Differentialgleichungen*, Springer, 1996.

[Tol] G. P. TOLSTOV : *Fourier Series*, Dover, 1972.
Man beachte hier speziell das letzte Kapitel.

Zu Kapitel 3 (Komplexe Funktionen):

[Jän] KLAUS JÄNICH: *Funktionentheorie – Eine Einführung*, Springer, 1999.

Zu Kapitel 4 (Laplace–Transformation):

[Föl] OTTO FÖLLINGER, *Laplace-, Fourier- und z-Transformation*, Hüthig Verlag, 2000.

[Mar] JERROLD E. MARSDEN, *Basic Complex Analysis*, Freeman 1987.

[BR] R.E. BELLMANN AND R.S. ROTH, *The Laplace Transform*, World Scientific 1984.

[Doe] GUSTAV DOETSCH, *Einführung in Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation*, Birkhäuser 1970.

[SGV] W. STRAMPP, V. GANZHA, E. VOROZHTSOV, *Höhere Mathematik mit Mathematica 4*, Vieweg, 1997.

Kapitel 1

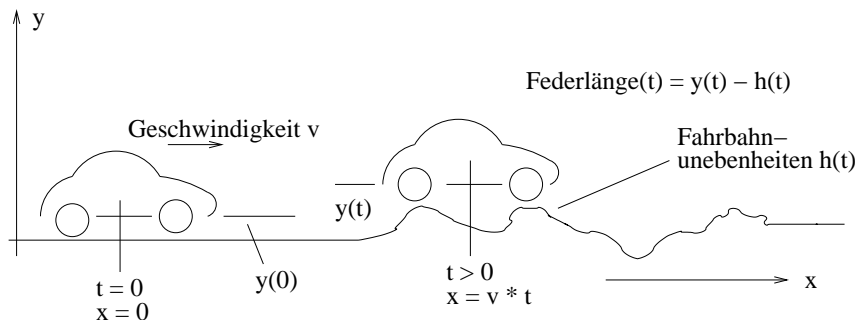
Fourier–Analysis

↓16.10.02

1.1 Motivation: Ein erstes Beispiel

Ohne den allgemeinen Hintergrund, der erst in den kommenden Kapiteln bereit gestellt werden wird, soll zur Motivation zunächst ein Anwendungsbeispiel durchgerechnet werden, um die Nützlichkeit der Dinge vorzustellen, die in den nächsten Kapiteln eingeführt werden. Die strukturellen Dinge werden dabei durch elementare Rechnungen ad hoc hergeleitet; später werden wir sie von einem allgemeineren Standpunkt aus systematisch betrachten.

In Anwendungen sind häufig *lineare* (Systeme von) Differentialgleichungen (DGLen) zu lösen. Beispiel: Modelliere ein Auto, das über eine unebene Fahrbahn fährt:



Simple mathematisches Modell:

$$m \cdot \ddot{y}(t) = \underbrace{-k \cdot (y(t) - h(v \cdot t) - L)}_{\text{Federkraft}} - \underbrace{m \cdot g}_{\text{Gravitation}} - \underbrace{\delta \cdot \dot{y}(t)}_{\text{Dämpfung}}$$

mit

$y(t)$:	Höhe der oberen Federaufhängung
$m \cdot \ddot{y}(t)$:	Beschleunigungskraft
k	:	Federkonstante
L	:	Federlänge im Gleichgewicht
v	:	Geschwindigkeit des Fahrzeugs
$x = v \cdot t$:	zurückgelegte Strecke
$h(x)$:	Fahrbahnunebenheiten
$m \cdot g$:	Gravitation (Gewicht)
$\delta \cdot \dot{y}(t)$:	Dämpfung.

Nach Normierung:

$$\ddot{y}(t) + 2 \cdot \mu \cdot \dot{y}(t) + \omega_0^2 \cdot y(t) = f(t)$$

mit Systemkonstanten μ , ω_0 und einer vorgegebenen „Inhomogenität“ $f(t)$, welche durch die Fahrbahnunebenheiten bestimmt wird.

Für ein lineares System gilt immer

$$\begin{aligned} \text{allgemeine Lösung} &= \text{allgemeine homogene Lösung} \\ &\quad (\text{von } \ddot{y} + 2 \cdot \mu \cdot \dot{y} + \omega_0^2 \cdot y = 0) \\ &\quad + \text{eine spezielle inhomogene Lösung.} \end{aligned}$$

Die allgemeine homogene Lösung ist kein Problem:

$$y_{hom}(t) = e^{-\mu \cdot t} \cdot \left(\alpha \cdot \sin \left(\sqrt{\omega_0^2 - \mu^2} \cdot t \right) + \beta \cdot \cos \left(\sqrt{\omega_0^2 - \mu^2} \cdot t \right) \right)$$

mit freien Konstanten α , β . Gesucht ist nun ein Lösungskonzept für die inhomogene Gleichung $\ddot{y}(t) + 2 \cdot \mu \cdot \dot{y}(t) + \omega_0^2 \cdot y(t) = f(t)$, das für (praktisch) alle rechten Seiten $f(t)$ funktioniert ($f(t)$ wird in der Regel eine sehr komplizierte Funktion sein).

Technik 1: (Fourier-Reihenentwicklung)

Diese Technik funktioniert für periodisches $f(t)$ und liefert periodische Lösungen $y(t)$ der DGL. Betrachte zunächst die spezielle Inhomogenität

$$f(t) = \alpha_k \cdot \cos(k \cdot t) + \beta_k \cdot \sin(k \cdot t)$$

mit irgendwelchen Werten für k , α_k , β_k . Durch den Ansatz

$$y(t) = a_k \cdot \cos(k \cdot t) + b_k \cdot \sin(k \cdot t)$$

eingesetzt in

$$\ddot{y}(t) + 2 \cdot \mu \cdot \dot{y}(t) + \omega_0^2 \cdot y(t) = f(t)$$

findet man durch Vergleich der cos und sin-Terme auf beiden Seiten

$$\begin{aligned} -k^2 \cdot a_k \cdot \cos(k \cdot t) + 2 \cdot \mu \cdot b_k \cdot \cos(k \cdot t) + \omega_0^2 \cdot a_k \cdot \cos(k \cdot t) &= \alpha_k \cdot \cos(k \cdot t) \\ -k^2 \cdot b_k \cdot \sin(k \cdot t) - 2 \cdot \mu \cdot a_k \cdot \sin(k \cdot t) + \omega_0^2 \cdot b_k \cdot \sin(k \cdot t) &= +\beta_k \cdot \sin(k \cdot t) \end{aligned}$$

folgendes Gleichungssystem für die gesuchten Koeffizienten a_k, b_k :

$$\begin{pmatrix} \omega_0^2 - k^2 & 2 \cdot \mu \\ -2 \cdot \mu & \omega_0^2 - k^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_k \\ b_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_k \\ \beta_k \end{pmatrix}.$$

Wichtige Beobachtung: **Aus der (linearen) DGL für $y(t)$ ist ein (lineares) algebraisches Gleichungssystem für die Koeffizienten a_k, b_k geworden**, das sich unmittelbar lösen läßt:

$$\begin{pmatrix} a_k \\ b_k \end{pmatrix} = \frac{1}{(\omega_0^2 - k^2)^2 + 4 \cdot \mu^2} \cdot \begin{pmatrix} \omega_0^2 - k^2 & -2 \cdot \mu \\ 2 \cdot \mu & \omega_0^2 - k^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_k \\ \beta_k \end{pmatrix}. \quad (\#)$$

Ergebnis:

$$y(t) = a_k \cdot \cos(k \cdot t) + b_k \cdot \sin(k \cdot t)$$

mit a_k, b_k gegeben durch (#) löst die spezielle inhomogene DGL

$$\ddot{y}(t) + 2 \cdot \mu \cdot \dot{y}(t) + \omega_0^2 \cdot y(t) = \alpha_k \cdot \cos(k \cdot t) + \beta_k \cdot \sin(k \cdot t).$$

Dies ist natürlich nur ein sehr spezielles Resultat, aber es folgt unmittelbar durch Superposition das schon deutlich allgemeinere Resultat:

$$y(t) = \sum_k \left(a_k \cdot \cos(k \cdot t) + b_k \cdot \sin(k \cdot t) \right) \quad (\#\#)$$

mit a_k, b_k gegeben durch (#) löst die inhomogene DGL

$$\ddot{y}(t) + 2 \cdot \mu \cdot \dot{y}(t) + \omega_0^2 \cdot y(t) = \sum_k \left(\alpha_k \cdot \cos(k \cdot t) + \beta_k \cdot \sin(k \cdot t) \right).$$

Damit haben wir eine komplette Lösungsformel (#)# für alle rechten Seiten $f(t)$ gefunden, welche sich als

$$f(t) = \sum_k \left(\alpha_k \cdot \cos(k \cdot t) + \beta_k \cdot \sin(k \cdot t) \right)$$

darstellen lassen. Wir werden in diesem Kapitel sehen:

Praktisch alle anwendungsrelevanten Funktionen f (stückweise glatt), die periodisch sind, lassen sich in solche eine (unendliche) Summe von sin/cos-Termen zerlegen!

Technik 2: (Fourier-Integraltransformation)

Diese Technik funktioniert für Inhomogenitäten $f(t)$ mit

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} f(t) = 0$$

und liefert die spezielle inhomogene Lösung $y(t)$ von

$$\ddot{y}(t) + 2 \cdot \mu \cdot \dot{y}(t) + \omega_0^2 \cdot y(t) = f(t)$$

mit

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} y(t) = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \dot{y}(t) = 0.$$

Wir definieren dazu die sogenannte „**Fourier-Transformierten**“

$$\hat{y}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t) \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t} dt, \quad \hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t} dt, \quad i = \sqrt{-1}.$$

Transformation der DGL:

$$\begin{aligned} \ddot{y}(t) + 2 \cdot \mu \cdot \dot{y}(t) + \omega_0^2 \cdot y(t) &= f(t) \\ \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} e^{i \cdot \omega \cdot t} \cdot \left(\ddot{y}(t) + 2 \cdot \mu \cdot \dot{y}(t) + \omega_0^2 \cdot y(t) \right) dt &= \hat{f}(\omega). \end{aligned}$$

Partielle Integration:

$$\left[\dot{y}(t) \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t} \right]_{t=-\infty}^{t=\infty} + (2 \cdot \mu - i \cdot \omega) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \dot{y}(t) \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t} dt + \omega_0^2 \cdot \hat{y}(\omega) = \hat{f}(\omega).$$

Mit $\dot{y}(\pm\infty) = 0$:

$$(2 \cdot \mu - i \cdot \omega) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \dot{y}(t) \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t} dt + \omega_0^2 \cdot \hat{y}(\omega) = \hat{f}(\omega).$$

Noch eine partielle Integration:

$$\left[(2 \cdot \mu - i \cdot \omega) \cdot \dot{y}(t) \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t} \right]_{t=-\infty}^{t=\infty} + \left(\omega_0^2 - i \cdot \omega \cdot (2 \cdot \mu - i \cdot \omega) \right) \cdot \hat{y}(\omega) = \hat{f}(\omega).$$

Mit $y(\pm\infty) = 0$:

$$\left(\omega_0^2 - i \cdot \omega \cdot (2 \cdot \mu - i \cdot \omega) \right) \cdot \hat{y}(\omega) = \hat{f}(\omega).$$

Wichtige Beobachtung: **Aus der (linearen) DGL für $y(t)$ ist eine (lineare) algebraische Gleichung für $\hat{y}(\omega)$ geworden**, die sich unmittelbar lösen läßt:

$$\boxed{\hat{y}(\omega) = \frac{\hat{f}(\omega)}{\omega_0^2 - \omega^2 - 2 \cdot i \cdot \omega \cdot \mu}}$$

Wichtige Tatsache (siehe das entsprechende Kapitel): Man kann aus

$$\widehat{y}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} y(\tau) \cdot e^{i \cdot \omega \cdot \tau} d\tau$$

die Funktion $y(t)$ zurückgewinnen (Fourier-Rücktransformation):

$$y(t) = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{y}(\omega) \cdot e^{-i \cdot \omega \cdot t} d\omega.$$

Damit haben wir eine allgemeine Lösungsformel für unsere DGL für beliebiges $f(t)$:

$$y(t) = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i \cdot \omega \cdot t} \cdot \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - 2 \cdot i \cdot \omega \cdot \mu} \cdot \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cdot e^{i \cdot \omega \cdot \tau} d\tau \right) d\omega,$$

also

$$y(t) = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i \cdot \omega \cdot (\tau - t)} \cdot f(\tau)}{\omega_0^2 - \omega^2 - 2 \cdot i \cdot \omega \cdot \mu} d\tau d\omega.$$

Diese Darstellung über ein Doppelintegral gilt für beliebiges f mit verschwindenden Randbedingungen (sonst ist die Fourier-Transformation nicht definiert). Sie kann nun z.B. numerisch ausgewertet werden.

↓18.10.02

Technik 3: (Laplace-Transformation)

Diese Technik funktioniert für praktisch alle Inhomogenitäten $f(t)$ (mit der für in Anwendungen praktisch immer gegebenen Bedingung, dass $f(t)$ für $t \rightarrow \infty$ nicht exponentiell anwachsen darf).

Wir definieren dazu die sogenannten „Laplace-Transformierten“

$$\widehat{y}(s) = \int_0^{\infty} e^{-s \cdot t} \cdot y(t) dt, \quad \widehat{f}(s) = \int_0^{\infty} e^{-s \cdot t} \cdot f(t) dt, \quad s > 0.$$

Transformation der DGL:

$$\begin{aligned} \ddot{y}(t) + 2 \cdot \mu \cdot \dot{y}(t) + \omega_0^2 \cdot y(t) &= f(t) \\ \Rightarrow \int_0^{\infty} e^{-s \cdot t} \cdot \left(\ddot{y}(t) + 2 \cdot \mu \cdot \dot{y}(t) + \omega_0^2 \cdot y(t) \right) dt &= \widehat{f}(s). \end{aligned}$$

Partielle Integration:

$$\left[\dot{y}(t) \cdot e^{-s \cdot t} \right]_{t=0}^{t=\infty} + (2 \cdot \mu + s) \cdot \int_0^{\infty} \dot{y}(t) \cdot e^{-s \cdot t} dt + \omega_0^2 \cdot \widehat{y}(s) = \widehat{f}(s).$$

Wenn $\dot{y}(t)$ nicht gerade exponentiell für $t \rightarrow \infty$ wächst, verbleibt nur der Randterm für $t = 0$:

$$-\dot{y}(0) + (2 \cdot \mu + s) \cdot \int_0^{\infty} \dot{y}(t) \cdot e^{-s \cdot t} dt + \omega_0^2 \cdot \widehat{y}(s) = \widehat{f}(s).$$

Noch eine partielle Integration:

$$-\dot{y}(0) + \left[(2 \cdot \mu + s) \cdot y(t) \cdot e^{-s \cdot t} \right]_{t=0}^{t=\infty} + (\omega_0^2 + 2 \cdot \mu \cdot s + s^2) \cdot \hat{y}(s) = \hat{f}(s).$$

Wenn $y(t)$ nicht gerade exponentiell für $t \rightarrow \infty$ wächst, verschwindet wiederum der Randterm für $t = \infty$:

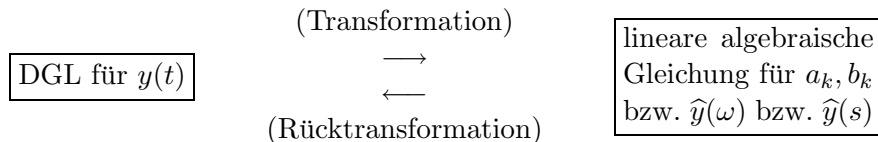
$$-\dot{y}(0) - (2 \cdot \mu + s) \cdot y(0) + (\omega_0^2 + 2 \cdot \mu \cdot s + s^2) \cdot \hat{y}(s) = \hat{f}(s).$$

Wichtige Beobachtung: **Aus der (linearen) DGL für $y(t)$ ist eine (lineare) algebraische Gleichung für $\hat{y}(s)$ geworden**, die sich unmittelbar lösen läßt:

$$\hat{y}(s) = \frac{\hat{f}(s) + \dot{y}(0) + (2 \cdot \mu + s) \cdot y(0)}{\omega_0^2 + 2 \cdot \mu \cdot s + s^2}.$$

Hier sind sogar die Anfangsbedingungen gleich mit eingebaut. Verbleibendes Problem: kann man aus der Laplace-Transformierten $\hat{y}(s)$ die Funktion $y(t)$ wieder zurückgewinnen? Die Antwort ist: „Im Prinzip ja!“ Das ist technisch aber deutlich weniger hübsch als bei der Fourier-Transformation, nämlich durch ein Kurvenintegral in der komplexen Ebene (Residuensatz). Alternativ: für konkretes $\hat{f}(s)$ durch Nachschlagen in Tabellen. Siehe das entsprechende Kapitel in diesem Skript.

Überblick: Das prinzipielle Lösungsschema für eine lineare inhomogene DGL mit komplizierter Inhomogenität:



Wir haben 3 Typen von Transformationen vorgestellt:

1) Fourier-Reihen: für periodische Probleme. Die Rücktransformation ist trivial (Aufsummieren von sin / cos-Termen).

2) Fourier-Integrale: für Probleme mit verschwindenden Randbedingungen. Die Rücktransformation ist (zumindestens prinzipiell) einfach (Integral).

3) Laplace-Transformation: Randbedingungen praktisch beliebig (außer bei exponentieller Explosion im Unendlichen). Rücktransformation nicht einfach.

1.2 Abstrakte Vorbetrachtungen: Approximation im quadratischen Mittel

Bevor wir daran gehen, Funktionen $f(x)$ durch Reihen von \sin und \cos -Funktionen zu approximieren („Fourier-Reihen“), zunächst ein paar strukturelle allgemeine Vorbetrachtungen. Die Theorie der Fourier-Reihen ist nämlich nur ein Spezialfall wesentlich allgemeinerer Ideen, Funktionen „im quadratischen Mittel“ durch Reihen einfacherer Funktionen zu approximieren.

1.2.1 Skalarprodukte und Hilbert-Räume

Definition 1.1: (Skalarprodukt)

Sei L ein Vektorraum (über \mathbb{C}). Die Abbildung $\langle \cdot, \cdot \rangle : L \times L \rightarrow \mathbb{C}$ heißt „Skalarprodukt“, wenn gilt:

a) *Linearität:*

$$\langle f, \alpha \cdot g_1 + \beta \cdot g_2 \rangle = \alpha \cdot \langle f, g_1 \rangle + \beta \cdot \langle f, g_2 \rangle$$

für alle $f, g_1, g_2 \in L$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

b) $\langle f, g \rangle = \overline{\langle g, f \rangle}$ (komplexe Konjugation) für alle $f, g \in L$.

c) $\langle f, f \rangle \geq 0$ für alle $f \in L$. (Beachte: b) impliziert $\langle f, f \rangle \in \mathbb{R}$.)

d) $\langle f, f \rangle = 0 \Leftrightarrow f = 0$.

Bemerkung 1.2: Nach b) ergibt das Vertauschen der Einträge im Skalarprodukt den komplex konjugierten Wert. Nach a) kann man einen skalaren Faktor aus dem rechten Eintrag des Skalarprodukts herausziehen. **Achtung:** Beim Herausziehen eines skalaren Faktors aus der linken Seite taucht dieser wegen b) komplex konjugiert vor dem Skalarprodukt auf:

$$\langle \alpha \cdot f, g \rangle = \overline{\langle g, \alpha \cdot f \rangle} = \overline{\alpha \cdot \langle g, f \rangle} = \bar{\alpha} \cdot \overline{\langle g, f \rangle} = \bar{\alpha} \cdot \langle f, g \rangle.$$

Analog ergibt sich die Linearität bezüglich des linken Eintrags im Skalarprodukt in der folgenden Form:

$$\langle \alpha \cdot f_1 + \beta \cdot f_2, g \rangle = \bar{\alpha} \cdot \langle f_1, g \rangle + \bar{\beta} \cdot \langle f_2, g \rangle.$$

Das Konzept eines Skalarproduktes ist auf endlich-dimensionalen Räumen (dem \mathbb{R}^n) bereits wohlbekannt. Es geht aber auch auf unendlich dimensionale Räume (Funktionsräume) über, wobei die Summen des Euklidischen Skalarprodukts zu Integralen werden:

Beispiel 1.3: a) Definition 1.1 verallgemeinert das wohlbekannte **Euklidische Skalarprodukt**

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right\rangle = \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i, \quad x_i, y_i \in \mathbb{R}$$

auf dem Vektorraum $L = \mathbb{R}^n$.

b) Das komplexe Euklidische Skalarprodukt auf $L = \mathbb{C}^n$:

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right\rangle = \sum_{i=1}^n \overline{x_i} \cdot y_i, \quad x_i, y_i \in \mathbb{C}.$$

c) Sei $[a, b] \in \mathbb{R}$ ein Intervall, sei $L = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}; f \text{ stetig}\}$. Dann definiert

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b \overline{f(x)} \cdot g(x) \, dx$$

ein Skalarprodukt auf den komplexen Funktionen über $[a, b]$ (das sogenannte L_2 -Skalarprodukt).

d) Sei $[a, b] \in \mathbb{R}$ ein Intervall, sei $L = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}; f \text{ stetig}\}$. Sei $w : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine glatte Funktion mit $w(x) \geq 0$ für alle $x \in [a, b]$ (die sogenannte „**Gewichtsfunktion**“). Es gelte $w(x) = 0$ an höchstens endlich vielen Stellen in $[a, b]$. Dann definiert

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b w(x) \cdot \overline{f(x)} \cdot g(x) \, dx$$

ein Skalarprodukt auf den komplexen Funktionen über $[a, b]$ (das sogenannte „**gewichtete L_{2w} -Skalarprodukt**“). Die Bedingung $w(x) > 0$ (fast überall) garantiert, dass für stetiges f aus $\langle f, f \rangle = \int_a^b w(x) \cdot |f(x)|^2 \, dx = 0$ folgt, dass $f(x) \equiv 0$ gelten muss. Das in c) betrachtete Skalarprodukt entspricht dem Standardgewicht $w(x) \equiv 1$.

Einem Skalarprodukt ist stets ein Längen- und damit ein Abstands begriff zugeordnet (eine „Norm“):

Definition und Satz 1.4:

Sei L ein Vektorraum mit einem Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Dann ist $\|f\|_2 := \sqrt{\langle f, f \rangle}$ eine „**Norm**“ auf L , d.h., die Abbildung $\|\cdot\|_2 : L \rightarrow [0, \infty)$ erfüllt:

- a) $\|f + g\|_2 \leq \|f\|_2 + \|g\|_2$ für alle $f, g \in L$ („**Dreiecksungleichung**“).
- b) $\|\alpha \cdot f\|_2 = |\alpha| \cdot \|f\|_2$ für alle $f \in L, \alpha \in \mathbb{C}$ („**Homogenität**“).
- c) $\|f\|_2 = 0 \Leftrightarrow f = 0$.

Diese Norm wird als „ **L_2 -Norm**“ bezeichnet.

Beweis: Die Eigenschaften a) – c) folgen unmittelbar aus den geforderten Eigenschaften a) – d) der Definition 1.1.

Die Dreiecksungleichung a) ergibt sich folgendermaßen:

$$\begin{aligned}\|f + g\|_2^2 &= \langle f + g, f + g \rangle = \langle f, f \rangle + \langle f, g \rangle + \langle g, f \rangle + \langle g, g \rangle \\ &= \|f\|_2^2 + \langle f, g \rangle + \overline{\langle f, g \rangle} + \|g\|_2^2 \leq \|f\|_2^2 + 2 \cdot |\langle f, g \rangle| + \|g\|_2^2.\end{aligned}$$

Mit einer Anleihe beim nächsten Satz (der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung $|\langle f, g \rangle| \leq \|f\|_2 \cdot \|g\|_2$) folgt

$$\|f + g\|_2^2 \leq \|f\|_2^2 + 2 \cdot \|f\|_2 \cdot \|g\|_2 + \|g\|_2^2 = (\|f\|_2 + \|g\|_2)^2.$$

b) ergibt sich durch $\|\alpha \cdot f\|_2^2 = \langle \alpha \cdot f, \alpha \cdot f \rangle = \alpha \cdot \underline{\alpha} \cdot \langle f, f \rangle = |\alpha|^2 \cdot \|f\|_2^2$.

c) ist nichts anderes als Definition 1.1.d).

Q.E.D.

Die folgende Aussage ist eher technischer Natur (ein nützliches Hilfsmittel in Beweisen):

Satz 1.5: (Die Cauchy–Schwarzsche Ungleichung)

Für alle $f, g \in L$ gilt $|\langle f, g \rangle|^2 \leq \langle f, f \rangle \cdot \langle g, g \rangle$, d.h., $|\langle f, g \rangle| \leq \|f\|_2 \cdot \|g\|_2$. Das Gleichheitszeichen gilt genau dann, wenn f und g bis auf eine multiplikative Konstante übereinstimmen.

Beweis: Übungsaufgabe 6.

Bemerkung 1.6: *Mit der Norm hat man einen Abstandsbegriff: Als Abstand zweier Elemente $f, g \in L$ betrachtet man $\|f - g\|_2$. Mit 1.4.d) haben 2 Elemente genau dann den Abstand 0, wenn sie übereinstimmen.*

Definition 1.7: (Konvergenz)

*Eine Folge (f_n) von Elementen in L heißt „**konvergent**“ gegen den „**Grenzwert**“ $f^* \in L$, wenn die Abstände zum Grenzwert gegen 0 konvergieren:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f^*\|_2 = 0.$$

Es wird die (vom \mathbb{R}^n vertraute) Notation $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f^$ benutzt.*

*Man nennt die Konvergenz bezüglich der L_2 -Norm auch „**Konvergenz im quadratischen Mittel**“.*

Beispiel 1.8: Betrachte $L = \{f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ stetig}\}$ mit der L_2 -Norm $\|f\|_2 = \int_{-1}^1 |f(x)|^2 dx$. Betrachte die folgenden Funktionen, die im Bereich $[0, 1/n]$ linear von 0 bis 1 wachsen:

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } -1 \leq x \leq 0, \\ n \cdot x & \text{für } 0 \leq x \leq \frac{1}{n}, \\ 1 & \text{für } \frac{1}{n} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Bei vorgegebenem x konvergieren diese Werte offensichtlich punktweise gegen

$$f^*(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } -1 \leq x \leq 0, \\ 1 & \text{für } 0 < x \leq 1. \end{cases}$$

Mit

$$\begin{aligned} \|f_n - f^*\|_2 &= \int_{-1}^1 (f_n(x) - f^*(x))^2 dx = \int_0^{1/n} (f_n(x) - f^*(x))^2 dx \\ &= \int_0^{1/n} (n \cdot x - 1)^2 dx = \frac{1}{3 \cdot n} \end{aligned}$$

konvergiert die Funktionenfolge f_n auch bezüglich der L_2 -Norm gegen f^* . Aber (Problem!): f^* ist nicht stetig, also $f^* \notin L$.

23.10.02↓

Das Problem, dass die Grenzfunktion einer Folge stetiger Funktionen nicht mehr stetig zu sein braucht, soll nun angegangen werden. Dazu zunächst eine mehr mathematisch-technische Definition (die in späteren Anwendungen dann nicht mehr so interessant sein wird):

Definition 1.9: (Vollständigkeit)

Eine Folge (f_n) heißt „**Cauchy-Folge**“ bezüglich einer Norm $\|\cdot\|$, wenn zu jedem $\epsilon > 0$ ein $N(\epsilon)$ existiert, sodass $\|f_n - f_m\| < \epsilon$ gilt für alle $n, m \geq N(\epsilon)$.

Ein Raum mit einer Norm heißt „**vollständig**“, wenn jede Cauchy-Folge in diesem Raum einen Grenzwert besitzt, der wieder in diesem Raum liegt.

Definition 1.10: (Hilberträume)

Ein Vektorraum mit einem Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ heißt „**Hilbert-Raum**“, wenn er bezüglich der L_2 -Norm $\|f\|_2 = \sqrt{\langle f, f \rangle}$ vollständig ist.

Bemerkung 1.11: Beispiel 1.8 zeigt, dass der Raum der stetigen Funktionen bezüglich der L_2 -Norm nicht vollständig ist. (Die Funktionenfolge f_n in diesem Beispiel ist eine Cauchy-Folge. Der Grenzwert f^* (es kann nur einen geben) ist aber unstetig.) Es ist daher im Folgenden nicht sinnvoll, den Raum der stetigen Funktionen weiter zu betrachten. Stattdessen sucht man nach dem kleinsten bzgl. der L_2 -Norm vollständigen Raum, der die stetigen Funktionen umfasst. Dieser stellt sich als der Raum der quadratintegrierbaren Funktionen heraus (Definition und Satz 1.12).

Wir sind nun endlich bei der entscheidenden Definition angelangt:

Definition und Satz 1.12:

Zu einem Intervall $[a, b] \subset \mathbb{R}$ und einer glatten Gewichtsfunktion $w(x)$ (siehe Beispiel 1.3) wird der „**Hilbert–Raum der quadratintegriblen Funktionen**“

$$L_{2w}([a, b]) = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}; \int_a^b w(x) \cdot |f(x)|^2 dx < \infty\}$$

mit dem gewichteten Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b w(x) \cdot \overline{f(x)} \cdot g(x) dx$$

definiert. Dieser Raum ist in der Tat vollständig bezüglich der von diesem Skalarprodukt erzeugten L_2 -Norm.

Für die triviale Gewichtsfunktion $w(x) \equiv 1$ wird dieser Raum auch mit $L_2([a, b])$ bezeichnet.

Bemerkungen und Interpretationen 1.13:

a) Da in der folgenden Theorie praktisch alle Aussagen unabhängig vom konkreten Intervall $[a, b]$ und dem Gewicht $w(x)$ sind, sprechen wir kurz von „ **L_2 –Räumen**“, „ **L_2 –Funktionen**“, „ **L_2 –Normen**“ etc. und unterdrücken in der Sprech- und Schreibweise $[a, b]$ und $w(x)$.

b) Damit die oben definierten L_2 –Räume wirklich vollständig sind, muss man statt des Riemann–Integrals einen verallgemeinerten Integralbegriff benutzen: das sogenannte **Lebesgue–Integral**. Außer für sehr pathologische (irreguläre) Funktionen stimmt das Lebesgue–Integral aber mit dem Riemann–Integral überein. Wir werden uns daher mit diesen sehr mathematisch–technischen Details nicht abmühen. Einen exakten Beweis für die Vollständigkeit des L_2 –Raums können wir folglich hier nicht führen.

c) Zu jeder L_2 –Funktion f gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ eine stetige Funktion g , die f approximiert: $\|f - g\|_2 < \epsilon$. Das liefert eine einfache Beweistechnik im L_2 : zeige die behauptete Aussage zunächst nur für stetige Funktionen. Betrachte dann eine konvergente Folge stetiger Funktionen und zeige, dass die Aussage auf den (eventuell unstetigen) Grenzwert in L_2 übergeht.

d) Für endliche Intervalle $[a, b]$ liegen alle auf $[a, b]$ stetigen Funktionen in $L_{2w}([a, b])$. Unstetige Funktionen mit Sprungstellen können ebenfalls integriert werden und liegen im L_2 -Raum. Sogar Funktionen mit (milden) Singularitäten sind quadratintegabel, z.B.:

$$f(x) = x^{-\frac{1}{3}} \in L_2([0, 1]), \text{ denn } \int_0^1 (x^{-1/3})^2 dx = 3 < \infty.$$

e) **Achtung:** Da $L_{2w}([a, b])$ auch unstetige Funktionen enthält, kann man stetige Funktionen an einigen Stellen punktweise undefinieren, ohne dass dies Integrale ändert. **In L_2 -Räumen werden zwei Funktionen f, g miteinander identifiziert, wenn sie „fast überall“ übereinstimmen.** Der Begriff „fast überall“ bedeutet dabei, dass für die Funktion

$$\chi(x) = \begin{cases} 0 & \text{für alle } x \text{ mit } f(x) = g(x), \\ 1 & \text{für alle } x \text{ mit } f(x) \neq g(x) \end{cases}$$

gilt: $\int_a^b w(x) \cdot \chi(x) dx = 0$. Dies ist recht technisch. Für uns möge hier die Vorstellung ausreichen, dass wir mit „fast überall“ meinen: „bis auf endlich viele Ausnahmepunkte“.

f) Für quadratintegable Funktionen existiert das Skalarprodukt selbst dann, wenn die Funktionen singulär sind. Dies liegt an der Cauchy-Schwarzchen Ungleichung 1.5. Diese Ungleichung garantiert weiterhin, dass die Summe zweier L_2 -Funktionen wieder eine L_2 -Funktion ist (d.h., L_2 ist in der Tat ein Vektorraum).

g) Die folgende Theorie von (verallgemeinerten) Fourier-Reihen gilt für beliebige L_2 -Funktionen, also auch für unstetige und sogar (mild-)singuläre Funktionen. Gerade diese Allgemeinheit macht die Fourier-Analyse für Anwendungen interessant.

1.2.2 Orthogonale Systeme

Im \mathbb{R}^n mit dem Euklidischen Skalarprodukt (den wir nun als Hilbert-Raum ansehen) ist die Orthogonalität zweier Vektoren dadurch charakterisiert, dass das Skalarprodukt verschwindet. Wir benutzen die selbe Notation für allgemeine Hilbert-Räume.

Definition 1.14: (Orthogonalität)

Zwei Elemente f, g eines Hilbert-Raums mit $\langle f, g \rangle = 0$ heißen „**orthogonal**“. Eine Familie $\{f_n\}$ von Hilbert-Raumelementen nennt man ein „**orthogonales System**“, wenn alle Paare f_n, f_m mit $m \neq n$ orthogonal sind. Gilt zusätzlich $\langle f_n, f_n \rangle = 1$, so heißt das System „**orthonormal**“.

Beispiel 1.15: Hier ist das entscheidende Beispiel, das uns im Folgenden am meisten interessieren wird:

Die Familie der komplexen Exponentialfunktionen $\{e^{i \cdot n \cdot x}\}$, $i = \sqrt{-1}$, $n \in \mathbb{Z}$ ist ein Orthogonalsystem auf $L_2([-\pi, \pi])$.

Dies ist leicht nachgerechnet. Für $n \neq m$ gilt:

$$\begin{aligned} \langle e^{i \cdot m \cdot x}, e^{i \cdot n \cdot x} \rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} \overline{e^{i \cdot m \cdot x}} \cdot e^{i \cdot n \cdot x} dx = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i \cdot m \cdot x} \cdot e^{i \cdot n \cdot x} dx \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} e^{i \cdot (n-m) \cdot x} dx = \left[\frac{e^{i \cdot (n-m) \cdot x}}{i \cdot (n-m)} \right]_{x=-\pi}^{x=\pi} = \frac{(-1)^{n-m} - (-1)^{n-m}}{i \cdot (n-m)} = 0. \end{aligned}$$

Für $m = n$:

$$\langle e^{i \cdot n \cdot x}, e^{i \cdot n \cdot x} \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i \cdot n \cdot x} \cdot e^{i \cdot n \cdot x} dx = \int_{-\pi}^{\pi} 1 dx = 2 \cdot \pi.$$

Mit der Euler-Identität

$$e^{i \cdot n \cdot x} = \cos(n \cdot x) + i \cdot \sin(n \cdot x)$$

bzw.

$$\cos(n \cdot x) = \frac{e^{i \cdot n \cdot x} + e^{-i \cdot n \cdot x}}{2}, \quad \sin(n \cdot x) = \frac{e^{i \cdot n \cdot x} - e^{-i \cdot n \cdot x}}{2 \cdot i}$$

ergibt sich für die Familie reeller Funktionen $\{1, \cos(x), \sin(x), \cos(2 \cdot x), \sin(2 \cdot x), \dots\}$:

$$\begin{aligned} \langle \cos(m \cdot x), \cos(n \cdot x) \rangle &= 0, \quad m \neq n, \\ \langle \sin(m \cdot x), \sin(n \cdot x) \rangle &= 0, \quad m \neq n, \\ \langle \cos(m \cdot x), \sin(n \cdot x) \rangle &= 0 \quad (\text{auch für } m = n). \end{aligned}$$

Die konstante Funktion 1 ist dabei $\cos(m \cdot x)$ mit $m = 0$. Für $m = n$ gilt:

$$\begin{aligned} \langle 1, 1 \rangle &= 2 \cdot \pi, \\ \langle \cos(n \cdot x), \cos(n \cdot x) \rangle &= \pi \quad (n > 0), \\ \langle \sin(n \cdot x), \sin(n \cdot x) \rangle &= \pi \quad (n > 0). \end{aligned}$$

Die trigonometrischen Funktionen $\{1, \cos(x), \sin(x), \cos(2 \cdot x), \sin(2 \cdot x), \dots\}$ bilden ein Orthogonalsystem auf $L_2([-\pi, \pi])$.

Will man Entwicklungen nach „einfachen Basisfunktionen“ f_1, f_2, \dots vornehmen, so ist es technisch sehr vorteilhaft, wenn diese ein Orthogonalsystem bilden. Ist dies nicht der Fall, so kann die Folge f_1, f_2, \dots mit einem sehr einfachen Algorithmus durch Linearkombinationen in ein Orthogonalsystem verwandelt werden:

Gram-Schmidt-Orthogonalisierung 1.16:

Sei f_0, f_1, \dots eine Folge linear unabhängiger Hilbert-Raumelemente. Definiere rekursiv

$$F_n = f_n - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\langle F_k, f_n \rangle}{\langle F_k, F_k \rangle} \cdot F_k$$

mit $F_0 = f_0$. Dann gilt:

$$\boxed{\{F_0, F_1, \dots\} \text{ ist ein Orthogonalsystem.}}$$

Der von f_0, \dots, f_n aufgespannte Teilraum ist identisch mit dem von F_0, \dots, F_n aufgespannten Teilraum (d.h., eine Funktion kann genau dann als Linearkombination von f_0, \dots, f_n geschrieben werden, wenn sie als Linearkombination von F_0, \dots, F_n geschrieben werden kann). Dies ist klar, da auf Grund der Rekursion jedes F_n als Linearkombination von f_0, \dots, f_n geschrieben werden kann und auch umgekehrt jedes f_n als Linearkombination von F_0, \dots, F_n .

Beweis: Induktionsbehauptung: F_0, \dots, F_n sind paarweise orthogonal.

Induktionsstart $n = 1$:

$$\langle F_0, F_1 \rangle = \langle F_0, f_1 - \frac{\langle F_0, f_1 \rangle}{\langle F_0, F_0 \rangle} \cdot F_0 \rangle = \langle F_0, f_1 \rangle - \frac{\langle F_0, f_1 \rangle}{\langle F_0, F_0 \rangle} \cdot \langle F_0, F_0 \rangle = 0.$$

Induktionsschritt $n - 1 \rightarrow n$: Für $m = 0, 1, \dots, n - 1$ gilt

$$\langle F_m, F_n \rangle = \langle F_m, f_n - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\langle F_k, f_n \rangle}{\langle F_k, F_k \rangle} \cdot F_k \rangle = \langle F_m, f_n \rangle - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\langle F_k, f_n \rangle}{\langle F_k, F_k \rangle} \cdot \langle F_m, F_k \rangle.$$

In dieser Summe verschwinden nach Induktionsvoraussetzung alle Summanden außer dem mit $k = m$. Es folgt:

$$\langle F_m, F_n \rangle = \langle F_m, f_n \rangle - \frac{\langle F_m, f_n \rangle}{\langle F_m, F_m \rangle} \cdot \langle F_m, F_m \rangle = 0.$$

Q.E.D.

Beispiel 1.17: Wir konstruieren orthogonale Polynome über dem Intervall $[-1, 1]$ bezüglich des Standardgewichts $w(x) \equiv 1$. Wir starten mit den Monomen $(f_n) = (1, x, x^2, \dots)$. Durch Gram-Schmidt-Orthogonalisierung entstehen hieraus die sogenannten „**Legendre-Polynome**“:

$$F_0(x) = 1,$$

$$F_1(x) = x - \frac{\langle F_0(x), x \rangle}{\langle F_0(x), F_0(x) \rangle} \cdot F_0(x) = x,$$

$$F_2(x) = x^2 - \frac{\langle F_0(x), x^2 \rangle}{\langle F_0(x), F_0(x) \rangle} \cdot F_0(x) - \frac{\langle F_1(x), x^2 \rangle}{\langle F_1(x), F_1(x) \rangle} \cdot F_1(x) = x^2 - \frac{1}{3},$$

$$F_3(x) = \dots = x^3 - \frac{3}{5} \cdot x,$$

$$F_4(x) = \dots = x^4 - \frac{6}{7} \cdot x^2 + \frac{3}{35},$$

$$F_5(x) = \dots = x^5 - \frac{10}{9} \cdot x^3 + \frac{5}{21} \cdot x$$

usw. Anmerkung: in der Literatur bezeichnet man als Legendre-Polynome die etwas anders normierten Polynome

$$P_n(x) = \frac{(2 \cdot n)!}{2^n \cdot (n!)^2} \cdot F_n(x).$$

Bemerkung 1.18: Aus einem Orthogonalsystem $\{F_0, F_1, \dots\}$ kann man sofort ein Orthonormalsystem $\{\tilde{F}_0, \tilde{F}_1, \dots\}$ machen, indem man $\tilde{F}_n = F_n / \|F_n\|_2$ setzt.

1.2.3 Bestapproximation und Konvergenz im quadratischen Mittel

↓25.10.02

Wir betrachten ein Orthogonalsystem $\{F_0, F_2, \dots\}$ und versuchen zunächst, ein Hilbert-Raumelement f durch eine endliche Linearkombination

$$f \approx \sum_{k=0}^n c_k \cdot F_k$$

zu approximieren. Welche Koeffizienten c_k sollte man wählen, damit der Abstand zwischen f und der Summe im L_2 -Sinne möglichst klein wird? Als Vorüberlegung betrachten wir zunächst, wie man für ein exakt darstellbares f die Entwicklungskoeffizienten c_k aus f ermittelt:

$$f = \sum_{k=0}^n c_k \cdot F_k \quad \Rightarrow \quad \langle F_m, f \rangle = \langle F_m, \sum_{k=0}^n c_k \cdot F_k \rangle = \sum_{k=0}^n c_k \cdot \langle F_m, F_k \rangle.$$

Wegen der Orthogonalität verbleibt für $m \in \{0, \dots, n\}$ von der Summe nur der Term mit $k = m$:

$$\langle F_m, f \rangle = c_m \cdot \langle F_m, F_m \rangle, \quad \text{also} \quad c_m = \frac{\langle F_m, f \rangle}{\langle F_m, F_m \rangle}.$$

Definition 1.19: (Verallgemeinerte Fourier-Koeffizienten)

Für eine L_2 -Funktion f heißen

$$c_k = \frac{\langle F_k, f \rangle}{\langle F_k, F_k \rangle}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

die (verallgemeinerten) „**Fourier-Koeffizienten bezüglich des Orthogonalsystems** $\{F_0, F_1, \dots\}$ “. Die Linearkombination

$$S_n = \sum_{k=0}^n c_k \cdot F_k$$

heißt (verallgemeinerte) „**Fourier-Approximation von f bezüglich des Orthogonalsystems**“.

Das folgende elementare Ergebnis zeigt, dass diese Fourier-Koeffizienten in der Tat die beste Koeffizientenwahl darstellen, um den Abstand zwischen f und einer Linearkombination $\sum_k \alpha_k F_k$ im L_2 -Sinne möglichst klein zu machen:

Lemma 1.20: (Besselsche (Un-)Gleichung)

Sei $\{F_0, \dots, F_n\}$ ein Orthogonalsystem.

- a) Für jede Wahl von Koeffizienten $\alpha_k \in \mathbb{C}$ gilt die „**allgemeine Besselsche Gleichung**“

$$\left\| f - \sum_{k=0}^n \alpha_k \cdot F_k \right\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \sum_{k=0}^n |c_k|^2 \cdot \|F_k\|_2^2 + \sum_{k=0}^n |\alpha_k - c_k|^2 \cdot \|F_k\|_2^2,$$

wo die c_k die Fourier-Koeffizienten aus Definition 1.19 sind.

- b) Für die Wahl $\alpha_k = c_k$ folgt die „**spezielle Besselsche Gleichung**“

$$\left\| f - \sum_{k=0}^n c_k \cdot F_k \right\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \sum_{k=0}^n |c_k|^2 \cdot \|F_k\|_2^2.$$

- c) Es folgt die „**Besselsche Ungleichung**“

$$\sum_{k=0}^n |c_k|^2 \cdot \|F_k\|_2^2 \leq \|f\|_2^2.$$

Beweis: Die allgemeine Besselsche Gleichung a) wird als Übungsaufgabe 1 nachgerechnet. Hieraus folgen sofort b) und c).

Q.E.D.

Interpretation 1.21:

Die allgemeine Besselsche Gleichung liefert sofort, dass der Abstand

$$\left\| f - \sum_{k=0}^n \alpha_k \cdot F_k \right\|_2$$

durch die Wahl der Koeffizienten $\alpha_k = c_k$ minimiert wird. Die Fourier-Approximation von f wird daher als „**Bestapproximation von f im quadratischen Mittel**“ bezüglich des Orthogonalsystems bezeichnet. Der Abstand zwischen f und dieser Bestapproximation (der „**Approximationsfehler**“) ist durch

$$\left\| f - \sum_{k=0}^n c_k \cdot F_k \right\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \sum_{k=0}^n |c_k|^2 \cdot \|F_k\|_2^2$$

gegeben. Eine Besonderheit dieser L_2 -Bestapproximation ist, dass die Entwicklungskoeffizienten c_k nicht von der Anzahl n der benutzten Entwicklungselemente F_0, \dots, F_n abhängen! Man kann den Approximationsfehler kleiner und kleiner machen, indem man einfach immer mehr Elemente im Orthogonalsystem hinzunimmt (also n anwachsen läßt), ohne dass man die Koeffizienten anpassen muss!

Nun geht es um die Frage, was passiert, wenn man den Grenzwert $n \rightarrow \infty$ betrachtet. Konvergiert die Fourier-Approximation (im L_2 -Sinne) gegen f ? Dies kann nicht allgemein beantwortet werden, sondern hängt vom betrachteten Orthogonalsystem $\{F_0, F_1, \dots\}$ ab:

Definition 1.22: (Vollständige Orthonormalsysteme)

Ein Orthogonalsystem $\{F_0, F_1, \dots\}$ heißt „**vollständig**“, wenn für jedes f im Hilbert-Raum die Fourier-Approximation im L_2 -Sinne gegen f konvergiert:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n c_k \cdot F_k = f,$$

d.h.,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| f - \sum_{k=0}^n c_k \cdot F_k \right\|_2^2 = 0.$$

Mit der Besselschen Gleichung ergibt sich sofort die folgende Charakterisierung vollständiger Orthogonalsysteme, die mathematisch aber recht trivial ist und keinerlei effektives Hilfsmittel liefert, die Vollständigkeit eines Orthogonalsystems zu überprüfen:

Satz 1.23: (Parsevalsche Gleichung)

Ein Orthogonalsystem $\{F_0, F_1, \dots\}$ ist genau dann vollständig, wenn für jedes Hilbert–Raumelement f die folgende „Parsevalsche Gleichung“ gilt:

$$\sum_{k=0}^{\infty} |c_k| \cdot \|F_k\|_2^2 = \|f\|_2^2.$$

Beweis: Die Gleichung folgt sofort aus Satz 1.20.b).

Q.E.D.

Das einzig für uns Interessante an dieser Aussage ist die folgende Interpretation:

Physikalische Interpretation 1.24:

In vielen physikalischen Anwendungen stellt das „Signal“ f ein Feld (Strom, Spannung, elektrisches oder magnetisches Feld) dar, dessen Quadrat als eine physikalische Leistung oder als lokale Energiedichte zu interpretieren ist. Das die L_2 –Norm definierende Integral hat dann die Interpretation einer Energie, genauer, einer über eine Periode des Signals „gemittelten Energie“.

Bei einer Fourier–Entwicklung $f = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \cdot F_k$ sprechen Physiker auch von einer „Zerlegung des Signals“ in die „Fourier–Moden“ F_k .

Die Parsevalsche Gleichung besagt, dass sich die Energie des Signals **vollständig** auf die Fourier–Moden verteilen muss. Ist dies nicht der Fall (d.h., ist das Orthogonalsystem nicht vollständig), so muss es weitere Anteile des Signals geben, die durch die Fourier–Moden nicht erfasst werden.

1.3 Fourier–Reihen

Die allgemeinen Hilbert–Raumstrukturen der Fourier–Reihen wurde im letzten Abschnitt in etwas abstrakter Art und Weise zusammengetragen. Nun wird es endlich konkret. Wir betrachten das in Beispiel 1.15 diskutierte spezielle Orthogonalsystem

$$\{e^{i \cdot k \cdot x}\}_{k \in \mathbb{Z}} \quad (i = \sqrt{-1})$$

auf dem Hilbert–Raum $L_2([-\pi, \pi])$. Ziel ist es, eine auf dem Intervall $[-\pi, \pi]$ gegebene Funktion nach dem obigen Orthogonalsystem zu zerlegen und zu studieren, ob und wie die Fourier–Approximationen gegen die Funktion konvergieren.

Rechentechnisch ist es meist einfacher, die komplexen Exponentialfunktionen zu verwenden. Äquivalenterweise kann man die trigonometrischen Funktionen

$$\{1, \cos(x), \sin(x), \cos(2 \cdot x), \sin(2 \cdot x), \dots\}$$

betrachten, die für reelle Funktionen zu reellen Formeln führen und daher im Anwendungskontext oft physikalisch direkter zu interpretieren sind.

1.3.1 Definition der trigonometrischen Fourier–Reihen

Wir fassen zunächst die Ergebnisse von Beispiel 1.15 zusammen. Der Unterschied zwischen der „komplexen“ und der „reellen“ Darstellung besteht lediglich darin, dass statt des komplexen Pärchens $(e^{i \cdot k \cdot x}, e^{-i \cdot k \cdot x})$ in der reellen Darstellung das Pärchen $(\cos(k \cdot x), \sin(k \cdot x))$ benutzt wird, das mit der Euler–Formel

$$e^{i \cdot k \cdot x} = \cos(k \cdot x) + i \cdot \sin(k \cdot x)$$

bzw.

$$\cos(k \cdot x) = \frac{e^{i \cdot k \cdot x} + e^{-i \cdot k \cdot x}}{2}, \quad \sin(k \cdot x) = \frac{e^{i \cdot k \cdot x} - e^{-i \cdot k \cdot x}}{2 \cdot i}$$

dem komplexen Pärchen äquivalent ist:

Definition 1.25: (Die trigonometrische Fourier–Entwicklung)

Zu einer Funktion $f \in L_2([-\pi, \pi])$ definiere die „**Fourier–Koeffizienten**“

$$c_k = \frac{\langle e^{i \cdot k \cdot x}, f \rangle}{\langle e^{i \cdot k \cdot x}, e^{i \cdot k \cdot x} \rangle} = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot e^{-i \cdot k \cdot x} dx$$

mit $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Alternativ definiere

$$a_k = \frac{\langle \cos(k \cdot x), f \rangle}{\langle \cos(k \cdot x), \cos(k \cdot x) \rangle} = \begin{cases} \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, & k = 0, \\ \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \cos(k \cdot x) dx, & k = 1, 2, \dots \end{cases}$$

sowie

$$b_k = \frac{\langle \sin(k \cdot x), f \rangle}{\langle \sin(k \cdot x), \sin(k \cdot x) \rangle} = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \sin(k \cdot x) dx, \quad k = 1, 2, \dots$$

Die entsprechenden „**Fourier–Approximationen**“ sind

$$S_n(x) = \sum_{k=-n}^n c_k \cdot e^{i \cdot k \cdot x} = a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cdot \cos(k \cdot x) + b_k \cdot \sin(k \cdot x))$$

mit $n = 0, 1, 2, \dots$.

Mit der Euler–Formel ergibt sich folgender Zusammenhang zwischen den beiden Darstellungen:

$$\begin{aligned} \sum_{k=-n}^n c_k \cdot e^{i \cdot k \cdot x} &= c_0 + \sum_{k=1}^n \left(c_k \cdot e^{i \cdot k \cdot x} + c_{-k} \cdot e^{-i \cdot k \cdot x} \right) \\ &= c_0 + \sum_{k=1}^n \left(c_k \cdot \left(\cos(k \cdot x) + i \cdot \sin(k \cdot x) \right) + c_{-k} \cdot \left(\cos(k \cdot x) - i \cdot \sin(k \cdot x) \right) \right) \\ &= \underbrace{c_0}_{a_0} + \sum_{k=1}^n \left(\underbrace{(c_k + c_{-k})}_{a_k} \cdot \cos(k \cdot x) + i \cdot \underbrace{(c_k - c_{-k})}_{b_k} \cdot \sin(k \cdot x) \right). \end{aligned}$$

Zusammenhang 1.26:

Der Zusammenhang zwischen den komplexen Fourier–Koeffizienten c_k und den reellen Koeffizienten a_k, b_k ist gegeben durch:

$$\boxed{\begin{array}{l} a_k = c_k + c_{-k} \\ b_k = i \cdot (c_k - c_{-k}) \end{array}} \quad \boxed{\begin{array}{l} c_k = \frac{1}{2} \cdot (a_k - i \cdot b_k) \\ c_{-k} = \frac{1}{2} \cdot (a_k + i \cdot b_k) \end{array}}$$

mit $k = 1, 2, \dots$ und zusätzlich $\boxed{a_0 = c_0}$.

Bemerkung 1.27: Ist die Funktion f reell, so sind die Fourier–Koeffizienten a_k, b_k reell. In der komplexen Entwicklung entspricht dies der Bedingung

$$c_{-k} = \overline{c_k}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Bemerkung 1.28: Für die Definition der Fourier–Koeffizienten a_k, b_k bzw. c_k sind nur die Werte der Funktion f auf dem Intervall $[-\pi, \pi]$ von Belang. Man sollte sich aber gleich angewöhnen, sich die Funktion f als $2 \cdot \pi$ –periodisch auf ganz \mathbb{R} fortgesetzt vorzustellen, denn die Fourier–Approximationen

$$S_n(x) = \sum_{k=-n}^n c_k \cdot e^{i \cdot k \cdot x} = a_0 + \sum_{k=1}^n \left(a_k \cdot \cos(k \cdot x) + b_k \cdot \sin(k \cdot x) \right)$$

sind ja ebenfalls $2 \cdot \pi$ –periodisch. Das liefert gleich die richtige Sichtweise für die im Abschnitt 1.3.3 folgenden Betrachtungen zur punktweisen Konvergenz.

Bemerkung 1.29: Ist die Funktion f gerade oder ungerade, so lassen sich die Integrale $\int_{-\pi}^{\pi}$, die die Fourier–Koeffizienten bestimmen, vereinfachen. Die Teilintegrale $\int_{-\pi}^0$ stimmen (eventuell bis auf ein Vorzeichen) mit den Teilintegralen \int_0^{π} überein und verdoppeln diesen Wert oder löschen ihn zu 0 aus:

Für gerade Funktionen f (also $f(x) = f(-x)$) gilt

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx, \quad a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cdot \cos(k \cdot x) dx, \quad b_k = 0$$

mit $k = 1, 2, \dots$.

Für ungerade Funktionen f (also $f(x) = -f(-x)$) gilt

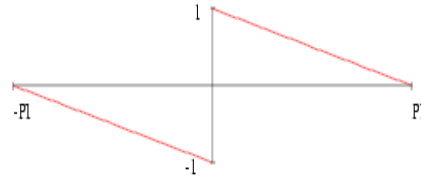
$$a_0 = 0, \quad a_k = 0, \quad b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cdot \sin(k \cdot x) dx$$

mit $k = 1, 2, \dots$.

Beispiel 1.30: Einige Beispiele von Fourier–Reihen:

a) Die („Sägezahn“-)Funktion

$$f(x) = \begin{cases} -1 - \frac{x}{\pi} & \text{für } x \in [-\pi, 0), \\ 1 - \frac{x}{\pi} & \text{für } x \in [0, \pi] \end{cases}$$



ist ungerade, also $a_k = 0 \forall k = 0, 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \sin(k \cdot x) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left(1 - \frac{x}{\pi}\right) \cdot \sin(k \cdot x) dx \\ &= \frac{1}{k} - \frac{\sin(k \cdot \pi)}{\pi \cdot k^2} = \frac{1}{k} \quad \forall k = 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

also

$$f(x) \sim \sum_{k=1,2,\dots} \frac{\sin(k \cdot x)}{k}.$$

b) Die Funktion $f(x) = |x|$ ist gerade, also $b_k = 0 \forall k = 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2 \cdot \pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x dx = \frac{\pi}{2}, \\ a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \cos(k \cdot x) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cdot \cos(k \cdot x) dx \\ &= \frac{2}{\pi} \cdot \left[\frac{\cos(k \cdot x)}{k^2} + \frac{x \cdot \sin(k \cdot x)}{k} \right]_{x=0}^{x=\pi} = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{(-1)^k - 1}{k^2} = \begin{cases} -\frac{4}{\pi \cdot k^2}, & k = 1, 3, 5, \dots, \\ 0, & k = 2, 4, 6, \dots, \end{cases} \end{aligned}$$

also

$$|x| \sim \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \cdot \sum_{k=1,3,5,\dots} \frac{\cos(k \cdot x)}{k^2}.$$

28.10.02↓

1.3.2 Konvergenz im quadratischen Mittel

Satz 1.31: (Fourier-Koeffizienten bestimmen eindeutig die Funktion)

Verswinden alle Fourier-Koeffizienten einer Funktion $f \in L_2([a, b])$, so gilt $f \equiv 0$ (fast überall). Es folgt, dass 2 Funktionen in $L_2([a, b])$ mit den selben Fourier-Koeffizienten (fast überall) übereinstimmen.

Beweisskizze: a) Für auf $[-\pi, \pi]$ stetigem f wird in der Übungsaufgabe 16 gezeigt, dass die Schlussfolgerung

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot e^{i \cdot k \cdot x} dx = 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z} \quad \Rightarrow \quad f(x) = 0 \quad \forall x \in [-\pi, \pi]$$

korrekt ist.

b) Für unstetiges $f \in L_2([a, b])$ betrachten wir die Stammfunktion

$$F(x) = \int_{-\pi}^x f(y) dy.$$

Diese Funktion ist stetig und fast überall differenzierbar mit $F'(x) = f(x)$ (diese Aussagen entstammen der Theorie der Lebesgue-Integration), und es gilt $F(-\pi) = 0$. Partielle Integration liefert für beliebiges $k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 0$:

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{F(x)}_{u(x)} \cdot \underbrace{e^{i \cdot k \cdot x}}_{v'(x)} dx &= \left[\underbrace{F(x)}_{u(x)} \cdot \underbrace{\frac{e^{i \cdot k \cdot x}}{i \cdot k}}_{v(x)} \right]_{x=-\pi}^{x=\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{F'(x)}_{u'(x)} \cdot \underbrace{\frac{e^{i \cdot k \cdot x}}{i \cdot k}}_{v(x)} dx \\ &= F(\pi) \cdot \frac{(-1)^k}{i \cdot k} - \frac{1}{i \cdot k} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot e^{i \cdot k \cdot x} dx = 0. \end{aligned}$$

(Hierbei ist $F(\pi)$ bis auf einen Faktor der Fourier-Koeffizient c_0 , das Integral ist bis auf einen Faktor der Fourier-Koeffizient c_k von f . Alle diese Koeffizienten werden als verschwindend vorausgesetzt.) Nach a) folgt für die stetige Funktion F das Ergebnis $F(x) = 0 \quad \forall x \in [-\pi, \pi]$. Damit gilt für beliebige Intervalle $[\alpha, \beta] \subset [-\pi, \pi]$:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(y) dy = F(\beta) - F(\alpha) = 0,$$

woraus folgt, dass f fast überall verschwinden muss.

c) Haben zwei Funktionen f und g die selben Fourier-Koeffizienten, so verschwinden alle Fourier-Koeffizienten von $f - g$, womit nach a) und b) fast überall $f(x) - g(x) = 0$ gelten muss.

Q.E.D.

Der obige Satz besagt, dass die Fourier–Koeffizienten die Funktion eindeutig bestimmen (fast überall). Dies ist ein erster Hinweis darauf, dass die trigonometrischen Funktionen, nach denen entwickelt wird, in der Tat ein vollständiges System von Basisfunktionen bilden, mit denen andere Funktionen dargestellt werden können. Speziell sollten die entwickelten Funktionen (fast überall) aus den Fourier–Koeffizienten rekonstruierbar sein. Als Kandidat für die Rekonstruktion bieten sich natürlich die Fourier–Approximationen S_n aus Definition 1.25 an, deren Grenzwert für $n \rightarrow \infty$ in der Tat im L_2 –Sinne gegen die Funktion konvergiert. Wir schliessen diesen Abschnitt mit dem folgenden Resultat ab, das wir hier allerdings noch nicht gut begründen geschweige denn sauber beweisen können:

Satz 1.32: (Die trigonometrischen Funktionen sind vollständig)

Die trigonometrischen Funktionen $\{e^{i \cdot k \cdot x}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ bzw.

$$\{1, \cos(x), \sin(x), \cos(2 \cdot x), \sin(2 \cdot x), \dots\}$$

bilden ein vollständiges Orthogonalsystem in $L_2([-\pi, \pi])$ im Sinne von Definition 1.22. Also: für jedes $f \in L_2([-\pi, \pi])$ gilt im L_2 –Sinne

$$f = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n,$$

wo S_n die endlichen Fourier–Approximationen

$$S_n(x) = \sum_{k=-n}^n c_k \cdot e^{i \cdot k \cdot x} = a_0 + \sum_{k=1}^n \left(a_k \cdot \cos(k \cdot x) + b_k \cdot \sin(k \cdot x) \right)$$

sind.

Wir haben hier nicht den technischen Apparat, einen sauberen Beweis zu führen, daher nur die grobe Beweisidee:

Beweisidee: Wir werden im Abschnitt 1.3.3 die punktweise Konvergenz von $S_n(x)$ gegen $f(x)$ betrachten und herausbekommen, dass

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x)$$

an allen Stellen $x \in [-\pi, \pi]$ gilt, wenn f nur genügend glatt ist (z.B. stetig und beidseitig differenzierbar, siehe Satz 1.39). Diese punktweise Konvergenz impliziert natürlich die L_2 –Konvergenz von S_n gegen f . Die Funktionen in L_2 lassen sich durch solche glatten Funktionen im L_2 –Sinne beliebig genau approximieren, woraus (nach einigen technischen Abschätzungen) dann folgt, dass die L_2 –Konvergenz für die glatten Funktionen auch auf die weniger glatten Funktionen in L_2 übergeht.

Q.E.D.

1.3.3 Punktweise Konvergenz

Die Vollständigkeit der trigonometrischen Funktionen nach Satz 1.32 garantiert uns die Konvergenz der trigonometrischen Fourier-Reihen S_n gegen die Ausgangsfunktion f im L_2 -Sinne. Intuitiv besagt dies, dass die Fourier-Approximationen $S_n(x)$ für „die meisten Punkte“ $x \in [-\pi, \pi]$ gegen den Wert $f(x)$ konvergieren muss, es bleibt aber hinreichend viel Spielraum für Stellen x , an denen $S_n(x)$ nicht gegen $f(x)$ konvergiert. In diesem Abschnitt soll der Frage nach der punktweisen Konvergenz genauer nachgegangen werden: an welchen Punkten x kann garantiert werden, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = f(x)$ gilt? Zunächst eine allgemeine Aussage zur Konvergenz von Funktionenreihen:

Satz 1.33: (Weierstraßsches Majorantenkriterium)

Sei (f_k) eine Folge stetiger Funktionen über $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} y_k$ mit $y_k := \sup\{|f_k(x)|; x \in [a, b]\}$, so konvergiert

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^n f_k(x)$$

für jedes $x \in [a, b]$. Die punktweise durch $S^*(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x)$ definierte Grenzfunktion ist wiederum stetig.

Beweis: technisch.

Beispiel 1.34: Da $\sum_k \frac{1}{k^2}$ konvergiert, erhalten wir sofort für das Beispiel 1.30.b), dass die Reihe

$$S^*(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \cdot \sum_{k=1,3,5,\dots} \frac{\cos(k \cdot x)}{k^2} \stackrel{(k=2 \cdot m+1)}{=} \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\cos((2 \cdot m + 1) \cdot x)}{(2 \cdot m + 1)^2}$$

für jedes $x \in [-\pi, \pi]$ konvergiert und dass die Grenzfunktion $S^*(x)$ stetig ist. Aus der punktweisen Konvergenz folgt auch die Konvergenz von S_n gegen S^* im L_2 -Sinne, denn

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \|S_n - S^*\|_2 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} (S_n(x) - S^*(x))^2 dx \\ &\stackrel{(*)}{=} \int_{-\pi}^{\pi} \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n(x) - S^*(x))^2 dx = \int_{-\pi}^{\pi} 0 dx = 0. \end{aligned}$$

(Mathematisch ist der Schritt $(*)$ (Vertauschen von Limes und Integral) alles andere als trivial. Hier müssten wir den Begriff der „gleichmäßigen Konvergenz“ einführen. Als Physiker machen wir das einfach skrupellos.)

Dem Vollständigkeitssatz 1.32 nach konvergiert S_n im L_2 -Sinne gegen die Ausgangsfunktion $f(x) = |x|$, welche die Fourier-Entwicklung

$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \cdot \sum_{k=1,3,5,\dots} \frac{\cos(k \cdot x)}{k^2}$$

erzeugte. Andererseits ist auch S^* der Grenzwert von S_n im L_2 -Sinne. Da Grenzwerte eindeutig sind, folgt $f = S^*$ im L_2 -Sinne (d.h., „fast überall“). Da weiterhin sowohl f als auch S^* stetige Funktionen sind, bedeutet „ $f = S^*$ im L_2 -Sinne“, dass auch punktweise $f(x) = S^*(x)$ für alle $x \in [-\pi, \pi]$ gelten muss, also

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\cos((2 \cdot m + 1) \cdot x)}{(2 \cdot m + 1)^2} \quad \text{für alle } x \in [-\pi, \pi].$$

Wir haben damit ein erstes Beispiel, in dem die (unendliche) Fourier-Reihe punktweise die Ausgangsfunktion darstellt.

Zunächst technisches Vorgeplänkel:

Definition 1.35: (Die integrierbaren Funktionen)

Die Funktionen des Raums

$$L_1([a, b]) = \left\{ f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}; \int_a^b |f(x)| dx < \infty \right\}$$

nennt man die „über $[a, b]$ integrierbaren Funktionen“. Die trigonometrischen Fourier-Koeffizienten

$$c_k = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot e^{-i \cdot k \cdot x} dx$$

existieren wegen

$$\left| \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot e^{-i \cdot k \cdot x} dx \right| \leq \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) \cdot e^{-i \cdot k \cdot x}| dx = \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)| dx < \infty$$

für jedes $f \in L_1([-\pi, \pi])$.

Bemerkung 1.36: Der Raum $L_2([a, b])$ der quadratintegrierbaren Funktionen 1.12 ist ein Unterraum von $L_1([a, b])$, wenn $[a, b]$ ein endliches Intervall ist. Dies liegt an der Cauchy–Schwarz’schen Ungleichung 1.5. Für endliche Intervalle liegt nämlich

$$g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{|f(x)|} & \text{für } f(x) \neq 0, \\ 1 & \text{für } f(x) = 0 \end{cases}$$

in $L_2([a, b])$, da $|g(x)| \equiv 1$ gilt:

$$\|g\|_2 = \sqrt{\int_a^b |g(x)|^2 dx} = \sqrt{b - a}.$$

Per Cauchy–Schwarz folgt mit $\overline{f(x)} \cdot g(x) = \overline{f(x)} \cdot f(x) / |f(x)| = |f(x)|$:

$$\int_a^b |f(x)| dx = \int_a^b \overline{f(x)} \cdot g(x) dx = \langle f, g \rangle \leq \|f\|_2 \cdot \|g\|_2 = \sqrt{b - a} \cdot \|f\|_2 < \infty.$$

Lemma 1.37: (Riemann–Lebesgue–Lemma)

Die Fourier–Koeffizienten jeder integrierbaren Funktion $f \in L_1([-\pi, \pi])$ bilden eine Nullfolge:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \cos(k \cdot x) \, dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \sin(k \cdot x) \, dx = 0.$$

Beweisskizze: Wir stellen uns f als $2 \cdot \pi$ -periodisch fortgesetzt vor. Für $2 \cdot \pi$ -periodische Funktionen $g(x)$ gilt

$$\int_{-\pi+\alpha}^{\pi+\alpha} g(x) \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \, dx$$

für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$. Mit der Substitution $x = y - \pi/k$ folgt:

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot e^{-i \cdot k \cdot x} \, dx = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{-\pi+\frac{\pi}{k}}^{\pi+\frac{\pi}{k}} f\left(y - \frac{\pi}{k}\right) \cdot e^{-i \cdot k \cdot \left(y - \frac{\pi}{k}\right)} \, dy \\ &= \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f\left(y - \frac{\pi}{k}\right) \cdot e^{-i \cdot k \cdot y} \cdot \underbrace{e^{i \cdot k \cdot \frac{\pi}{k}}}_{-1} \, dy = -\frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f\left(y - \frac{\pi}{k}\right) \cdot e^{-i \cdot k \cdot y} \, dy. \end{aligned}$$

Es folgt

$$c_k = \frac{1}{2} \cdot (c_k + c_k) = \frac{1}{4 \cdot \pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \left(f(x) - f\left(x - \frac{\pi}{k}\right) \right) \cdot e^{-i \cdot k \cdot x} \, dx,$$

also

$$|c_k| \leq \frac{1}{4 \cdot \pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \left| f(x) - f\left(x - \frac{\pi}{k}\right) \right| \, dx. \quad (\#)$$

Für stetiges f ist nun alles klar:

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} |c_k| &\leq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{4 \cdot \pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \left| f(x) - f\left(x - \frac{\pi}{k}\right) \right| \, dx \\ &\stackrel{(*)}{=} \int_{-\pi}^{\pi} \lim_{k \rightarrow \infty} \left| f(x) - f\left(x - \frac{\pi}{k}\right) \right| \, dx = 0. \end{aligned}$$

(Für einen mathematisch sauberen Beweis ist die Vertauschung von Limes und Integral im Schritt (*) natürlich genauer zu untersuchen.) Für eine unstetige integrierbare Funktion benutzt man, dass man integrierbare Funktionen beliebig genau durch eine stetige Funktion approximieren kann, d.h., zu jedem $\epsilon > 0$ existiert eine stetige Funktion $s(x)$ mit

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - s(x)| \, dx < \epsilon.$$

Mit (#) folgt

$$\begin{aligned}
 |c_k| &\leq \frac{1}{4 \cdot \pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \left| \underbrace{f(x) - s(x) + s(x)}_0 - \underbrace{s\left(x - \frac{\pi}{k}\right) + s\left(x - \frac{\pi}{k}\right)}_0 - f\left(x - \frac{\pi}{k}\right) \right| dx \\
 &\leq \frac{1}{4 \cdot \pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - s(x)| dx + \frac{1}{4 \cdot \pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \left| s(x) - s\left(x - \frac{\pi}{k}\right) \right| dx \\
 &\quad + \frac{1}{4 \cdot \pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \left| s\left(x - \frac{\pi}{k}\right) - f\left(x - \frac{\pi}{k}\right) \right| dx \\
 &\stackrel{(**)}{=} \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - s(x)| dx + \frac{1}{4 \cdot \pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \left| s(x) - s\left(x - \frac{\pi}{k}\right) \right| dx \\
 &\leq \epsilon + \text{Nullfolge}_k.
 \end{aligned}$$

(Zu Schritt (**): das dritte Integral stimmt mit dem ersten überein, da der Integrand $2 \cdot \pi$ -periodisch ist).

Zu jedem ϵ kann man damit für alle hinreichend großen k garantieren, dass $|c_k| \leq \epsilon + \epsilon$ gilt. Damit ist $|c_k|$ eine Nullfolge.

Q.E.D.

Um die punktweise Konvergenz genauer zu untersuchen, brauchen wir zunächst ein starkes technisches Hilfsmittel. Die endlichen Fourier-Reihen stellen sich als die Wirkung eines Integraloperators auf die Ausgangsfunktion dar:

↓6.11.02

Satz 1.38: (Integraldarstellung per Dirichlet-Kern)

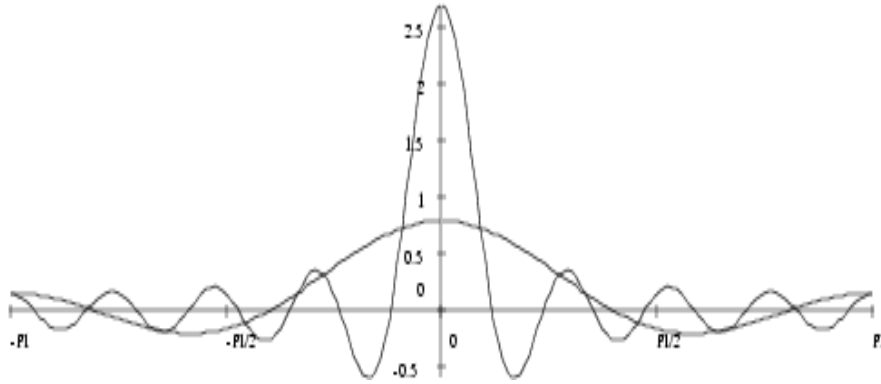
Interpretiere eine auf dem Intervall $[-\pi, \pi]$ gegebene Funktion $f \in L_1([-\pi, \pi])$ als $2 \cdot \pi$ -periodisch auf \mathbb{R} fortgesetzt (also $f(x + 2 \cdot \pi) = f(x)$). Für die Fourier-Approximation von f gilt

$$\begin{aligned}
 S_n(x) &= \sum_{k=-n}^n c_k \cdot e^{i \cdot k \cdot x} = \int_{-\pi}^{\pi} D_n(x-t) \cdot f(t) dt = \int_{-\pi}^{\pi} D_n(t) \cdot f(x+t) dt \\
 &= \int_0^{\pi} D_n(t) \cdot (f(x+t) + f(x-t)) dt
 \end{aligned}$$

mit dem sogenannten „Dirichlet-Kern“

$$D_n(y) = \begin{cases} \frac{1}{2 \cdot \pi} \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right) \cdot y\right)}{\sin\left(\frac{y}{2}\right)} & \text{für } y \neq 0 \\ \frac{n + \frac{1}{2}}{\pi} & \text{für } y = 0. \end{cases}$$

Es gilt $\int_{-\pi}^{\pi} D_n(y) dy = 1$. Hier eine Graphik von D_n mit $n = 2$ und $n = 8$:



Beweis:

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \sum_{k=-n}^n c_k \cdot e^{i \cdot k \cdot x} = \sum_{k=-n}^n \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cdot e^{-i \cdot k \cdot t} dt \cdot e^{i \cdot k \cdot x} \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cdot \underbrace{\frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \sum_{k=-n}^n e^{i \cdot k \cdot (x-t)}}_{D_n(x-t)} dt. \end{aligned}$$

Es gilt

$$\begin{aligned} D_n(y) &= \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \sum_{k=-n}^n e^{i \cdot k \cdot y} = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \left(\sum_{k=0}^n e^{i \cdot k \cdot y} + \sum_{k=0}^n e^{-i \cdot k \cdot y} - 1 \right) \\ &= \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \left(\sum_{k=0}^n (e^{i \cdot y})^k + \sum_{k=0}^n (e^{-i \cdot y})^k - 1 \right). \end{aligned}$$

Mit der Summenformel $\sum_{k=0}^n x^k = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$ für geometrische Reihen erhält man:

$$\begin{aligned} D_n(y) &= \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \left(\frac{e^{i \cdot (n+1) \cdot y} - 1}{e^{i \cdot y} - 1} + \frac{e^{-i \cdot (n+1) \cdot y} - 1}{e^{-i \cdot y} - 1} - 1 \right) \\ &= \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{2 \cdot \cos(n \cdot y) - 2 \cdot \cos((n+1) \cdot y)}{2 - 2 \cdot \cos(y)} \\ &\stackrel{(*)}{=} \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{4 \cdot \sin((n + \frac{1}{2}) \cdot y) \cdot \sin(\frac{1}{2} \cdot y)}{4 \cdot \sin^2(\frac{y}{2})} = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{\sin((n + \frac{1}{2}) \cdot y)}{\sin(\frac{y}{2})}. \end{aligned}$$

Hierbei werden in (*) die üblichen Additionstheoreme auf

$$\cos(n \cdot y) - \cos((n+1) \cdot y) = \cos((n + \frac{1}{2}) \cdot y - \frac{1}{2} \cdot y) - \cos((n + \frac{1}{2}) \cdot y + \frac{1}{2} \cdot y)$$

angewendet. Weiterhin gilt mit der Substitution $\xi = x - t$

$$\int_{-\pi}^{\pi} D_n(x-t) \cdot f(t) dt = \int_{x-\pi}^{x+\pi} D_n(\xi) \cdot f(x+\xi) d\xi = \int_{-\pi}^{\pi} D_n(\xi) \cdot f(x+\xi) d\xi,$$

wobei im letzten Schritt die $2 \cdot \pi$ -Periodizität von f und D_n verwendet wird. Letztlich folgt mit $D_n(-\xi) = D_n(\xi)$:

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(\xi) \cdot f(x+\xi) d\xi &= \int_{-\pi}^0 D_n(\xi) \cdot f(x+\xi) d\xi + \int_0^{\pi} D_n(\xi) \cdot f(x+\xi) d\xi \\ &= \int_0^{\pi} D_n(-\xi) \cdot f(x-\xi) d\xi + \int_0^{\pi} D_n(\xi) \cdot f(x+\xi) d\xi \\ &= \int_0^{\pi} D_n(\xi) \cdot (f(x-\xi) + f(x+\xi)) d\xi \end{aligned}$$

und

$$\int_{-\pi}^{\pi} D_n(y) dy = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \sum_{k=-n}^n e^{i \cdot k \cdot y} dy = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \sum_{k=-n}^n \int_{-\pi}^{\pi} e^{i \cdot k \cdot y} dy = 1$$

(alle Terme außer $k = 0$ ergeben 0).

Q.E.D.

Hier nun der entscheidende Satz, der für die in praktischen Anwendungen relevanten Funktionen die Frage der punktweisen Konvergenz klärt:

Satz 1.39: (Das Dirichlet–Kriterium für punktweise Konvergenz)

Sei $f \in L_1([-\pi, \pi])$. Gilt an einer Stelle $x_0 \in (-\pi, \pi)$, dass sowohl der links- als auch der rechtsseitige Grenzwert

$$f(x_0 - 0) := \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} f(x_0 - h) \quad f(x_0 + 0) := \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} f(x_0 + h)$$

existiert und ebenfalls die links- und rechtsseitigen Ableitungen

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} \frac{f(x_0 - 0) - f(x_0 - h)}{h}, \quad \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 + 0)}{h},$$

so konvergieren die Fourier–Approximationen gegen den Mittelwert des links- und rechtsseitigen Grenzwerts:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x_0) = \boxed{\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot e^{i \cdot k \cdot x_0} = \frac{f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)}{2}}.$$

Dies gilt auch für $x_0 = -\pi$ und $x_0 = \pi$, wenn die $2 \cdot \pi$ -periodisch fortgesetzte Funktion f die obigen Glattheitseigenschaften hat.

Beweis: Mit $D_n(-t) = D_n(t)$ und $\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t) dt = 1$ ($\Rightarrow \int_0^{\pi} D_n(t) dt = \frac{1}{2}$) ergibt sich

$$\begin{aligned}
& S_n(x_0) - \frac{f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)}{2} \\
&= \int_0^{\pi} D_n(t) \cdot (f(x_0 + t) + f(x_0 - t)) dt - \int_0^{\pi} D_n(t) \cdot (f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)) dt \\
&= \int_0^{\pi} D_n(t) \cdot ((f(x_0 + t) - f(x_0 + 0)) + (f(x_0 - t) - f(x_0 - 0))) dt \\
&= \int_0^{\pi} \frac{1}{2 \cdot \pi} \frac{\sin((n + \frac{1}{2}) \cdot t)}{\sin(\frac{t}{2})} \cdot ((f(x_0 + t) - f(x_0 + 0)) + (f(x_0 - t) - f(x_0 - 0))) dt \\
&= \int_0^{\pi} \sin((n + \frac{1}{2}) \cdot t) \cdot \underbrace{\frac{1}{\pi} \cdot \frac{\frac{t}{2}}{\sin(\frac{t}{2})} \cdot \left(\frac{f(x_0 + t) - f(x_0 + 0)}{t} + \frac{f(x_0 - t) - f(x_0 - 0)}{t} \right)}_{g(t)} dt \\
&= \int_0^{\pi} \left(\sin(n \cdot t) \cdot \cos(\frac{1}{2} \cdot t) + \cos(n \cdot t) \cdot \sin(\frac{1}{2} \cdot t) \right) \cdot g(t) dt \\
&= \frac{1}{2} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \sin(n \cdot t) \cdot \cos(\frac{1}{2} \cdot t) \cdot (g(t) - g(-t)) dt \\
&\quad + \frac{1}{2} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \cos(n \cdot t) \cdot \sin(\frac{1}{2} \cdot t) \cdot (g(t) - g(-t)) dt.
\end{aligned}$$

Die entscheidende Beobachtung hier ist, dass wegen der vorausgesetzten Existenz der einseitigen Ableitungen die Funktion $g(t)$ keine Singularität bei $t = 0$ hat und damit integrierbar ist. Mit dem Riemann–Lebesgue–Lemma 1.37 ergibt sich, dass die obige Differenz zwischen $S^*(x)$ und dem Mittelwert der einseitigen Grenzwerte eine Nullfolge ist.

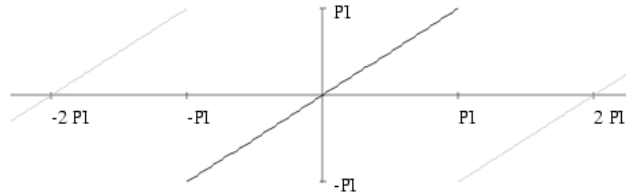
Q.E.D.

Merke 1.40:

An allen Stellen, wo die Fourier-entwickelte Funktion stetig und differenzierbar ist, wird sie durch die unendliche Fourier-Reihe dargestellt. Werden glatte (stetig und differenzierbare) Funktionen aneinander gestückt, so konvergiert die unendliche Fourier-Reihe gegen den Mittelpunkt der Grenzwerte von links- und rechts. Wenn die Stückelung stetig ist, wird auch die Nahtstelle von der Fourier-Reihe korrekt dargestellt.

Vorsicht 1.41:

Die Stetigkeit bezieht sich auf die $2 \cdot \pi$ -periodisch fortgesetzte Funktion!
 Die Funktion $f(x) = x$ ist nicht stetig an den Stellen $x = \pm\pi, \pm 3 \cdot \pi, \pm 5 \cdot \pi, \dots$, wenn man sie $2 \cdot \pi$ -periodisch fortgesetzt betrachtet!



Beispiel 1.42: In Beispiel 1.30.a) hatten wir für die „Sägezahnfunktion“

$$f(x) = \begin{cases} -1 - \frac{x}{\pi} & \text{für } x \in [-\pi, 0), \\ 1 - \frac{x}{\pi} & \text{für } x \in [0, \pi] \end{cases}$$

die Fourier-Entwicklung

$$f(x) \sim \sum_{k=1,2,\dots} \frac{\sin(k \cdot x)}{k}$$

gefunden. An allen Stetigkeitsstellen ist die Funktion differenzierbar, so dass die Fourier-Reihe an diesen Stellen gegen $f(x)$ konvergiert. An den Unstetigkeitsstellen $x = 0, \pm 2 \cdot \pi, \pm 4 \cdot \pi, \dots$ ist das Dirichlet-Kriterium aber immer noch erfüllt: Die Fourier-Reihe konvergiert gegen den Mittelwert des links- und rechtsseitigen Limes (also 0):

$$\sum_{k=1,2,\dots} \frac{\sin(k \cdot x)}{k} = \begin{cases} -1 - \frac{x}{\pi} & \text{für } x \in [-\pi, 0), \\ 0 & \text{für } x = 0 \\ 1 - \frac{x}{\pi} & \text{für } x \in (0, \pi]. \end{cases}$$

Außer an der Sprungstelle (wo wir willkürlich $f(0) = 1$ definiert hatten), wird $f(x)$ also überall punktweise durch die unendliche Fourier-Reihe dargestellt. Beachte auch Aufgabe 9 von Blatt 2.

Bemerkung 1.43: Wir haben mit Satz 1.39 ein entscheidendes Teilargument für den Beweis von Satz 1.32 über die Vollständigkeit der trigonometrischen Funktionen im L_2 -Sinne nachgeliefert. Man kann alle Funktionen in $L_2([-\pi, \pi])$ beliebig genau durch stetige Funktionen approximieren, die das Dirichlet-Kriterium erfüllen und somit punktweise über ihre Fourier-Reihen dargestellt werden.

Bemerkung 1.44: Es ergibt sich ein verblüffendes „Lokalitätsprinzip“:

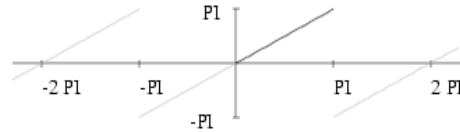
Die punktweise Konvergenz der Fourier-Reihe hängt nur von lokalen Eigenschaften der Funktion in der Umgebung des betrachteten Punktes ab!

Z.B. reichen Stetigkeit und beidseitige Differenzierbarkeit an einem Punkt für die lokale Darstellbarkeit als Fourier-Reihe an diesem Punkt. Dies steht in krassem Gegensatz zu der Tatsache, dass die Fourier-Koeffizienten global von der Funktion bestimmt werden.

Hat man vor, eine Funktion f auf einem Teilintervall $(a, b) \subset [-\pi, \pi]$ durch eine Fourier-Reihe darzustellen, so kann das auf viele verschiedene Arten und Weisen geschehen, indem man f von (a, b) **irgendwie** auf den Rest des Intervalles $[-\pi, \pi]$ fortsetzt. Abhängig von dieser Fortsetzung ergeben sich völlig unterschiedliche Fourier-Reihen, die jedoch innerhalb des Intervalls (a, b) alle gegen dieselbe Funktion konvergieren!

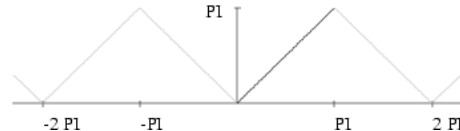
Beispiel: Wir wollen die Funktion $f(x) = x$ auf dem Intervall $[0, \pi] \subset [-\pi, \pi]$ durch eine Fourier-Reihe darstellen. Einige Möglichkeiten:

1) ungerade Fortsetzung; unstetig:



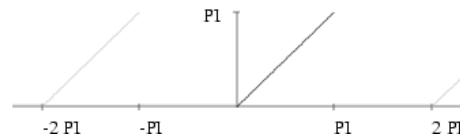
$$f_1(x) = 2 \cdot \left(\sin(x) - \frac{\sin(2 \cdot x)}{2} + \frac{\sin(3 \cdot x)}{3} - \dots \right).$$

2) gerade Fortsetzung; stetig:



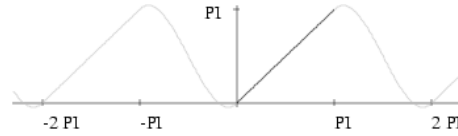
$$f_2(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \cdot \left(\cos(x) + \frac{\cos(3 \cdot x)}{3^2} + \frac{\cos(5 \cdot x)}{5^2} + \dots \right).$$

3) unstetige Fortsetzung:



$$f_3(x) = \frac{f_1(x) + f_2(x)}{2}.$$

4) glatte Fortsetzung:



$f_4(x)$ = eine schnell konvergierende Fourier–Reihe.

1.3.4 Abklingverhalten der Fourier–Koeffizienten

↓8.11.02

Nach dem Riemann–Lebesgue–Lemma 1.37 bilden die Fourier–Koeffizienten prinzipiell eine Nullfolge. Es gilt das Prinzip: je glatter die Funktion, um so schneller fallen die Fourier–Koeffizienten. Zunächst eine einfache Beobachtung:

Satz 1.45:

Für eine $2 \cdot \pi$ –periodische differenzierbare Funktion f mit integrierbarer Ableitung f' gilt

$$c_k(f') = i \cdot k \cdot c_k(f),$$

wo $c_k(f')$ bzw. $c_k(f)$ die Fourier–Koeffizienten von f' bzw. f sind.

Beweis: Es gilt $f(-\pi) = f(\pi)$ und $e^{i \cdot k \cdot \pi} = (-1)^k = e^{-i \cdot k \cdot \pi}$. Durch partielle Integration folgt:

$$\begin{aligned} c_k(f') &= \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \cdot e^{-i \cdot k \cdot x} dx \\ &= \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \left[f(x) \cdot e^{-i \cdot k \cdot x} \right]_{x=-\pi}^{x=\pi} - \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot (-i \cdot k) \cdot e^{-i \cdot k \cdot x} dx \\ &= \frac{f(\pi) \cdot e^{-i \cdot k \cdot \pi} - f(-\pi) \cdot e^{i \cdot k \cdot \pi}}{2 \cdot \pi} + i \cdot k \cdot c_k(f) = i \cdot k \cdot c_k(f). \end{aligned}$$

Q.E.D.

Diese Aussage ist leicht zu merken: stellt man sich die Funktion direkt als Fourier–Reihe gegeben vor, so kann man die Summanden der Reihe einzeln differenzieren:

$$\frac{d}{dx} \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot e^{i \cdot k \cdot x}}_{f(x)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot \frac{d}{dx} e^{i \cdot k \cdot x} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{c_k \cdot (i \cdot k)}_{c_k(f')} \cdot e^{i \cdot k \cdot x}.$$

Bemerkung 1.46: So trivial der Zusammenhang zwischen den Fourier-Koeffizienten von f und f' mathematisch auch sein mag, er ist für Anwendungen von zentraler Bedeutung:

Das Ableiten wird für die Fourier-Koeffizienten zu einer algebraischen Operation (Multiplikation mit $i \cdot k$). Fourier-Ansätze verwandeln daher Differentialgleichungen in algebraische Gleichungen für die Fourier-Koeffizienten.

Siehe das Motivationsbeispiel im einführenden Abschnitt 1.1.

Satz 1.47: (Abklingverhalten der Fourier-Koeffizienten)

Ist eine $2 \cdot \pi$ -periodische Funktion p -fach differenzierbar und ist die p -te Ableitung integrierbar, so gilt für die Fourier-Koeffizienten der Funktion:

$$|c_k| = o\left(\frac{1}{|k|^p}\right).$$

(Das „Landau-Symbol“ o bedeutet $\lim_{|k| \rightarrow \infty} |k|^p \cdot |c_k| = 0$.)

Beweis: Seien $c_k(f^{(p)})$ die Fourier-Koeffizienten der p -ten Ableitung. Nach Satz 1.45 gilt

$$c_k(f^{(p)}) = i \cdot k \cdot c_k(f^{(p-1)}) = (i \cdot k)^2 \cdot c_k(f^{(p-2)}) = \dots = (i \cdot k)^p \cdot c_k(f).$$

Nach dem Riemann-Lebesgue-Lemma 1.37 bilden die Fourier-Koeffizienten $c_k(f^{(p)})$ der p -ten Ableitung eine Nullfolge für $|k| \rightarrow \infty$, d.h., die Fourier-Koeffizienten $c_k = c_k(f)$ fallen schneller ab als $1/|k|^p$:

$$c_k(f) = \frac{c_k(f^{(p)})}{(i \cdot k)^p} = o\left(\frac{1}{|k|^p}\right).$$

Q.E.D.

Merke 1.48:

Je glatter die Funktion (d.h., je öfter differenzierbar), um so schneller konvergieren die Fourier-Koeffizienten gegen 0.

Bemerkung 1.49: In Satz 1.47 wird das Abklingverhalten der Fourier-Koeffizienten mittels des Landau-Symbols o recht unspezifisch als „schneller abfallend als $1/|k|^p$ “ beschrieben. Die in der Praxis auftretenden Funktionen sind meist stückweise aus glatten Anteilen zusammengesetzt, wodurch sich in der Praxis meist „schneller abfallend als $1/|k|^p$ “ in der Form

„um eine k -Potenz schneller abfallend als $1/|k|^p$ “

ergibt. Es gilt die Faustregel:

$$\begin{aligned} f \text{ unstetig:} & \quad c_k \sim \frac{1}{k}. \\ f \text{ stetig, } f' \text{ unstetig:} & \quad c_k \sim \frac{1}{k^2}. \\ f' \text{ stetig, } f'' \text{ unstetig:} & \quad c_k \sim \frac{1}{k^3}. \\ f^{(p)} \text{ stetig, } f^{(p+1)} \text{ unstetig:} & \quad c_k \sim \frac{1}{k^{p+2}}. \end{aligned}$$

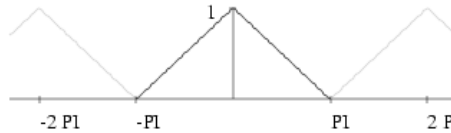
Beispiele:

f_1 unstetig:



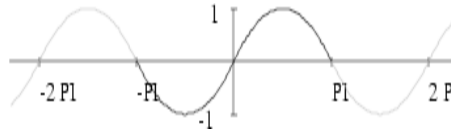
$$f_1(x) = \frac{4}{\pi} \cdot \left(\sin(x) + \frac{\sin(3 \cdot x)}{3} + \frac{\sin(5 \cdot x)}{5} + \dots \right).$$

f_2 stetig, f_2' unstetig:



$$f_2(x) = 1 + \frac{4}{\pi^2} \cdot \left(\cos(x) + \frac{\cos(3 \cdot x)}{3^2} + \frac{\cos(5 \cdot x)}{5^2} + \dots \right).$$

f_3' stetig, f_3'' unstetig:



$$f_3(x) = \frac{4}{\pi^2} \cdot x \cdot (\pi - |x|) = \frac{32}{\pi^3} \cdot \left(\frac{\sin(x)}{1^3} + \frac{\sin(3 \cdot x)}{3^3} + \frac{\sin(5 \cdot x)}{5^3} + \dots \right).$$

Bemerkung 1.50: Für eine durch ihre Fourier–Reihe dargestellte Funktion gilt für den Approximationsfehler durch endliche Fourier–Approximationen

$$\begin{aligned} f(x) - \sum_{k=-n}^n c_k \cdot e^{i \cdot k \cdot x} &= \sum_{|k|>n} c_k \cdot e^{i \cdot k \cdot x} \\ \Rightarrow \left| f(x) - \sum_{k=-n}^n c_k \cdot e^{i \cdot k \cdot x} \right| &\leq \sum_{|k|>n} |c_k \cdot e^{i \cdot k \cdot x}| = \sum_{|k|>n} |c_k|. \end{aligned}$$

Je schneller die Fourier-Koeffizienten abfallen, umso schneller die punktweise Konvergenz an allen Stellen!

1.3.5 Das Gibbs'sche Phänomen

Wir betrachten das Konvergenzverhalten der endlichen Fourier-Transformation für die „Sprungfunktion“ („Heaviside-Funktion“):

$$H(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \in [-\pi, 0), \\ 1 & \text{für } x \in [0, \pi). \end{cases}$$

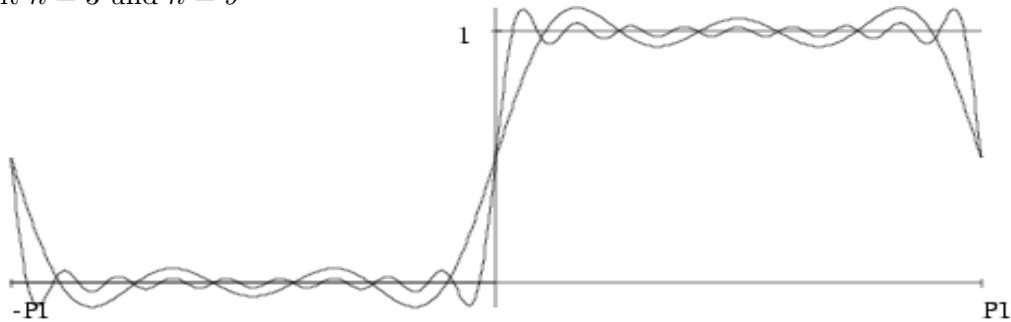
Als zugeordnete Fourier-Reihe berechnet man

$$H(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \cdot \left(\sin(x) + \frac{\sin(3 \cdot x)}{3} + \frac{\sin(5 \cdot x)}{5} + \dots \right),$$

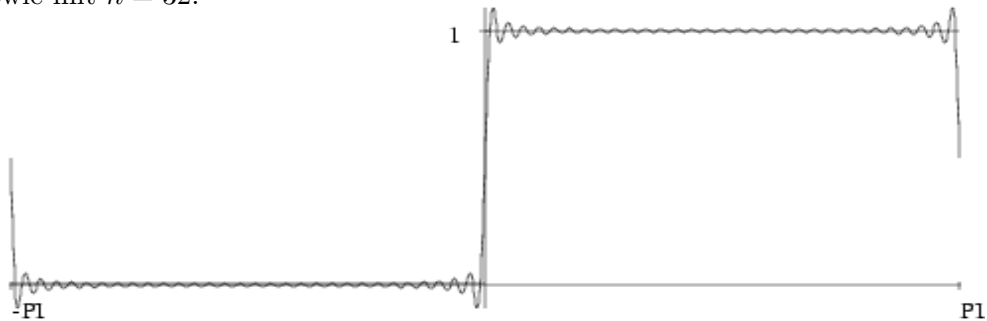
welche in der Tat $H(x)$ überall außer an den Sprungstellen punktweise darstellt. Hier die endlichen Fourier-Approximationen

$$S_{2 \cdot n - 1}(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \cdot \sum_{m=0}^{n-1} \frac{\sin((2 \cdot m + 1) \cdot x)}{2 \cdot m + 1}$$

mit $n = 3$ und $n = 9$



sowie mit $n = 32$:



Das Gibbs'sche¹ Phänomen ist, dass die Fourier–Approximationen an Sprungstellen ein Überschwingverhalten zeigen, dass mit wachsendem n nicht verschwindet: das erste Maximum von $S_n(x)$ für $x > 0$ liegt für jedes n deutlich über der Grenzfunktion $H(x) \equiv 1$ (für $x > 0$). Dies lässt sich unschwer explizit nachrechnen. Das betrachtete Maximum ist durch die erste positive Nullstelle der Ableitung bestimmt:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} S_{2\cdot n-1}(x) &= \frac{2}{\pi} \cdot \sum_{m=0}^{n-1} \cos((2\cdot m+1)\cdot x) = \frac{2}{\pi} \cdot \Re\left(\sum_{m=0}^{n-1} e^{i\cdot(2\cdot m+1)\cdot x}\right) \\ &= \frac{2}{\pi} \cdot \Re\left(e^{i\cdot x} \cdot \sum_{m=0}^{n-1} (e^{i\cdot 2\cdot x})^m\right) = \frac{2}{\pi} \cdot \Re\left(e^{i\cdot x} \cdot \frac{e^{i\cdot 2\cdot n\cdot x} - 1}{e^{i\cdot 2\cdot x} - 1}\right) = \frac{2}{\pi} \cdot \Re\left(\frac{e^{i\cdot 2\cdot n\cdot x} - 1}{e^{i\cdot x} - e^{-i\cdot x}}\right) \\ &= \frac{2}{\pi} \cdot \Re\left(\frac{e^{i\cdot 2\cdot n\cdot x} - 1}{2\cdot i \cdot \sin(x)}\right) = \frac{1}{\pi \cdot \sin(x)} \cdot \Im(e^{i\cdot 2\cdot n\cdot x} - 1) = \frac{\sin(2\cdot n\cdot x)}{\pi \cdot \sin(x)}. \end{aligned}$$

Die erste positive Nullstelle der Ableitung ist demnach $\xi_0 = \pi/(2\cdot n)$. Der Wert von $S_{2\cdot n-1}$ an dieser Stelle ist

$$S_{2\cdot n-1}(\xi_0) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \cdot \sum_{m=0}^{n-1} \frac{\sin((2\cdot m+1) \cdot \frac{\pi}{2\cdot n})}{2\cdot m+1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \cdot \sum_{m=0}^{n-1} \frac{\sin(\frac{(2\cdot m+1)\cdot\pi}{2\cdot n})}{\frac{(2\cdot m+1)\cdot\pi}{2\cdot n}}.$$

Die Summe lässt sich leicht interpretieren. Betrachte dazu das Integral

$$\frac{1}{\pi} \cdot \int_0^\pi \frac{\sin(y)}{y} dy \approx 0.5895.$$

Zerlege das Integrationsintervall $[0, \pi]$ durch die n Stützstellen $y_m = \frac{(2\cdot m+1)\cdot\pi}{2\cdot n}$, ($m = 0, \dots, n-1$) in äquidistante Intervalle der Länge π/n . Für $n \rightarrow \infty$ konvergieren die Riemann–Summen gegen das Integral:

$$\frac{1}{n} \cdot \sum_{m=0}^{n-1} \frac{\sin(\frac{(2\cdot m+1)\cdot\pi}{2\cdot n})}{\frac{(2\cdot m+1)\cdot\pi}{2\cdot n}} = \frac{1}{\pi} \cdot \sum_{m=0}^{n-1} \frac{\sin(y_m)}{y_m} \cdot \frac{\pi}{n} \xrightarrow{(n \rightarrow \infty)} \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^\pi \frac{\sin(y)}{y} dy.$$

Die Höhe des ersten positiven Maximums der Fourier–Approximation konvergiert damit für $n \rightarrow \infty$:

$$S_{2\cdot n-1}(\xi_0) \approx \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^\pi \frac{\sin(y)}{y} dy \approx 1.0895\dots$$

Betrachte noch einmal $H(x)$ und beachte, dass $H(x) - \frac{1}{2}$ eine ungerade Funktion ↓13.11.02

¹J.W. Gibbs, 1839 – 1903, amerikanischer Mathematiker/Physiker. Ein Zitat von ihm:

„A mathematician may say anything he pleases, but a physicist must be at least partially sane.“

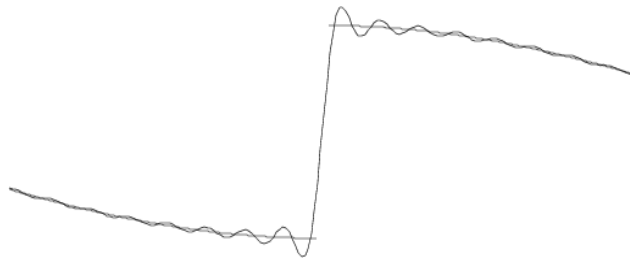
ist. Aus Symmetriegründen nehmen daher alle Fourier-Approximationen S_{2n-1} als letztes negatives Minimum vor der Sprungstelle bei 0 den Wert $\frac{1}{2} - 0.5895 = -0.0895$ an. Damit hat die Differenz des ersten Maximums rechts vom Sprung zum letzten Minimum links vom Sprung den Wert $1 + 2 \cdot 0.0895 = 1.179$, wobei die Sprunghöhe 1 ist. Multipliziert man die Sprungfunktion mit einem Faktor, so skalieren sich die Fourier-Koeffizienten mit diesem Faktor und die Fourier-Approximationen ebenfalls. Damit gilt:

Das Gibbs'sche Phänomen: An einer Sprungstelle ist für alle Fourier-Approximationen die Differenz zwischen dem benachbarten Minimum und Maximum, welche den Sprung einschließen, um etwa 17.9% größer als die Sprunghöhe.

In der Tat gilt dies nicht nur für die hier betrachtete Heaviside-Funktion: eine beliebige Funktion, die an einer Stelle x_0 eine Sprung macht, kann immer in der Form

$$\text{Funktion}(x) = \text{bei } x_0 \text{ stetige Funktion}(x) + \text{Sprunghöhe} \cdot H(x - x_0)$$

zerlegt werden. Ist die stetige Funktion hinreichend glatt, konvergiert die Fourier-Approximation des stetigen Anteils deutlich schneller gegen den stetigen Anteil als die Fourier-Approximation des Sprunganteils gegen den Sprunganteil. Der stetige Anteil kann daher im Approximationsfehler vernachlässigt werden gegen den Approximationsfehler von $H(x - x_0)$. Das Gibbs'sche Phänomen für H vererbt sich damit auf die Sprungstellen beliebig zusammengestückelter glatter Funktionen:



Lanczos' σ -Approximation

Man kann das Gibbs'sche Phänomen leicht unterdrücken, indem man statt der Fourier-Approximationen (einer beliebigen Funktion)

$$S_n(x) = \sum_{k=-n}^n c_k \cdot e^{i \cdot k \cdot x}$$

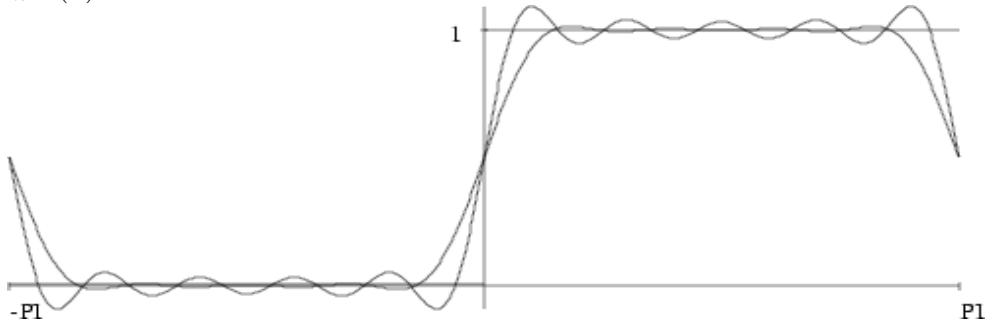
die modifizierten Fourier–Approximationen

$$L_n(x) = \sum_{k=-n}^n \sigma_k^{(n)} \cdot c_k \cdot e^{i \cdot k \cdot x}$$

mit „Lanczos’ σ -Faktoren”

$$\sigma_0^{(n)} = 1, \quad \sigma_k^{(n)} = \frac{\sin\left(\frac{k \cdot \pi}{n}\right)}{\frac{k \cdot \pi}{n}} \quad (k > 0)$$

betrachtet. Diese Approximationen konvergieren analog zu $S_n(x)$ ebenfalls punktweise gegen die Ausgangsfunktion (wenn diese im Sinne des Dirichlet–Kriteriums glatt genug ist) und tun dies sogar wesentlich „gleichmäßiger”. Speziell ist das Gibbs’sche Phänomen verschwunden. Hier $S_{2 \cdot n - 1}(x)$ zusammen mit $L_{2 \cdot n - 1}(x)$ für $n = 5$:



Die Erklärung beruht auf folgendem Resultat:

Satz 1.51: (Fourier–Approximationen mit Sigma–Faktoren)

Die Einführung der Sigma–Faktoren entspricht einer Mittelung der Fourier–Approximationen über eine Periode $\frac{2 \cdot \pi}{n}$ des höchstfrequenten Anteils:

$$L_n(x) = \frac{n}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{-\frac{\pi}{n}}^{\frac{\pi}{n}} S_n(x + \xi) d\xi.$$

Beweis: Mit

$$\frac{n}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{-\frac{\pi}{n}}^{\frac{\pi}{n}} e^{i \cdot k \cdot (x + \xi)} d\xi = \frac{n \cdot \sin\left(\frac{k \cdot \pi}{n}\right)}{k \cdot \pi} \cdot e^{i \cdot k \cdot x} = \sigma_k^{(n)} \cdot e^{i \cdot k \cdot x}$$

folgt

$$\frac{n}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{-\frac{\pi}{n}}^{\frac{\pi}{n}} S_n(x + \xi) d\xi = \frac{n}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{-\frac{\pi}{n}}^{\frac{\pi}{n}} \sum_{k=-n}^n c_k \cdot e^{i \cdot k \cdot (x + \xi)} d\xi$$

$$= \sum_{k=-n}^n c_k \cdot \frac{n}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{-\frac{\pi}{n}}^{\frac{\pi}{n}} e^{i \cdot k \cdot (x+\xi)} d\xi = \sum_{k=-n}^n c_k \cdot \sigma_k^{(n)} \cdot e^{i \cdot k \cdot x} = L_n(x).$$

Q.E.D.

1.3.6 Diskrete Fourier-Transformation (DFT)

Eine explizite Darstellung der Fourier-Koeffizienten für ein (kompliziertes) realistisches Signal wird nur in seltenen Fällen möglich sein. Im Folgenden sollen die Fourier-Koeffizienten daher numerisch approximiert werden. Wir stellen uns die auf $[-\pi, \pi]$ gegebene Ausgangsfunktion f wieder als $2 \cdot \pi$ -periodisch fortgesetzt vor und verschieben die Integration in der Definition der Fourier-Koeffizienten vom Intervall $[-\pi, \pi]$ auf das Intervall $[0, 2 \cdot \pi]$ (dies hat lediglich schreibtechnische Gründe: die folgenden Formeln werden etwas kompakter):

$$c_k = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_0^{2 \cdot \pi} f(x) \cdot e^{-i \cdot k \cdot x} dx.$$

Das Integral ist der Grenzwert einer Riemann-Summe und soll nun durch eine entsprechende Summe approximiert werden. Dazu wird das Intervall $[0, 2 \cdot \pi]$ mittels der Stützpunkte $x_j = 2 \cdot \pi / N$ in N gleichlange Teilintervalle $[x_j, x_{j+1}]$ der Länge $2 \cdot \pi / N$ zerlegt ($j = 0, \dots, N - 1$). In jedem Teilintervall wird der Integrand durch den Wert des Integranden am linken Intervallende angenähert. Dies liefert die Riemann-Summe

$$c_k \approx d_k := \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{2 \cdot \pi}{N} \cdot \sum_{j=0}^{N-1} f(x_j) \cdot e^{-i \cdot k \cdot x_j} = \frac{1}{N} \cdot \sum_{j=0}^{N-1} f(x_j) \cdot e^{-i \cdot k \cdot j \cdot 2 \cdot \pi / N}.$$

als numerische Approximationen der Fourier-Koeffizienten c_k . Man nennt diese Werte d_k die „**diskreten Fourier-Koeffizienten**“. Im Gegensatz zu den c_k , die mit wachsendem $|k|$ eine Nullfolge bilden, gilt für sie offensichtlich die Periodizität

$$d_{k+N} = d_k, \quad k \in \mathbb{Z},$$

sodass lediglich N dieser Werte numerisch auszuwerten sind. Als Repräsentanten betrachten wir im Folgenden nur noch die Werte d_0, \dots, d_{N-1} .

Die diskreten Fourier-Koeffizienten sind durch N Funktionswerte $f(x_j)$ an den äquidistanten Stützpunkten $x_j = j \cdot 2 \cdot \pi / N$ mit $j = 0, \dots, N - 1$ definiert. Da die d_k Linearkombinationen von $f_j = f(x_j)$ sind, kann die Transformation $(f_0, \dots, f_{N-1})^T \in \mathbb{C}^N \rightarrow (d_0, \dots, d_{N-1})^T \in \mathbb{C}^N$ als lineare Abbildung des \mathbb{C}^N auf sich selbst aufgefaßt werden:

Definition 1.52: (Diskrete Fourier-Transformation (DFT))

Die Abbildung eines Datensatzes $(f_0, \dots, f_{N-1})^T \in \mathbb{C}^N$ auf die „diskreten Fourier-Koeffizienten“

$$d_k = \frac{1}{N} \cdot \sum_{j=0}^{N-1} f_j \cdot e^{-i \cdot j \cdot k \cdot 2 \cdot \pi / N}, \quad k = 0, \dots, N-1$$

heißt **diskrete Fourier-Transformation**.

Für Anwendungen ist es wichtig, sich die Zuordnung der diskreten Koeffizienten zu den wirklichen Fourier-Daten vor Augen zu halten, denn für „großes“ $|k|$ wird d_k wegen der Periodizität $d_k = d_{N+k}$ keine vernünftige Approximation von c_k sein (Bild 1.1):

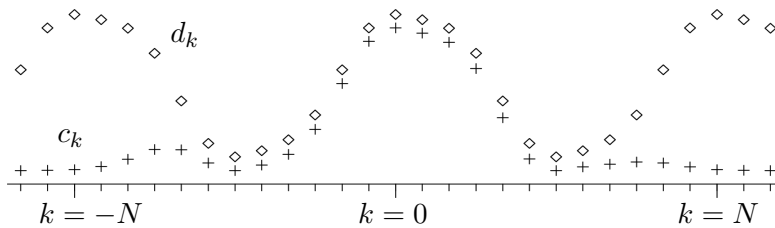


Bild 1.1: Fourier- und diskrete Fourier-Koeffizienten.

Bemerkung 1.53: In vielen technischen Anwendungen ist die Interpretation des Indexes k als „tiefe“ oder „hohe Frequenz“ wichtig. d.h., die Interpretation als Approximation der kontinuierlichen Fourier-Koeffizienten c_k .

Es gilt: Für Daten (f_0, \dots, f_{N-1}) , die einer äquidistanten Zerlegung einer Funktion $f(x)$ entstammen, sind die diskreten Fourier-Koeffizienten d_k für $|k| \ll N$ Approximationen der Fourier-Koeffizienten c_k . Für die Repräsentanten d_0, \dots, d_{N-1} gilt wegen der Periodizität $d_{N+k} = d_k$ damit

$$\begin{aligned} c_k &\approx d_k && \text{für } 0 \leq k \ll N, \\ c_{-k} &\approx d_{N-k} && \text{für } 1 \leq k \ll N. \end{aligned}$$

Merke: Die diskreten Koeffizienten d_{N-1}, d_{N-2}, \dots sind als Approximationen der „niederfrequenten“ Fourier-Koeffizienten c_{-1}, c_{-2}, \dots anzusehen.

Wenngleich man sich rechentechnisch auf die Repräsentanten d_0, \dots, d_{N-1} konzentriert, sollte man in physikalischen Interpretationen die Repräsentanten d_k von $k \approx -N/2$ bis $k \approx N/2$ betrachten, welche als Approximationen der kontinuierlichen c_k angesehen werden können.

Bemerkung 1.54: Der Fall reeller Daten f_0, \dots, f_{N-1} wird offensichtlich durch die Beziehung $d_{N-k} = \bar{d}_k$ charakterisiert:

$$\bar{d}_k = \frac{1}{N} \cdot \sum_{j=0}^{N-1} f_j \cdot \overline{e^{-i \cdot j \cdot k \cdot 2 \cdot \pi / N}} = \frac{1}{N} \cdot \sum_{j=0}^{N-1} f_j \cdot e^{i \cdot j \cdot k \cdot 2 \cdot \pi / N} = d_{-k} = d_{N-k}.$$

Die Rekonstruierbarkeit des Datensatzes (f_0, \dots, f_{N-1}) aus den diskreten Fourier-Koeffizienten (d_0, \dots, d_{N-1}) ist ausgesprochen einfach:

Satz 1.55: (Diskrete Fourier-Rücktransformation)

Die Daten $(f_0, \dots, f_{N-1})^T \in \mathbb{C}^N$ lassen sich durch

$$f_j = \sum_{k=0}^{N-1} d_k \cdot e^{i \cdot j \cdot k \cdot 2 \cdot \pi / N}, \quad j = 0, \dots, N-1$$

aus ihren diskreten Fourier-Koeffizienten $(d_0, \dots, d_{N-1})^T \in \mathbb{C}^N$ zurückgewinnen.

Beweis: In Matrixschreibweise handelt es sich bei der DFT um eine einfache Multiplikation

$$\begin{pmatrix} d_0 \\ \vdots \\ d_{N-1} \end{pmatrix} = \frac{1}{N} \cdot \bar{V} \begin{pmatrix} f_0 \\ \vdots \\ f_{N-1} \end{pmatrix}$$

mit der von den Potenzen $1, \bar{\omega}, \dots, \bar{\omega}^{N-1}$ der komplexen Einheitswurzel $\bar{\omega} = e^{-i \cdot 2 \cdot \pi / N}$ erzeugten symmetrischen Vandermondeschen Matrix

$$\bar{V} = (\bar{\omega}^{kj})_{\substack{k=0..N-1 \\ j=0..N-1}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \bar{\omega} & \bar{\omega}^2 & \dots & \bar{\omega}^{N-1} \\ 1 & \bar{\omega}^2 & \bar{\omega}^4 & \dots & \bar{\omega}^{2 \cdot (N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \bar{\omega}^{N-1} & \bar{\omega}^{2 \cdot (N-1)} & \dots & \bar{\omega}^{(N-1)^2} \end{pmatrix}.$$

Die Transformation ist leicht invertierbar, denn \bar{V} stellt sich als bis auf Skalierung unitär heraus: die Inverse V ist die durch Potenzen von $\omega = e^{i \cdot 2 \cdot \pi / N} = \bar{\omega}^{-1}$ erzeugte Vandermondesche Matrix:

$$\left(\frac{1}{N} \cdot \bar{V} \right)^{-1} = V = (\omega^{j \cdot k})_{\substack{j=0..N-1 \\ k=0..N-1}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \dots & \omega^{N-1} \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 & \dots & \omega^{2 \cdot (N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega^{N-1} & \omega^{2 \cdot (N-1)} & \dots & \omega^{(N-1)^2} \end{pmatrix}.$$

Wie durch die Bezeichnungen schon angedeutet, entsteht \bar{V} durch komplexe Konjugation aus V . Zur Invertierung betrachte man die Spalten

$$\vec{e}_k = (1, \omega^k, \omega^{2 \cdot k}, \dots, \omega^{(N-1) \cdot k})^T, \quad k = 0, \dots, N-1$$

von V , die bezüglich des üblichen komplexen euklidischen Skalarproduktes $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \sum \bar{a}_j \cdot b_j$ orthogonal sind:

$$\langle \vec{e}_{k_1}, \vec{e}_{k_2} \rangle = \sum_{j=0}^{N-1} \bar{\omega}^{k_1 \cdot j} \omega^{j \cdot k_2} = \sum_{j=0}^{N-1} \left(\omega^{(k_2 - k_1)} \right)^j = \begin{cases} N & \text{für } k_1 = k_2 \\ 0 & \text{für } k_1 \neq k_2 \end{cases}.$$

Hierbei ergibt sich der zweite Fall über die geometrische Reihe

$$\sum_{j=0}^{N-1} \left(\omega^{(k_2 - k_1)} \right)^j = \frac{\omega^{(k_2 - k_1) \cdot N} - 1}{\omega^{(k_2 - k_1)} - 1} = \frac{e^{i \cdot (k_2 - k_1) \cdot 2 \cdot \pi} - 1}{e^{i \cdot (k_2 - k_1) \cdot 2 \cdot \pi / N} - 1} = 0,$$

wobei der Nenner für keinen der Werte $k_1 \neq k_2 \in \{0, \dots, N-1\}$ verschwindet. Mit $(\bar{V} \cdot V)_{k_1 k_2} = \langle \vec{e}_{k_1}, \vec{e}_{k_2} \rangle = N \cdot \delta_{k_1 k_2}$ folgt hieraus sofort $\bar{V} \cdot V = N \cdot \mathbf{1}$.

Q.E.D.

1.3.7 Schnelle Fourier–Transformation (FFT)

↓15.11.02

Die wesentliche numerische Problemstellung ist die effektive Durchführung der diskreten Fourier–Transformation aus Definition 1.52 bzw. der Rücktransformation aus Satz 1.55. Da es sich in beiden Fällen um eine einfache Matrix/Vektormultiplikation handelt, besteht der Rechenaufwand bei einer „naiven“ Auswertung der Summen aus $O(N^2)$ Operationen, wo N die Anzahl der zu transformierenden Daten ist. Eine überaus wichtige Beobachtung ist, dass man die spezielle Form dieser Summen ausnutzen kann, die Berechnung von $O(N^2)$ Elementaroperationen auf $O(N \cdot \log_2(N))$ zu reduzieren. Die Klasse von Verfahren, die N Fourier–Daten mit einem Aufwand von $O(N \cdot \log_2(N))$ berechnen, wird im Englischen als **Fast Fourier Transform (FFT)** bezeichnet.

Der prinzipielle Gedanke ist sehr einfach und basiert auf der Beobachtung, dass für gerades $N = 2 \cdot m$ die diskrete Fourier–Transformation der Daten $(f_0, f_1, \dots, f_{2 \cdot m - 1})$ leicht aus den Transformaten der halbierten Datensätze $(f_0, f_2, \dots, f_{2 \cdot m - 2})$ und $(f_1, f_3, \dots, f_{2 \cdot m - 1})$ mit geraden bzw. ungeraden Indizes aufgebaut werden kann:

Satz 1.56: (Synthese diskreter Fourier-Koeffizienten aus halben Datensätzen)

Es seien $d_k^{(f_0, f_2, \dots, f_{2 \cdot m - 2})}$ und $d_k^{(f_1, f_3, \dots, f_{2 \cdot m - 1})}$ die diskreten Fourier-Koeffizienten der Datensätze $(f_0, f_2, \dots, f_{2 \cdot m - 2})$ und $(f_1, f_3, \dots, f_{2 \cdot m - 1})$ der Länge m . Dann ergeben sich die diskreten Fourier-Koeffizienten $d_k = d_k^{(f_0, f_1, \dots, f_{2 \cdot m - 1})}$ des vollständigen Datensatzes der Länge $2 \cdot m$ durch

$$d_k = \frac{1}{2} \cdot \left(d_k^{(f_0, f_2, \dots, f_{2 \cdot m - 2})} + e^{-i \cdot k \cdot \pi / m} \cdot d_k^{(f_1, f_3, \dots, f_{2 \cdot m - 1})} \right)$$

$$d_{m+k} = \frac{1}{2} \cdot \left(d_k^{(f_0, f_2, \dots, f_{2 \cdot m - 2})} - e^{-i \cdot k \cdot \pi / m} \cdot d_k^{(f_1, f_3, \dots, f_{2 \cdot m - 1})} \right)$$

mit $k = 0, \dots, m - 1$.

Beweis: In der die Koeffizienten $d_k^{[2 \cdot m]}$ definierenden Summe werden die geraden und ungeraden Indizes getrennt:

$$d_k = \frac{1}{2 \cdot m} \cdot \left(\sum_{\substack{j=0 \\ j \text{ gerade}}}^{2 \cdot m - 2} f_j \cdot e^{-i \cdot j \cdot k \cdot 2 \cdot \pi / (2 \cdot m)} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \text{ ungerade}}}^{2 \cdot m - 1} f_j \cdot e^{-i \cdot j \cdot k \cdot 2 \cdot \pi / (2 \cdot m)} \right)$$

$$= \frac{1}{2 \cdot m} \cdot \left(\sum_{p=0}^{m-1} f_{2 \cdot p} \cdot e^{-i \cdot 2 \cdot p \cdot k \cdot 2 \cdot \pi / (2 \cdot m)} + \sum_{p=0}^{m-1} f_{2 \cdot p + 1} \cdot e^{-i \cdot (2 \cdot p + 1) \cdot k \cdot 2 \cdot \pi / (2 \cdot m)} \right)$$

$$= \frac{1}{2 \cdot m} \cdot \left(\sum_{p=0}^{m-1} f_{2 \cdot p} \cdot e^{-i \cdot p \cdot k \cdot 2 \cdot \pi / m} + \sum_{p=0}^{m-1} f_{2 \cdot p + 1} \cdot e^{-i \cdot p \cdot k \cdot 2 \cdot \pi / m} \cdot e^{-i \cdot k \cdot \pi / m} \right).$$

Mit der Umbenennung $p \rightarrow j$ erhält man

$$d_k = \frac{1}{2} \cdot \left(\underbrace{\frac{1}{m} \cdot \sum_{j=0}^{m-1} f_{2 \cdot j} \cdot e^{-i \cdot j \cdot k \cdot 2 \cdot \pi / m}}_{d_k^{(f_0, f_2, \dots, f_{2 \cdot m - 2})}} + e^{-i \cdot k \cdot \pi / m} \cdot \underbrace{\frac{1}{m} \cdot \sum_{j=0}^{m-1} f_{2 \cdot j + 1} \cdot e^{-i \cdot j \cdot k \cdot 2 \cdot \pi / m}}_{d_k^{(f_1, f_3, \dots, f_{2 \cdot m - 1})}} \right),$$

wobei $k = 0, \dots, 2 \cdot m - 1$. Offensichtlich treten hierbei die diskreten Fourier-Koeffizienten der halbierten Datensätze auf. Da für sie der Frequenzindex nur von 0 bis $m - 1$ laufen sollte, kann auch die durch Verschiebung $k \rightarrow m + k$ entstehende Variante betrachtet werden, für die sich lediglich das Vorzeichen der zweiten Summe ändert:

$$d_{m+k} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{m} \cdot \sum_{j=0}^{m-1} f_{2 \cdot j} \cdot e^{-i \cdot j \cdot k \cdot 2 \cdot \pi / m} - e^{-i \cdot k \cdot \pi / m} \cdot \frac{1}{m} \cdot \sum_{j=0}^{m-1} f_{2 \cdot j + 1} \cdot e^{-i \cdot j \cdot k \cdot 2 \cdot \pi / m} \right).$$

Mit $k = 0, \dots, m - 1$ erhält man so alle Fourier-Koeffizienten des vollständigen Datensatzes.

Q.E.D.

Der dramatische Effekt dieser Zurückführung einer Transformation auf zwei Transformationen der halben Länge wird schnell klar. Als Kosten rechnen wir zur Vereinfachung nur die Anzahl der auszuführenden Multiplikation (es sind jeweils ähnlich viele Additionen auszuführen). Die Berechnung der Exponentialfaktoren wird vernachlässigt: man kann sie z.B. für gegebenes N im Vorfeld berechnen und abspeichern. Führt man die Transformation der halbierten Daten jeweils „naiv“ mit den Kosten $(N/2)^2$ durch, so ergibt sich insgesamt eine Kostenreduktion

$$\text{Kosten}(N) = 2 \cdot \text{Kosten}\left(\frac{N}{2}\right) + N = \frac{N^2}{2} + N$$

auf ungefähr die Hälfte der Ausgangskosten N^2 für die „naive“ Berechnung der Gesamttransformation. (In der „Synthese“ der halbierten Fourier–Daten fallen noch einmal N Multiplikationen mit den Faktoren $e^{-i \cdot k \cdot \pi / (N/2)}$ an, deren Berechnung hier nicht mitgezählt wird.)

Das in Satz 1.56 beschriebene „divide and conquer“-Prinzip reduziert den Rechenaufwand auf etwa die Hälfte. Natürlich wird man, wenn möglich, durch fortgesetztes Halbieren die Transformation auf möglichst kleine Datenlängen zurückführen. Für $N = 2^n$ kann die Berechnung auf diese Weise bis auf die Transformation von Datensätzen der Länge 1 reduziert werden, welche trivial ist (der diskrete Fourier–Koeffizient stimmt mit dem Funktionswert überein). Der Aufwand besteht dann lediglich aus der rekursiven Synthese dieser Daten zu den Fourier–Koeffizienten der gewünschten Länge.

Die einfachste Möglichkeit der Implementierung ist eine rekursiv arbeitende Prozedur, die einen Datensatz der Länge $N = 2^n$ zerlegt, sich dann zweimal selbst mit den halbierten Datensätzen aufruft und die Synthese der zurückgelieferten Fourier–Koeffizienten durchführt. Offensichtlich ist der FFT-Algorithmus auf diese Weise in wenigen Zeilen zu programmieren:

Rekursive FFT–Implementation 1.57:

Für ein Datenfeld der Länge $N = 2^n$:

```

FFT := procedure(N, [f[0], f[1], ..., f[N-1]])
local D, D1, D2, k, t;
begin
  if N = 1 then return([f[0]]) end;
  D1 := FFT(N/2, [f[0], f[2], f[4], ..., f[N-2]]);
  D2 := FFT(N/2, [f[1], f[3], f[5], ..., f[N-1]]);
  for k from 0 to N/2 - 1 do
    t := e-i*k*2*π/N * D2[k];
    D[ k ] := (D1[k] + t)/2;
    D[N/2+k] := (D1[k] - t)/2;
  end;
  return([D[0], D[1], ..., D[N-1]]);
end;

```

Aufwand der FFT 1.58:

Die DFT eines Datensatzes der Länge $N = 2^n$ läßt sich per FFT mit $O(N \cdot \log_2(N))$ Elementaroperationen durchführen.

Beweis: Nach den Vorüberlegungen benötigt die Synthese 1.56 der DFTen zweier Datensätze der jeweiligen Länge m zum Gesamtdatensatz der Länge $2 \cdot m$ nur $2 \cdot m$ Multiplikationen (und ebenso viele Additionen). Da der Datensatz der Länge $N = 2^n$ in n Schritten rekursiv bis zu Datensätzen der Länge 1 aufgespalten werden kann, fallen nur die Synthese-Kosten an. Im r -ten rekursiven Zerlegungsschritt liegen 2^r Datensätze der jeweiligen Länge 2^{n-r} vor, die jeweils mit dem Aufwand 2^{n-r+1} paarweise zu synthetisieren sind. Mit 2^{r-1} zu synthetisierenden Pärchen im r -ten Schritt ergibt sich der Gesamtaufwand zu

$$\sum_{r=1}^n 2^{r-1} \cdot 2^{n-r+1} = \sum_{r=1}^n 2^n = n \cdot 2^n = \log_2(N) \cdot N.$$

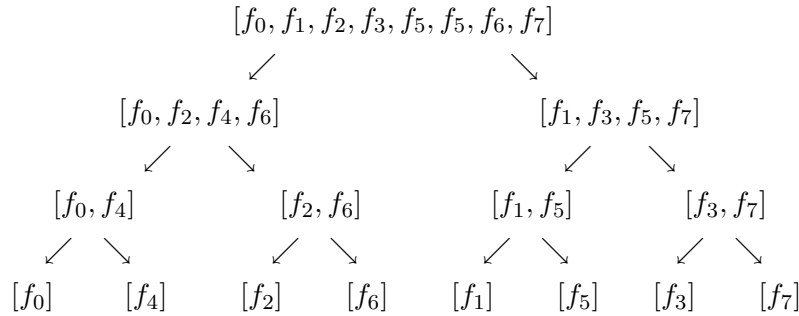
Q.E.D.

1.3.8 Technische Durchführung der FFT

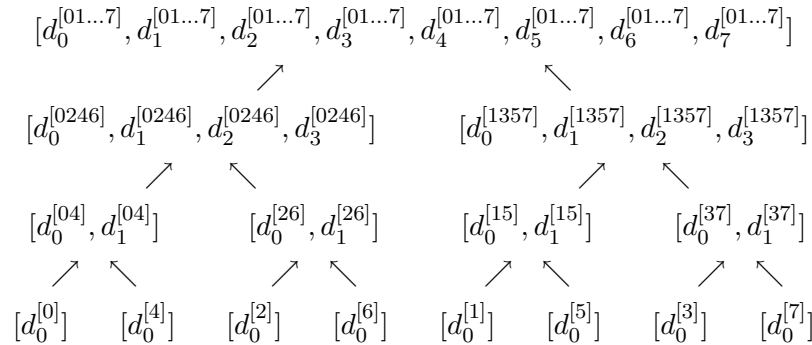
(Dieser Abschnitt ist nur der Vollständigkeit halber sehr detailliert in dieses Skript aufgenommen worden. In der Vorlesung werden die technischen Details nur sehr grob angedeutet).

Wenngleich die rekursive Implementation 1.57 der Synthese 1.56 für Daten der Länge $N = 2^n$ extrem einfach ist, ist es allgemein ratsam, iterative Berechnungen einer rekursiven Implementierung vorzuziehen. In der Tat ist dies hier leicht möglich, wobei auch der benötigte Speicherplatzbedarf optimiert wird. In der

folgenden Diskussion der technischen Details wird zunächst der Halbierungsmechanismus genauer untersucht. Als Beispiel betrachte man den Fall $N = 2^3$, in dem die Daten f_0, \dots, f_7 rekursiv in Pakete halber Länge zerlegt werden:



Aus der trivialen diskreten Fourier-Transformation der Länge 1 ergeben sich in der letzten Zeile die Koeffizienten $d_0^{[j]} = f_j$, die dann von unten nach oben über die Syntheseregeln zusammzubauen sind:



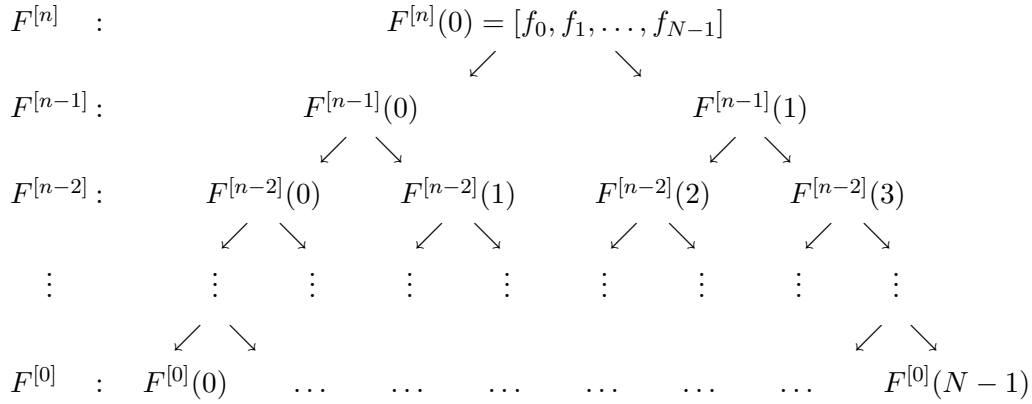
Hierbei entspricht jeder durch [] zusammengefaßte Block den Fourier-Koeffizienten der entsprechenden Teildaten von f_0, \dots, f_7 , z.B. stellt $[d_0^{[0246]}, \dots, d_3^{[0246]}]$ die Fourier-Daten von $[f_0, f_2, f_4, f_6]$ dar.

Allgemein sei nun ein in ein Array $F^{[n]} = F^{[n]}(0) = [f_0, \dots, f_{N-1}]$ eingeordneter Datensatz mit $N = 2^n$ gegeben. Im ersten Halbierungsschritt werden zwei Teilarrays $F^{[n-1]}(0) = [f_0, f_2, \dots, f_{N-2}]$ und $F^{[n-1]}(1) = [f_1, f_3, \dots, f_{N-1}]$ gebildet, die zusammen das Array

$$F^{[n-1]} = [F^{[n-1]}(0), F^{[n-1]}(1)] = [f_0, f_2, \dots, f_{N-2}, f_1, f_3, \dots, f_{N-1}]$$

der Länge N ergeben. Nach m Halbierungsschritten sind 2^m Teilarrays $F^{[n-m]}(0), \dots, F^{[n-m]}(2^m - 1)$ der Länge 2^{n-m} entstanden, die zum gesamten

Datenfeld $F^{[n-m]}$ zusammengefaßt werden:



Für die Aufteilung im m -ten Halbierungsschritt gilt nach Konstruktion

$$F_k^{[n-m]}(j) = \begin{cases} F_{k/2}^{[n-m-1]}(2 \cdot j) & \text{für gerades } k \\ F_{(k-1)/2}^{[n-m-1]}(2 \cdot j + 1) & \text{für ungerades } k \end{cases} \quad (1.1)$$

mit $k = 0, 1, \dots, 2^{n-m} - 1$ und $j = 0, \dots, 2^m - 1$. Hierbei ist $F_k^{[n-m]}(j)$ das k -te Element des Teilarrays $F^{[n-m]}(j)$, wobei die Plätze mit Null beginnend gezählt werden.

Nach $m = n$ Schritten hat man $N = 2^n$ Datensätze $F^{[0]}(j)$ der Länge 1 ($j = 0, \dots, 2^n - 1$). Offensichtlich ist die ursprüngliche Reihenfolge f_0, f_1, \dots der Ausgangsdaten durch den Halbierungsmechanismus verändert worden. Diese Permutation ist zu bestimmen.

Definition 1.59: (bit-reverse)

Zu $n \in \{1, 2, \dots\}$ sei $\sum_{k=0}^{n-1} b_k \cdot 2^k$ die eindeutige Binärdarstellung einer Zahl in $\mathcal{M}_n = \{0, 1, \dots, 2^n - 1\}$ mit Binärziffern („bits“) $b_k \in \{0, 1\}$. Die durch

$$\sigma_n : \sum_{k=0}^{n-1} b_k \cdot 2^k \rightarrow \sum_{k=0}^{n-1} b_{n-1-k} \cdot 2^k$$

definierte Abbildung von \mathcal{M}_n nach \mathcal{M}_n heißt **bit-reverse**.

Die Namensgebung zeigt die Wirkung von σ_n an: die Reihenfolge der Binärziffern wird umgedreht. Folgende Eigenschaften sind leicht zu zeigen:

$$\begin{aligned} \text{a) } \sigma_n(j) &= \sigma_{n+1}(2 \cdot j), & j = 0, \dots, 2^n - 1, \\ \text{b) } \sigma_n(j) + 2^n &= \sigma_{n+1}(2 \cdot j + 1), & j = 0, \dots, 2^n - 1, \\ \text{c) } \sigma_n(j + 2^k) &= \sigma_n(j) + 2^{n-k-1}, & \begin{array}{l} k = 0, 1, \dots, n-1, \\ j = 0, 1, \dots, 2^k - 1. \end{array} \end{aligned}$$

Mit c) läßt sich das zu n gehörende bit-reverse leicht durch die folgende Rekursion auf dem Rechner ermitteln und in einem Array $\sigma_n[j] = \sigma_n(j)$, $j = 0, \dots, 2^n - 1$, speichern:

```

 $\sigma_n[0] := 0;$ 
for  $k := 0$  to  $n - 1$  do
    for  $j := 0$  to  $2^k - 1$  do  $\sigma_n[j + 2^k] := \sigma_n[j] + 2^{n-k-1};$ 

```

Hierbei werden durch die j -Schleife die Plätze $2^k, \dots, 2^{k+1} - 1$ korrekt belegt, sodass zuletzt der bit-reverse für alle Argumente $0, \dots, 2^n - 1$ berechnet ist. Hierzu werden $N - 1 = 2^n - 1$ Additionen ganzer Zahlen benötigt, was verglichen mit dem Gesamtaufwand $O(N \cdot \log_2(N))$ des FFT-Algorithmus akzeptabel ist. Allerdings wird bei dieser Vorgehensweise viel Speicherplatz belegt (genauso viele ganzzahlige Variable wie Daten f_0, \dots, f_{N-1}). In einigen Programmierumgebungen können die binären bits der internen Zahlendarstellung angesprochen und manipuliert werden, sodass sich durch Vertauschung der bit-Reihenfolge ein direkter und effektiver Zugang zum bit-reverse bietet.

Mit Hilfe dieser Permutationen läßt sich die Belegung der nach m Halbierungsschritten entstandenen Teilarrays beschreiben:

Hilfssatz 1.60:

Für die durch (1.1) aus $F^{[n]}(0) = [f_0, f_1, \dots, f_{2^n-1}]$ entstehenden Teilarrays gilt

$$F_k^{[n-m]}(j) = f_{k \cdot 2^m + \sigma_m(j)}, \quad k = 0, \dots, 2^{n-m} - 1, \quad j = 0, \dots, 2^m - 1.$$

Beweis: Induktion nach m . Wegen $\sigma_0(0) = 0$ ist der Induktionsbeginn $m = 0$ trivial, da nach Definition $F_k^{[n]}(0) = f_k$ gilt. Für den Induktionsschritt $m \rightarrow m + 1$ ist die Zerlegungsvorschrift (1.1) zu verifizieren, d.h., es ist

$$f_{k \cdot 2^m + \sigma_m(j)} = \begin{cases} f_{k \cdot 2^m + \sigma_{m+1}(2 \cdot j)} & \text{für gerades } k \\ f_{(k-1) \cdot 2^m + \sigma_{m+1}(2 \cdot j + 1)} & \text{für ungerades } k \end{cases}$$

zu überprüfen. Dies ist mit den oben angegebenen Eigenschaften a) $\sigma_m(j) = \sigma_{m+1}(2 \cdot j)$ und b) $\sigma_{m+1}(2 \cdot j + 1) = \sigma_m(j) + 2^m$ aber garantiert.

Q.E.D.

Damit ist die gesuchte Reihenfolge der Ausgangsdaten nach m Halbierungsschritten gefunden: die zuletzt erzeugten Arrays der Länge 1 sind jeweils mit dem Datum $F^{[0]}(j) = [f_{\sigma_n(j)}]$ belegt.

Die Zwischenschritte der Zerlegung brauchen in der praktischen Anwendung natürlich nicht ausgeführt zu werden, da die zuletzt vorliegende Permutation über den bit-reverse identifiziert worden ist. Die Eingabedaten $[f_0, \dots, f_{N-1}]$ werden gemäß dieser Permutation in ein Array $D^{[0]}$ eingelesen, d.h., man setzt formal

$$D^{[0]} = F^{[0]} = [f_{\sigma_n(0)}, f_{\sigma_n(1)}, \dots, f_{\sigma_n(n-1)}].$$

Da für einen Datensatz der Länge 1 der Fourier-Koeffizient mit diesem Datum übereinstimmt, kann man sich $D^{[0]}$ aufgebaut denken als

$$D^{[0]} = [D^{[0]}(0), D^{[0]}(1), \dots, D^{[0]}(N-1)],$$

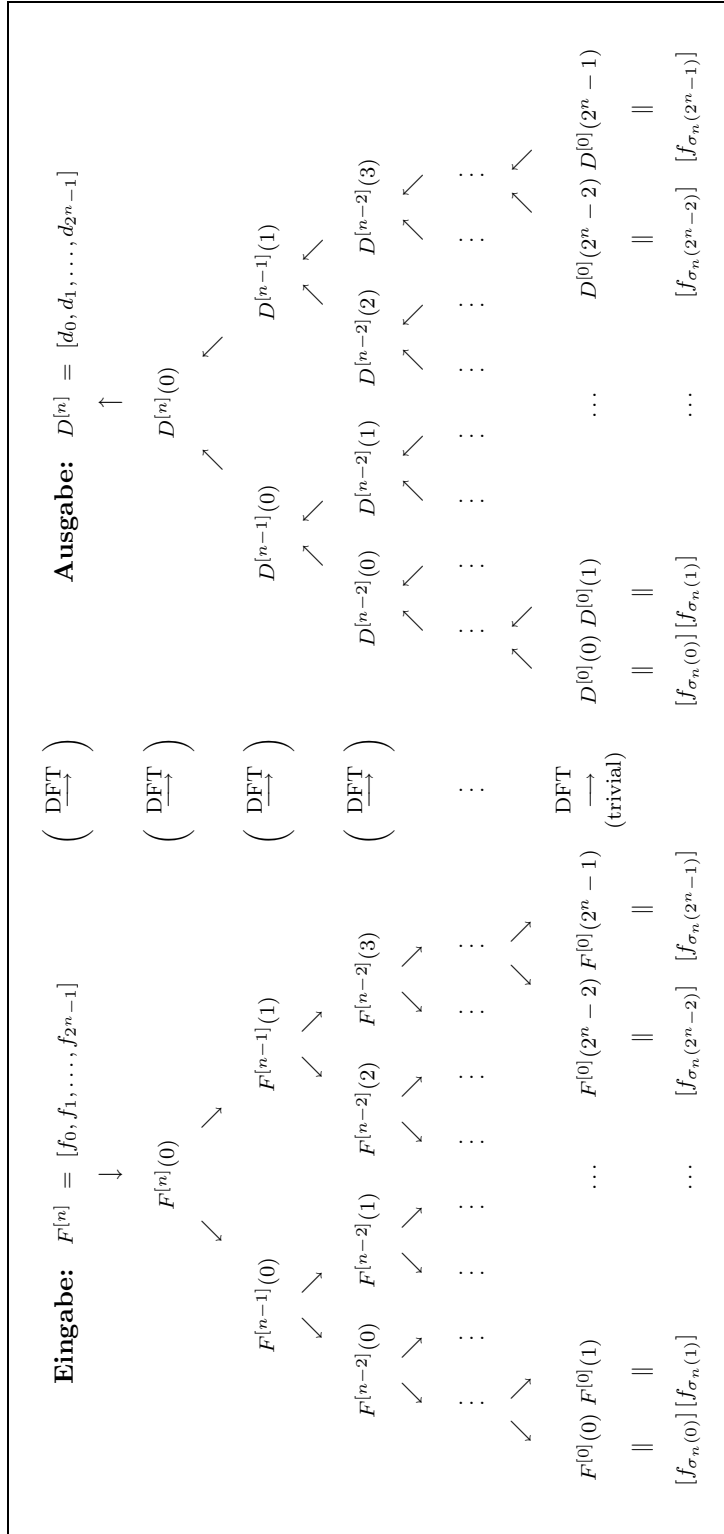
wobei $D^{[0]}(j) = F^{[0]}(j) = [f_{\sigma_n(j)}]$ als Fourier-Koeffizient von $[f_{\sigma_n(j)}]$ zu interpretieren ist. Nun können über das Syntheseprinzip aus Satz 1.56 rekursiv die Transformaten von Datensätzen der Länge 2, dann der Länge 4 usw. aufgebaut werden, bis sich zuletzt die gesuchten diskreten Fourier-Koeffizienten der Gesamtdaten $F^{[n]}$ ergeben.

Wie im Übersichtsschema in Tafel 1.1 angedeutet ist, können zu jedem der in der vorherigen Zerlegung konstruierten Teildatensätze $F^{[n-m]}(j)$ die entsprechenden Fourier-Koeffizienten $D^{[n-m]}(j)$ betrachtet werden, welche in einem Gesamtarray $D^{[n-m]}$ zusammengefaßt werden:

$$\begin{aligned} D_{j \cdot 2^{n-m} + k}^{[n-m]} &= D_k^{[n-m]}(j) \\ k &= 0, 1, \dots, 2^{n-m} - 1, \quad j = 0, 1, \dots, 2^m - 1. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Durch die mit Satz 1.56 gegebene Regel über das Zusammensetzen von Fourier-Koeffizienten aus halben Datensätzen lassen sich über $D^{[n-m-1]}(2 \cdot j)$ und $D^{[n-m-1]}(2 \cdot j + 1)$ die Fourier-Koeffizienten $D^{[n-m]}(j)$ berechnen, d.h., das Gesamtarray $D^{[n-m]}$ ergibt sich rekursiv aus $D^{[n-m-1]}$. Im Detail liefert Satz 1.56 mit $r = n - m$

$$\begin{aligned} D_k^{[r]}(j) &= \frac{1}{2} \left(D_k^{[r-1]}(2 \cdot j) + e^{-i \cdot k \cdot 2 \cdot \pi / 2^r} D_k^{[r-1]}(2 \cdot j + 1) \right) \\ D_{2^{r-1} + k}^{[r]}(j) &= \frac{1}{2} \left(D_k^{[r-1]}(2 \cdot j) - e^{-i \cdot k \cdot 2 \cdot \pi / 2^r} D_k^{[r-1]}(2 \cdot j + 1) \right) \end{aligned}$$



Tafel 1.1: Übersichtsschema zum FFT-Algorithmus

mit $k = 0, \dots, 2^{r-1} - 1$ und $j = 0, \dots, 2^{n-r} - 1$. Diese Daten sind alle im Array $D^{[r-1]}$ bzw. $D^{[r]}$ der Länge $N = 2^n$ gespeichert, für das sich mit der Belegung (1.2) die Rekursion $D^{[r-1]} \rightarrow D^{[r]}$ ergibt:

$$\begin{aligned} D_{j \cdot 2^r + k}^{[r]} &= \frac{1}{2} \cdot \left(D_{j \cdot 2^r + k}^{[r-1]} + e^{-i \cdot k \cdot 2 \cdot \pi / 2^r} \cdot D_{j \cdot 2^r + 2^{r-1} + k}^{[r-1]} \right) \\ D_{j \cdot 2^r + 2^{r-1} + k}^{[r]} &= \frac{1}{2} \cdot \left(D_{j \cdot 2^r + k}^{[r-1]} - e^{-i \cdot k \cdot 2 \cdot \pi / 2^r} \cdot D_{j \cdot 2^r + 2^{r-1} + k}^{[r-1]} \right) \\ r &= 1, \dots, n, \quad k = 0, \dots, 2^{r-1} - 1, \quad j = 0, \dots, 2^{n-r} - 1. \end{aligned}$$

Man beachte, dass bei gegebenem r die Speicherplätze $j \cdot 2^r + k$ und $j \cdot 2^r + 2^{r-1} + k$ durch genau ein Indexpaar (j, k) adressiert werden. Damit werden die an diesen Stellen in $D^{[r-1]}$ gespeicherten Werte nur zur Berechnung dieser Stellen in $D^{[r]}$ benötigt, sodass die Komponenten von $D^{[r-1]}$ paarweise überschrieben werden können. Die Rekursion kann damit auf einem einzigen Array ausgeführt werden, und es ergibt sich die in Tafel 1.2 angegebene Implementierung des FFT-Algorithmus. Das Array D wird dabei mit den über den bit-reverse σ_n permutierten Eingangsdaten initialisiert, wobei die n -fache Multiplikation mit dem Faktor $1/2$ in der Rekursion durch die Multiplikation mit $1/2^n$ erledigt wird.

Mit

$$d_k = \frac{1}{N} \cdot \sum_{j=0}^{N-1} f_j \cdot e^{-i \cdot j \cdot k \cdot 2 \cdot \pi / N}, \quad f_j = \sum_{k=0}^{N-1} d_k \cdot e^{i \cdot j \cdot k \cdot 2 \cdot \pi / N}$$

ist die **Rücktransformation** von den diskreten Fourier-Koeffizienten auf die Ausgangsdaten mit dem selben Algorithmus durchzuführen, lediglich die Division durch $2^n = N$ in der Initialisierung ist fortzulassen und das Vorzeichen in der e-Funktion ist zu ändern.

Ignoriert man Initialisierung und Indexberechnung, so sind im angegebenen Verfahren $n \cdot 2^{n-1}$ Multiplikationen und $n \cdot 2^n$ Additionen auszuführen. Hinzu kommen die Auswertungen aller N .ten komplexen Einheitswurzeln (Potenzen von $e^{-i \cdot 2 \cdot \pi / N}$). Mit $n = \log_2(N)$ ergibt sich der Rechenaufwand $O(N \cdot \log_2(N))$.

Zusammenfassung 1.61:

Die diskreten Fourier-Koeffizienten zu N Daten lassen sich aus denen kleinerer Datensätze bestimmen, wodurch ihre Berechnung beschleunigt wird. Speziell kann der Rechenaufwand sowohl bei der Bestimmung der Fourier-Daten als auch bei der Rücktransformation für $N = 2^n$ auf $O(N \cdot \log_2(N))$ reduziert werden. Dieser FFT-Algorithmus kann sehr leicht rekursiv oder (besser) iterativ unter Optimierung des benötigten Speicherplatzes implementiert werden.

Fast Fourier Transform für ein Datenfeld der Länge 2^n

Eingabe: $F = [f_0, f_1, \dots, f_{2^n-1}]$ (reeller oder komplexer Datensatz)

Ausgabe: $D = [d_0, d_1, \dots, d_{2^n-1}]$ (diskrete Fourier-Koeffizienten)

FFT := procedure (n, F);

begin

for $k := 0$ to $2^n - 1$ do $D[k] := \frac{1}{2^n} \cdot F[\sigma_n(k)]$; (* Initialisierung *)
 (* $\sigma_n = \text{bit-reverse}$ *)

for $r := 1$ to n do begin

for $k := 0$ to $2^{r-1} - 1$ do begin

for $j := 0$ to $2^{n-r} - 1$ do begin

$t := e^{-i \cdot k \cdot 2\pi/2^r} \cdot D[j \cdot 2^r + 2^{r-1} + k]$;

$D[j \cdot 2^r + 2^{r-1} + k] := D[j \cdot 2^r + k] - t$;

$D[j \cdot 2^r + k] := D[j \cdot 2^r + k] + t$;

end;

end;

end;

return(D);

end;

Tafel 1.2: Algorithmus „FFT“ (Schnelle Fourier-Transformation)

1.3.9 Beliebige Perioden

↓20.11.02

Bislang hatten wir die Fourier-Zerlegung von auf $[-\pi, \pi]$ gegebenen Funktionen betrachtet, die man sich als $2 \cdot \pi$ -periodisch fortgesetzt vorstellen sollte. Die Einschränkung auf das Standardintervall $[-\pi, \pi]$ geschah dabei lediglich aus schreibtechnischen Gründen, da alle Formeln hierfür besonders einfach werden.

Wir betrachten nun ein beliebiges Intervall $[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}]$, auf dem eine L -periodische Funktion $f(x) = f(x+L)$ gegeben ist. In Analogie zur Definition 1.25 betrachtet man das Orthogonalsystem

$$\{e^{i \cdot k \cdot \frac{2\pi}{L} \cdot x}\}_{k \in \mathbb{Z}},$$

die entsprechenden Fourier-Koeffizienten

$$c_k = \frac{\langle e^{i \cdot k \cdot \frac{2\pi}{L} \cdot x}, f \rangle}{\langle e^{i \cdot k \cdot \frac{2\pi}{L} \cdot x}, e^{i \cdot k \cdot \frac{2\pi}{L} \cdot x} \rangle} = \frac{1}{L} \cdot \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(x) \cdot e^{-i \cdot k \cdot \frac{2\pi}{L} \cdot x} dx$$

und die entsprechenden Fourier-Approximationen

$$S_n(x) = \sum_{k=-n}^n c_k \cdot e^{i \cdot k \cdot \frac{2\pi}{L} \cdot x}.$$

Diese Definitionen lassen sich folgendermassen interpretieren:

Zu $f : [-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}] \rightarrow \mathbb{C}$ betrachte die Funktion $g : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$, die durch eine Transformation $x \rightarrow \frac{L}{2 \cdot \pi} \cdot x$ aus f entsteht:

$$g(x) = f\left(\frac{L}{2 \cdot \pi} \cdot x\right), \quad f(x) = g\left(\frac{2 \cdot \pi}{L} \cdot x\right).$$

Diese Funktion ist $2 \cdot \pi$ -periodisch:

$$g(x + 2 \cdot \pi) = f\left(\frac{L}{2 \cdot \pi} \cdot (x + 2 \cdot \pi)\right) = f\left(\frac{L}{2 \cdot \pi} \cdot x + L\right) = f\left(\frac{L}{2 \cdot \pi} \cdot x\right) = g(x).$$

Zerlegt man g den vorangegangenen Kapiteln gemäß in eine Fourier-Reihe über dem Grundintervall $[-\pi, \pi]$, so ergeben sich nach Rücktransformation auf das Intervall $[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}]$ die obigen Darstellungen der Fourier-Koeffizienten und Fourier-Approximationen für f .

Damit ist unmittelbar klar, dass alle Strukturaussagen (Vollständigkeit bzgl. der L_2 -Norm, punktweise Konvergenz bei Dirichlet-Bedingungen, Gibbssches Phänomen etc.) auch für allgemeine Perioden gelten.

Die zugeordneten diskreten Fourier-Koeffizienten ergeben sich wiederum durch eine äquidistante Zerlegung des Intervalls $[0, L]$ mittels der Stützstellen $x_j = \frac{j \cdot L}{N}$:

$$d_k = \frac{1}{N} \cdot \sum_{j=0}^{N-1} f(x_j) \cdot e^{-i \cdot k \cdot \frac{2\pi}{L} \cdot x_j} = \frac{1}{N} \cdot \sum_{j=0}^{N-1} f(x_j) \cdot e^{-i \cdot k \cdot j \cdot 2\pi/N}.$$

Setzt man $f_j = f(x_j)$, so ist die unterliegende Periode L gar nicht mehr sichtbar, d.h., die Theorie der DFT als Transformation eines Datensatzes $(f_0, f_1, \dots, f_{N-1})$, der in Anwendungen durch äquidistantes „Sampling“ über eine Periode einer Funktion entsteht, bleibt unverändert erhalten.

1.3.10 Mehrdimensionale Fourier-Transformation

Die vorgestellte numerische Fourier-Transformation für „eindimensionale“ Datensätze ist sehr einfach auf höhere Dimensionen zu verallgemeinern, wobei lediglich mehrere der bereits diskutierten Transformationen hintereinanderschalten sind. Dies soll für den Fall einer doppelt periodischen Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ mit

$$f(x_1 + L_1, x_2) = f(x_1, x_2) = f(x_1, x_2 + L_2)$$

demonstriert werden. Ihr wird die Fourier–Reihe

$$f(x_1, x_2) \sim \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} c_{k_1 k_2} \cdot e^{i \cdot k_1 \cdot 2 \cdot \pi x_1 / L_1} \cdot e^{i \cdot k_2 \cdot 2 \cdot \pi x_2 / L_2}$$

mit den Fourier–Koeffizienten

$$c_{k_1 k_2} = \frac{1}{L_1 \cdot L_2} \cdot \int_0^{L_1} \int_0^{L_2} f(x_1, x_2) \cdot e^{-i \cdot k_1 \cdot 2 \cdot \pi x_1 / L_1} \cdot e^{-i \cdot k_2 \cdot 2 \cdot \pi x_2 / L_2} dx_1 dx_2$$

zugeordnet. Für hinreichend glattes f kann wiederum gezeigt werden, dass die Funktion punktweise durch diese Reihe dargestellt wird. Approximiert man das Integral durch Riemann–Summen über dem rechteckigen Gitter

$$x_{1j_1} = j_1 \cdot \frac{L_1}{N_1}, \quad j_1 = 0, \dots, N_1 - 1$$

$$x_{2j_2} = j_2 \cdot \frac{L_2}{N_2}, \quad j_2 = 0, \dots, N_2 - 1,$$

so ergeben sich analog zu Abschnitt 1.3.6 mit $f_{j_1 j_2} = f(x_{1j_1}, x_{2j_2})$ die diskreten Fourier–Koeffizienten

$$d_{k_1 k_2} = \frac{1}{N_1 \cdot N_2} \cdot \sum_{j_1=0}^{N_1-1} \sum_{j_2=0}^{N_2-1} f_{j_1 j_2} \cdot e^{-i \cdot j_1 \cdot k_1 \cdot 2 \cdot \pi / N_1} \cdot e^{-i \cdot j_2 \cdot k_2 \cdot 2 \cdot \pi / N_2}$$

als Approximationen von $c_{k_1 k_2}$. Für sie gilt die Periodizität

$$d_{k_1+N_1, k_2} = d_{k_1, k_2} = d_{k_1, k_2+N_2}.$$

Die Transformation der Daten

$$\{ f_{j_1, j_2} ; j_1 = 0, \dots, N_1 - 1, j_2 = 0, \dots, N_2 - 1 \}$$

auf die Repräsentanten

$$\{ d_{k_1, k_2} ; k_1 = 0, \dots, N_1 - 1, k_2 = 0, \dots, N_2 - 1 \}$$

wird als „**zweidimensionale diskrete Fourier–Transformation**“ $\mathbb{C}^{N_1 \cdot N_2} \rightarrow \mathbb{C}^{N_1 \cdot N_2}$ bezeichnet. Es ist leicht zu verifizieren, dass die Rücktransformation durch

$$f_{j_1 j_2} = \sum_{k_1=0}^{N_1-1} \sum_{k_2=0}^{N_2-1} d_{k_1 k_2} \cdot e^{i \cdot j_1 \cdot k_1 \cdot 2 \cdot \pi / N_1} \cdot e^{i \cdot j_2 \cdot k_2 \cdot 2 \cdot \pi / N_2}$$

gegeben ist. Diese Transformationen sind Hintereinanderschaltungen von „**ein-dimensionalen**“ Abbildungen. Führt man nämlich zuerst für jedes $j_2 \in \{0, \dots, N_2 - 1\}$ die diskrete Fourier–Transformation

$$g_{k_1 j_2} = \frac{1}{N_1} \cdot \sum_{j_1=0}^{N_1-1} f_{j_1 j_2} \cdot e^{-i \cdot j_1 \cdot k_1 \cdot 2 \cdot \pi / N_1}$$

der Länge N_1 bezüglich des ersten Indexes durch, so ergeben sich dann für jedes gegebene $k_1 \in \{0, \dots, N_1 - 1\}$ die gesuchten Fourier-Koeffizienten durch die Transformation der Länge N_2 bezüglich des zweiten Indexes:

$$d_{k_1 k_2} = \frac{1}{N_2} \cdot \sum_{j_2=0}^{N_2-1} g_{k_1 j_2} \cdot e^{-i \cdot j_2 \cdot k_2 \cdot 2 \cdot \pi / N_2} .$$

Stellt man sich die Ausgangsdaten in einer $N_1 \times N_2$ -Matrix angeordnet vor, so werden zunächst alle Spalten

$$\left(f_{j_1 j_2} \right)_{\substack{j_1=0, \dots, N_1-1 \\ j_2=0, \dots, N_2-1}} = \left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline f_{0,0} & f_{0,1} & f_{0,N_2-1} \\ \hline f_{1,0} & f_{1,1} & f_{1,N_2-1} \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots \\ \hline f_{N_1-1,0} & f_{N_1-1,1} & f_{N_1-1,N_2-1} \\ \hline \end{array} \right)$$

transformiert, die sich so ergebende Zwischenmatrix wird dann zeilenweise

$$\left(g_{k_1 j_2} \right)_{\substack{k_1=0, \dots, N_1-1 \\ j_2=0, \dots, N_2-1}} = \left(\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline g_{0,0} & g_{0,1} & \dots & g_{0,N_2-1} \\ \hline g_{1,0} & g_{1,1} & \dots & g_{1,N_2-1} \\ \hline & & \vdots & \\ \hline g_{N_1-1,0} & g_{N_1-1,1} & \dots & g_{N_1-1,N_2-1} \\ \hline \end{array} \right)$$

zur Matrix der Fourier-Koeffizienten verarbeitet. Der in Abschnitt 1.3.7 besprochene FFT-Algorithmus ist damit im Fall $N_1 = 2^{n_1}$ und $N_2 = 2^{n_2}$ unmittelbar anwendbar. Der Aufwand der eindimensionalen Rechnung besteht bis auf eine multiplikative Konstante aus jeweils $N_1 \cdot \log_2(N_1)$ bzw. $N_2 \cdot \log_2(N_2)$ Operationen pro Spalte bzw. Zeile. Damit ergeben sich insgesamt

$$N_2 \cdot N_1 \cdot \log_2(N_1) + N_1 \cdot N_2 \cdot \log_2(N_2) = N_1 \cdot N_2 \cdot \log_2(N_1 \cdot N_2)$$

Operationen für die gesamte Rechnung, sodass der Aufwand wieder $O(N \cdot \log_2(N))$ ist, wo $N = N_1 \cdot N_2$ die Gesamtzahl aller zu transformierenden Daten ist.

Diese Überlegungen lassen sich offensichtlich unmittelbar auf die numerische Behandlung der p -dimensionalen Fourier-Transformation einer Funktion $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{C}$ verallgemeinern.

1.3.11 Einige Anwendungen

Einige einfache Anwendungen der Fourier-Technik sollen kurz vorgestellt werden, aus denen der praktische Nutzen der schnellen Fourier-Transformation klar hervorgeht.

Digitales Filtern

Ein in der Datenübertragung häufig auftretendes Problem ist das Vermischen unterschiedlicher Signale (z.B. zur gemeinsamen Verschickung auf einem einzelnen Übertragungskanal), welche dann wieder zu trennen sind. Eine typische Vorgehensweise ist dabei, die einzelnen Signale verschiedenen Frequenzbereichen zuzuordnen und sie dadurch im Fourier–Raum zu trennen. Dies bedeutet, dass die Fourier–Daten jeweils um unterschiedliche Grundfrequenzen lokalisiert sind, sodass sich die Signale durch einen sogenannten Filterprozess trennen lassen. Hierbei werden von der Fourier–Transformierten nur Frequenzen in einem gewissen Bereich berücksichtigt, alle anderen Frequenzen werden abgeschwächt oder ganz abgeschnitten. Dieser durch geeignete elektronische Schaltungen leicht analog durchführbare Prozess ist in moderner Technologie im wesentlichen auf digitale Daten anzuwenden.

Als Beispiel zur Trennung zweier verschiedenartiger Signale sei das Problem gegeben, ein durch eine Störung (Rauschen) verschmutztes Nutzsignal aufzubessern. Dieses liegt im in Bild 1.2 dargestellten Beispiel als diskreter zweidimensionaler Datensatz vor, der z.B. als Grau- oder Farbwertverteilung eines Bildes mit $2^5 \times 2^5$ Rasterpunkten vorstellbar ist. Der Betrag der diskreten Fourier–Koeffizienten ist in diesem Beispiel über dem Frequenzbereich $k_1, k_2 = -16, \dots, 15$ aufgetragen, sodass niedrige Frequenzen in der Mitte des Diagramms zu finden sind. Die wesentliche Charakterisierung des Nutzsignals im Fourier–Raum besteht offensichtlich darin, dass das Bild von nur wenigen niederfrequenten Anteilen bestimmt wird. In den darunter stehenden Bildern ist eine Störung überlagert, welche hier durch zufällig zum Nutzsignal hinzuaddierte Werte erzeugt wurde. Im Fourier–Raum ist die Energie dieses Rauschens über einen wesentlich größeren Frequenzbereich verteilt. Die hier gewählte Rauschamplitude ist doppelt so groß wie die des eigentlichen Nutzsignals, welches dementsprechend nach der Störung kaum noch erkennbar ist. In den Fourier–Daten treten jedoch noch deutlich die niederfrequenten Spitzen des ungestörten Bildes in Erscheinung. Es wird ein einfacher Filterprozess angewendet: für niedrige Frequenzen k_1, k_2 werden die diskreten Fourier–Koeffizienten beibehalten, oberhalb einer Grenzfrequenz K werden sie nach dem Kriterium $\max(|k_1|, |k_2|) > K$ auf Null gesetzt (Tiefpaßfilterung). Aus dem so abgeänderten Datensatz wird durch Fourier–Rücktransformation eine geglättete Version des gestörten Ausgangssignals berechnet. Der Filterprozess ist durch die Grenzfrequenz K charakterisiert. Für zwei Werte von K sind die sich ergebenden Glättungen eingezeichnet.

In ähnlicher Weise lassen sich Feinstrukturen innerhalb eines Datensatzes/Bildes hervorheben, welche im wesentlichen den hochfrequenten Fourier–Anteilen

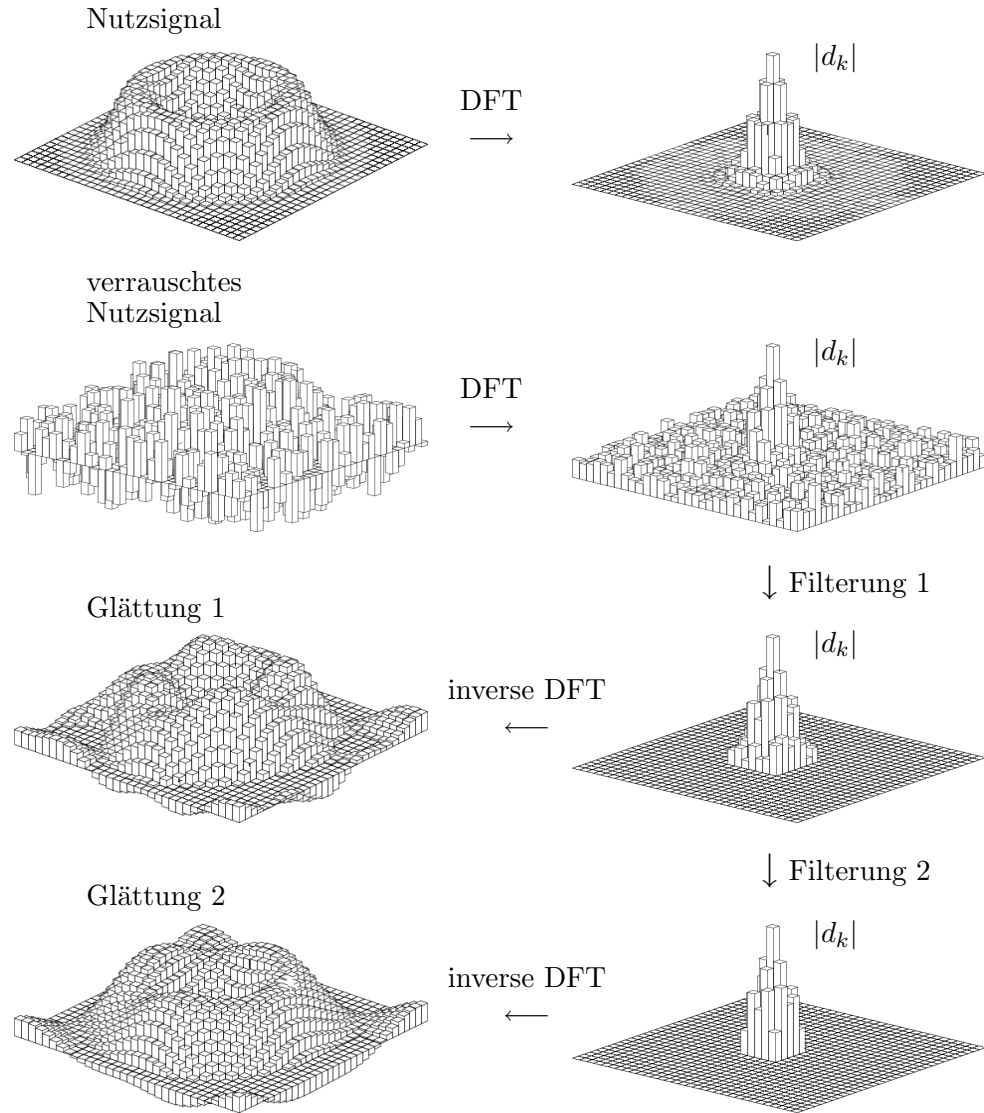


Bild 1.2: Tiefpaßfilterung eines Bildes.

entsprechen. Durch Hochpaßfilterung (d.h., dem Abschwächen oder Abschneiden niederfrequenter Fourier–Koeffizienten) lassen sich im ursprünglichen Bild schwer erkennbare Details verstärken.

Im Zusammenhang der Bildverarbeitung wird der Rechenzeitgewinn durch die Anwendung des FFT-Algorithmus sehr deutlich. Zerlegt man ein Bild in etwa 1000×1000 Rasterpunkte, was in Anwendungen realistisch sein dürfte, so ergeben sich $N = 10^6$ zu transformierende Daten. Mit $N \cdot \log_2(N) \approx 20 \times 10^6$ braucht eine FFT-Berechnung nur Sekundenbruchteile, während eine Auswertung der Fourier–Koeffizienten durch naives Aufsummieren mit $N^2 = 10^{12}$ Operationen nicht in akzeptabler Zeit ausführbar wäre.

Datenkompression

Ein notorisches Problem bei der Bearbeitung von Bilddaten ist der enorme Speicherbedarf, wenn die Farb- oder Grauwerte eines jeden Rasterpunktes abgespeichert werden. Da die Rasterdaten im Fourier–Raum über alle Frequenzen verteilt sind, können einige der Fourier–Koeffizienten vernachlässigt werden, ohne dass es im ursprünglichen Bildraum zu störenden lokalen Effekten kommt. Dies bietet die Möglichkeit, statt der ursprünglichen Bilddaten die Fourier–Transformierte abzuspeichern, wobei nur ein Teil der Fourier–Koeffizienten benötigt wird. Bild 1.3 zeigt das schon in Bild 1.2 als Nutzsignal betrachtete Datenfeld, das in diesem Zusammenhang als Farb- oder Grauwertverteilung eines Bildes anzusehen ist. Von den diskreten Fourier–Koeffizienten wurden alle bis auf die betragsmäßig größten 2% vernachlässigt, die durch inverse DFT aus den verbleibenden Daten berechnete Approximation des Bildes ist unter dem Original abgebildet. In diesem Fall wurde bei geringem Verlust der Bildqualität 98% des Speicherplatzes eingespart.

Schnelle Faltung

Zahlreiche Anwendungen der Fourier–Transformation beruhen auf der Tatsache, dass sich die sogenannte Faltung von Funktionen im Fourier–Raum wesentlich schneller durchführen läßt. Für diskrete Daten werden dazu die Produkte \odot und $\otimes : \mathbb{C}^N \times \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}^N$ eingeführt:

Definition 1.62:

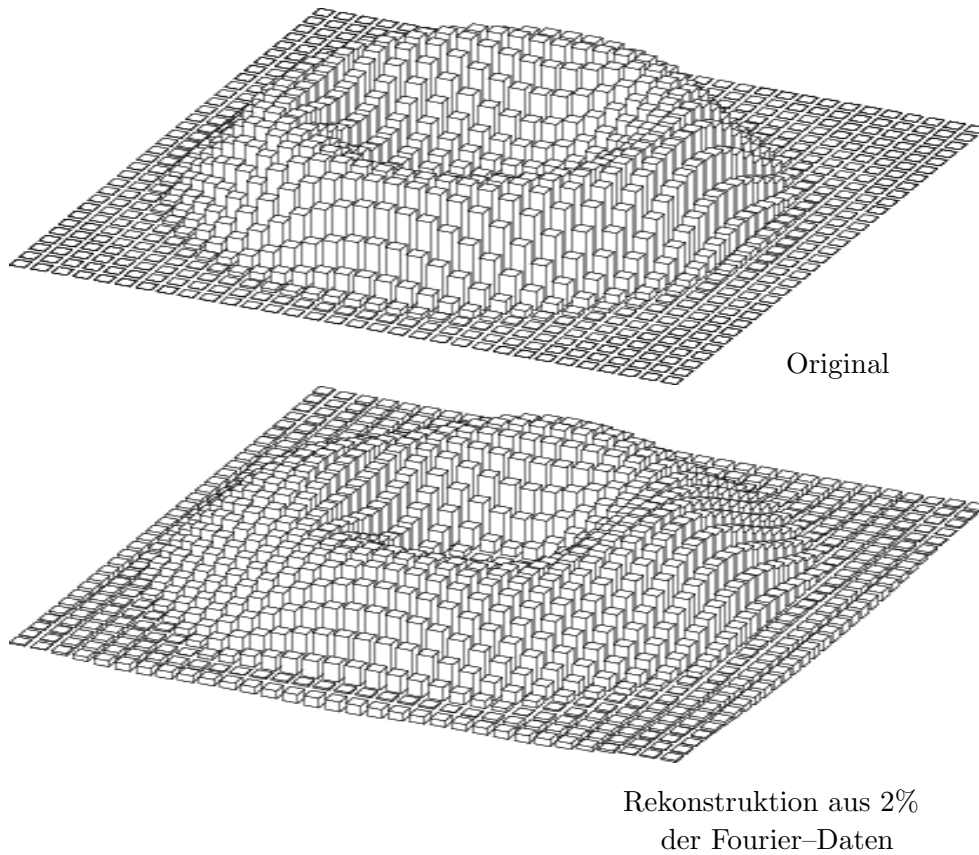


Bild 1.3: Rekonstruktion eines komprimierten Bildes.

Für $\vec{f} = (f_0, f_1, \dots, f_{N-1})^T$, $\vec{g} = (g_0, g_1, \dots, g_{N-1})^T \in \mathbb{C}^N$ werden die Multiplikationen

$$(\vec{f} \odot \vec{g})_j = f_j \cdot g_j \quad (\text{„punktweises Produkt“})$$

$$(\vec{f} \otimes \vec{g})_j = \sum_{k=0}^{N-1} f_{(j-k) \bmod N} \cdot g_k \quad (\text{„Faltung“})$$

definiert.

In der Faltung werden die Indizes modulo N betrachtet und dadurch auf den Wertebereich $0, \dots, N-1$ eingeschränkt. Dies simuliert die periodische Fortsetzung der Daten zu Folgen der Form $\dots, f_{N-1}, f_0, \dots, f_{N-1}, f_0, \dots$, wie sie in natürlicher Weise bei der Auswertung periodischer Funktionen entstehen. Beide Produkte sind kommutativ (d.h., $\vec{f} \odot \vec{g} = \vec{g} \odot \vec{f}$ und $\vec{f} \otimes \vec{g} = \vec{g} \otimes \vec{f}$), was für das punktweise Produkt offensichtlich ist und für die Faltung aus einer einfachen Umsummierung folgt.

Faltungsoperationen tauchen z.B. bei der Multiplikation von Polynomen auf. Für zwei Polynome

$$f = \sum_{j=0}^n f_j \cdot E^j, \quad g = \sum_{j=0}^m g_j \cdot E^j$$

in der Unbestimmten E ergibt sich das Produkt

$$f \cdot g = \sum_{j=0}^{n+m} \left(\sum_{k=0}^j f_{j-k} \cdot g_k \right) \cdot E^j.$$

Die Polynome werden über ihre Koeffizienten dargestellt, die mit

$$f_{n+1} = \dots = f_{N-1} = g_{m+1} = \dots = g_{N-1} = 0$$

als Vektoren $\vec{f} = (f_0, \dots, f_{N-1})^T$, $\vec{g} = (g_0, \dots, g_{N-1})^T \in \mathbb{C}^N$ interpretiert werden. Hierbei wird ein beliebiges $N > n + m$ gewählt, um auch die Koeffizienten des Produkts $f \cdot g$ durch solch einen Vektor darstellen zu können. In diesem Fall gilt

$$(\vec{f} \otimes \vec{g})_j = \sum_{k=0}^{N-1} f_{(j-k) \bmod N} \cdot g_k = \sum_{k=0}^j f_{j-k} \cdot g_k + \sum_{k=j+1}^{N-1} f_{N+j-k} \cdot g_k,$$

wobei die zweite Summe für alle $j = 0, \dots, N - 1$ verschwindet. Durch Einbettung in einen hinreichend hochdimensionalen Raum \mathbb{C}^N ergeben sich die Koeffizienten des Produktpolynoms also als Faltungsprodukt der Koeffizienten.

Offensichtlich benötigt eine Faltung N^2 Multiplikationen und Additionen, während das punktweise Produkt mit nur N Multiplikationen wesentlich schneller auszuführen ist. Mittels der diskreten Fourier–Transformation $\text{DFT} : \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}^N$ aus Definition 1.52 kann die Faltung jedoch auf ein punktweises Produkt im Fourier–Raum zurückgeführt werden:

Satz 1.63: (Faltungssatz)

Für $\vec{f} = (f_0, \dots, f_{N-1})^T$, $\vec{g} = (g_0, \dots, g_{N-1})^T \in \mathbb{C}^N$ gilt

$$\text{DFT}(\vec{f} \otimes \vec{g}) = N \cdot \text{DFT}(\vec{f}) \odot \text{DFT}(\vec{g})$$

und

$$\text{DFT}(\vec{f} \odot \vec{g}) = \text{DFT}(\vec{f}) \otimes \text{DFT}(\vec{g}).$$

Beweis: Die Komponenten von \vec{f} seien durch $f_{N+j} = f_j$ periodisch fortgesetzt. Durch Umsummierung $j_1 \rightarrow j = j_1 + j_2$ folgt unmittelbar

$$\begin{aligned} N \left(\text{DFT}(\vec{f}) \odot \text{DFT}(\vec{g}) \right)_k &= \frac{1}{N} \cdot \sum_{j_1=0}^{N-1} \sum_{j_2=0}^{N-1} f_{j_1} \cdot g_{j_2} \cdot e^{-i \cdot (j_1+j_2) \cdot k \cdot 2\pi/N} \\ &= \frac{1}{N} \cdot \sum_{j=0}^{N-1} \left(\sum_{j_2=0}^{N-1} f_{j-j_2} \cdot g_{j_2} \right) \cdot e^{-i \cdot j \cdot k \cdot 2\pi/N}, \end{aligned}$$

wobei der letzte Ausdruck die diskreten Fourier-Koeffizienten von $\vec{f} \otimes \vec{g}$ darstellt. Mit

$$\sum_{k'=0}^{N-1} e^{i \cdot (j-j') \cdot k' \cdot 2\pi/N} = \begin{cases} N & \text{für } j = j' \text{ mod } N \\ 0 & \text{für } j \neq j' \text{ mod } N \end{cases}$$

folgt weiterhin

$$\begin{aligned} &\left(\text{DFT}(\vec{f}) \otimes \text{DFT}(\vec{g}) \right)_k \\ &= \frac{1}{N^2} \cdot \sum_{k'=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} f_j \cdot e^{-i \cdot j \cdot (k-k') \cdot 2\pi/N} \cdot \sum_{j'=0}^{N-1} g_{j'} \cdot e^{-i \cdot j' \cdot k' \cdot 2\pi/N} \\ &= \frac{1}{N^2} \cdot \sum_{j,j'=0}^{N-1} f_j \cdot g_{j'} \cdot e^{-i \cdot j \cdot k \cdot 2\pi/N} \cdot \underbrace{\left(\sum_{k'=0}^{N-1} e^{i \cdot (j-j') \cdot k' \cdot 2\pi/N} \right)}_{\delta_{jj'}} \\ &= \frac{1}{N} \cdot \sum_{j=0}^{N-1} f_j \cdot g_j \cdot e^{-i \cdot j \cdot k \cdot 2\pi/N} = \left(\text{DFT}(\vec{f} \odot \vec{g}) \right)_k. \end{aligned}$$

Q.E.D.

Eine schnelle Faltung läßt sich damit über

$$\vec{f} \otimes \vec{g} = N \cdot \text{DFT}^{-1} \left(\text{DFT}(\vec{f}) \odot \text{DFT}(\vec{g}) \right)$$

oder auch in der Form

$$\vec{f} \otimes \vec{g} = \text{DFT} \left(\text{DFT}^{-1}(\vec{f}) \odot \text{DFT}^{-1}(\vec{g}) \right)$$

mit dem Aufwand $O(N \cdot \log_2(N))$ durchführen, wobei die diskrete Fourier-Transformation und ihre Inverse über den FFT-Algorithmus berechnet werden.

Selbst einfache Zahlenmultiplikationen sind Faltungen, denn in einer Darstellung bezüglich der Basis E lässt sich eine (ganze) Zahl als Polynom $f = \sum f_j \cdot E^j$ mit Ziffern $f_j \in \{0, 1, \dots, E-1\}$ auffassen. In einer nicht auf Hardware zurückgreifenden Langzahlarithmetik wird eine Zahl als Liste ihrer Ziffern gespeichert, ein Produkt lässt sich damit als Faltung von Listen schnell berechnen. Dabei werden in der Regel „Ziffern“ $\sum f_{j-k} \cdot g_k$ erzeugt, die nicht mehr im zulässigen Bereich $\{0, \dots, E-1\}$ liegen. Solche Überträge können jedoch leicht in der Laufzeit $O(N)$ abgearbeitet werden, wo N die Ziffernlänge darstellt. Auf diese Art kann eine Softwaremultiplikation extrem langer Zahlen per FFT stark beschleunigt werden. Leider sind in der Fourier-Transformation Gleitpunktzahlen zu verwenden, deren Handhabung einen gegenüber ganzen Zahlen höheren Zeitaufwand braucht. Außerdem schleichen sich Darstellungsfehler ein, sodass die zuletzt berechneten Ziffern des Produktes wegen der Rundungsfehler nur approximativ ganze Zahlen sind. Die wirklichen Ziffern ergeben sich problemlos durch Rundung der Gleitpunktzahlen, solange diese Approximationen bis auf einen absoluten Fehler $\ll 1$ berechnet werden.

1.4 Die Fourier-Integraltransformation

1.4.1 Motivation

Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ eine glatte Funktion, die außerhalb eines Intervalls $[-\frac{L_0}{2}, \frac{L_0}{2}]$ identisch 0 ist. Wir betrachten $L \geq L_0$ und wollen den Grenzübergang $L \rightarrow \infty$ der im Abschnitt 1.3.9 diskutierten Fourier-Entwicklungen über dem Intervall $[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}]$ mit den Fourier-Koeffizienten

$$c_{L,k} = \frac{1}{L} \cdot \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(x) \cdot e^{-i \cdot k \cdot \frac{2 \cdot \pi}{L} \cdot x} dx = \frac{1}{L} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot e^{-i \cdot k \cdot \frac{2 \cdot \pi}{L} \cdot x} dx$$

und den entsprechenden Fourier-Reihen

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{L,k} \cdot e^{i \cdot k \cdot \frac{2 \cdot \pi}{L} \cdot x}$$

betrachten. Wir definieren dazu

$$\widehat{f}(\kappa) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot e^{-i \cdot \kappa \cdot x} dx.$$

Bei gegebenem L hängt die Funktion $\widehat{f}(\kappa)$ an den diskreten Werten $\kappa_{L,k} = k \cdot \frac{2 \cdot \pi}{L}$ mit den Fourier-Koeffizienten über $[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}]$ zusammen:

$$\widehat{f}\left(k \cdot \frac{2 \cdot \pi}{L}\right) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot e^{-i \cdot k \cdot \frac{2 \cdot \pi}{L} \cdot x} dx = \frac{L}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot c_{L,k}.$$

Für ein gegebenes $x \in \mathbb{R}$ gilt bei hinreichend glattem f für jedes $L \geq \max(L_0, 2 \cdot |x|)$ (also $x \in [-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}]$), dass $f(x)$ durch die Fourier-Reihe über $[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}]$ dargestellt wird, also

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{L,k} \cdot e^{i \cdot k \cdot \frac{2 \cdot \pi}{L} \cdot x} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{2 \cdot \pi}}{L} \cdot \widehat{f}\left(k \cdot \frac{2 \cdot \pi}{L}\right) \cdot e^{i \cdot k \cdot \frac{2 \cdot \pi}{L} \cdot x} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\kappa_{L,k}) \cdot e^{i \cdot \kappa_{L,k} \cdot x} \cdot \underbrace{\frac{2 \cdot \pi}{L}}_{\Delta \kappa}. \end{aligned}$$

Obige Gleichung gilt für jedes $L \geq L_0$ und bleibt damit im Grenzwert $L \rightarrow \infty$ bestehen. In diesem Grenzwert wird aus der obigen Summe ein Integral. Für alle glatten Funktionen, die außerhalb eines Intervalls $[-\frac{L_0}{2}, \frac{L_0}{2}]$ verschwinden, gilt damit für alle $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\kappa) \cdot e^{i \cdot \kappa \cdot x} d\kappa$$

mit der oben definierten Funktion $\widehat{f}(k)$.

1.4.2 L_1 -Theorie

Die Überlegungen des letzten Abschnitts motivieren die folgenden Definitionen, die für „betragsintegrale Funktionen“ sinnvoll sind, d.h., für Funktion im Raum

$$L_1(\mathbb{R}) = \left\{ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}; \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty \right\}.$$

Vergleiche auch mit der Definition 1.35 von $L_1([a, b])$. Im Fall eines endlichen Intervalls ist eine Funktion in L_1 , wenn sie keine „zu starken“ Singularitäten hat. Im Fall des unendlichen Intervalls $[a, b] = \mathbb{R}$ kommt als zusätzliche Einschränkung hinzu, dass die Funktion hinreichend schnell im Unendlichen abfallen muss (speziell schneller als $O(1/|x|)$ für $x \rightarrow \pm\infty$), um integrierbar zu sein.

Definition 1.64: (Fourier-Integraltransformation)

a) Für $f \in L_1(\mathbb{R})$ heißt

$$\widehat{f}(k) = \mathcal{F}[f](k) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot e^{-i \cdot k \cdot x} dx$$

die „Fourier-Transformierte“ („das Spektrum“, „die Spektraldichte“) von $f(x)$.

b) Für $\widehat{f} \in L_1(\mathbb{R})$ heißt

$$f(x) = \mathcal{F}^{-1}[\widehat{f}](x) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k) \cdot e^{i \cdot k \cdot x} dk$$

die „Fourier-Rücktransformierte“ von $\widehat{f}(k)$.

Beispiel 1.65: Einige Beispiele:

a) Betrachte

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } |x| \leq L, \\ 0 & \text{für } |x| > L \end{cases}$$

mit $L \in (0, \infty)$:

$$\mathcal{F}[f](k) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \int_{-L}^L e^{-i \cdot k \cdot x} dx = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \left[\frac{e^{-i \cdot k \cdot x}}{-i \cdot k} \right]_{x=-L}^{x=L} = \frac{2}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \frac{\sin(k \cdot L)}{k}.$$

b)

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \frac{|x|}{L} & \text{für } |x| \leq L, \\ 0 & \text{für } |x| > L \end{cases}$$

mit $L \in (0, \infty)$:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f](k) &= \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \int_{-L}^L \left(1 - \frac{|x|}{L}\right) \cdot e^{-i \cdot k \cdot x} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \frac{2 \cdot (1 - \cos(L \cdot k))}{L \cdot k^2} = \frac{4}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \frac{\sin^2\left(\frac{L \cdot k}{2}\right)}{L \cdot k^2}. \end{aligned}$$

c) Betrachte

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0, \\ e^{(k_0 + i \cdot k_1) \cdot x} & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$$

mit $k_0 \in (-\infty, 0)$, $k_1 \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f](k) &= \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \int_0^{\infty} e^{(k_0 + i \cdot k_1) \cdot x} \cdot e^{-i \cdot k \cdot x} dx \\ &= \left[\frac{e^{(k_0 + i \cdot (k_1 - k)) \cdot x}}{k_0 + i \cdot (k_1 - k)} \right]_{x=0}^{x=\infty} = \frac{-1}{k_0 + i \cdot (k_1 - k)} = \frac{1}{i \cdot k - (k_0 + i \cdot k_1)}. \end{aligned}$$

d) Betrachte $f(x) = e^{-k_0 \cdot |x|}$ mit $k_0 \in (0, \infty)$:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f](k) &= \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \int_{-\infty}^0 e^{k_0 \cdot x} \cdot e^{-i \cdot k \cdot x} dx + \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \int_0^{\infty} e^{-k_0 \cdot x} \cdot e^{-i \cdot k \cdot x} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \left(\left[\frac{e^{(k_0 - i \cdot k) \cdot x}}{k_0 - i \cdot k} \right]_{x=-\infty}^{x=0} + \left[\frac{e^{(-k_0 - i \cdot k) \cdot x}}{-k_0 - i \cdot k} \right]_{x=0}^{x=\infty} \right) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \frac{2 \cdot k_0}{k_0^2 + k^2}. \end{aligned}$$

e) Betrachte $f(x) = e^{-c \cdot x^2}$ mit $c \in (0, \infty)$:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}[f](k) &= \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-c \cdot x^2} \cdot e^{-i \cdot k \cdot x} dx \\
 &\stackrel{(y=\sqrt{c} \cdot x)}{=} \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{c}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} \cdot e^{-i \cdot k \cdot y / \sqrt{c}} dy \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{c}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(y+i \cdot k / (2 \cdot \sqrt{c}))^2} \cdot e^{-k^2 / (4 \cdot c)} dy \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{c}} \cdot e^{-k^2 / (4 \cdot c)} \cdot \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(y+i \cdot k / (2 \cdot \sqrt{c}))^2} dy}_{=\sqrt{\pi}} \\
 &\stackrel{(*)}{=} \frac{e^{-k^2 / (4 \cdot c)}}{\sqrt{2 \cdot c}}.
 \end{aligned}$$

Hierbei benutzen wir in (*) den angegebenen Wert des Integrals ohne Beweis. Für $c = 1/2$ folgt die bemerkenswerte Eigenschaft

$$\mathcal{F}[f](k) = f(k) \quad \text{für} \quad f(x) = e^{-x^2/2}.$$

Bemerkung 1.66: *Fourier-Transformation ist eine „glättende“ Operation: die Transformation der unstetigen Funktionen a), c) und der an einigen Stellen nicht differenzierbaren Funktionen b), d) des letzten Beispiels sind jeweils glatte Funktionen.*

Bemerkung 1.67: *Für $f \in L_1(\mathbb{R})$ gilt*

$$\mathcal{F}[f](\kappa) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \cdot e^{-i \cdot \kappa \cdot \xi} d\xi = \mathcal{F}^{-1}[f](-\kappa),$$

d.h., Fourier-Transformation und Fourier-Rücktransformation sind bis auf Spiegelung des Arguments das selbe. Die folgenden Aussagen sind für die Fourier-Transformierte $\hat{f} = \mathcal{F}[f]$ einer L_1 -Funktion f formuliert, gelten mit dieser Beobachtung aber analog auch für die Rücktransformierte $\mathcal{F}^{-1}[\hat{f}]$ einer L_1 -Funktion \hat{f} .

Satz 1.68: (Eigenschaften von Fourier-Transformierten)

Sei $f \in L_1(\mathbb{R})$.

a) $\mathcal{F}[f]$ ist eine stetige Funktion.

b) $\mathcal{F}[f]$ ist beschränkt: $|\mathcal{F}[f](k)| \leq \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx$.

c) Riemann-Lebesgue-Lemma: $\lim_{k \rightarrow \pm\infty} \mathcal{F}[f](k) = 0$.

d) Skalierungssatz: $\mathcal{F}[f(\lambda \cdot x)](k) = \frac{1}{|\lambda|} \cdot \mathcal{F}[f(x)](k/\lambda)$ für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$.

e) Die Fourier-Transformierte bestimmt eindeutig die Ausgangsfunktion: Ist $\mathcal{F}[f] \equiv 0$, so gilt fast überall $f(x) = 0$.

Beweis: Mit $\hat{f} = \mathcal{F}[f]$:

a)

$$\begin{aligned} |\hat{f}(k) - \hat{f}(k - \epsilon)| &= \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot \left(e^{-i \cdot k \cdot x} - e^{-i \cdot (k - \epsilon) \cdot x} \right) dx \right| \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| \cdot |e^{-i \cdot k \cdot x}| \cdot |1 - e^{i \cdot \epsilon \cdot x}| dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| \cdot |1 - e^{i \cdot \epsilon \cdot x}| dx. \end{aligned}$$

Mit

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} |1 - e^{i \cdot \epsilon \cdot x}| = 0$$

folgt die Stetigkeit von \hat{f} aus dem „Satz über die dominierte Konvergenz“ der Lebesgueschen Integrationstheorie.

b) Ist leicht einzusehen:

$$|\hat{f}(k)| = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot e^{-i \cdot k \cdot x} dx \right| \leq \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| \cdot \underbrace{|e^{-i \cdot k \cdot x}|}_{=1} dx.$$

c) Analog zum Riemann-Lebesgue-Lemma 1.37.

d) Ist leicht einzusehen:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f(\lambda \cdot x)](k) &= \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda \cdot x) \cdot e^{-i \cdot k \cdot x} dx \\ &\stackrel{(y=\lambda \cdot x)}{=} \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \int_{-\text{sign}(\lambda) \cdot \infty}^{\text{sign}(\lambda) \cdot \infty} f(y) \cdot e^{-i \cdot k \cdot y / \lambda} dy \\ &= \frac{\text{sign}(\lambda)}{\lambda} \cdot \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \cdot e^{-i \cdot (k/\lambda) \cdot y} dy \\ &= \frac{1}{|\lambda|} \cdot \mathcal{F}[f]\left(\frac{k}{\lambda}\right). \end{aligned}$$

e) Sehr technisch. Siehe z.B. Theorem 7 in K. CHANDRASEKHARAN, *Classical Fourier Transforms*, Springer (1989).

Q.E.D.

Der Name „Rücktransformation“ für \mathcal{F}^{-1} wurde nicht versehentlich gewählt:

↓27.11.02

Satz 1.69: (Die Fourier-Rücktransformation)

Für $f \in L_1(\mathbb{R})$ sei $\widehat{f} = \mathcal{F}[f]$ wieder eine L_1 -Funktion. Dann gilt fast überall $f(x) = \mathcal{F}^{-1}[\widehat{f}](x)$. Ist f zusätzlich stetig, so gilt überall $f(x) = \mathcal{F}^{-1}[\widehat{f}](x)$.

Beweis: Sehr technisch. Siehe z.B. die Theoreme 11 und 11' in K. CHANDRASEKHARAN, *Classical Fourier Transforms*, Springer (1989).

Q.E.D.

Bemerkung 1.70: Die Rekonstruierbarkeit von f aus der Fourier-Transformierten \widehat{f} wird in Satz 1.69 nicht nur auf die absolute Integrierbarkeit von f , sondern auch noch zusätzlich auf die von \widehat{f} zurückgeführt. Da nach Satz 1.68.a) zusammen mit Bemerkung 1.67 die Ausgangsfunktion f als Bild unter einer Fourier-Rücktransformation stetig sein muss, wenn \widehat{f} absolut integrabel ist, folgt indirekt, dass die Fourier-Transformierte \widehat{f} eines $f \in L_1(\mathbb{R})$ nicht wieder in L_1 liegen kann, wenn f nicht fast überall mit einer stetigen Funktion übereinstimmt.

(Achtung: ein fast überall stetiges f braucht nicht fast überall mit einer stetigen Funktion übereinzustimmen: eine Funktion mit einer einzelnen Sprungunstetigkeit ist zwar fast überall stetig, aber es gibt keine Möglichkeit, f an dieser einzelnen Stelle so umzudefinieren, dass eine stetige Funktion entsteht. In diesem Fall gibt es also keine stetige Funktion, mit der f fast überall übereinstimmt.)

In der Tat haben die unstetigen Beispiele a) und c) in Beispiel 1.65 Fourier-Transformierte \widehat{f} , die nicht in $L_1(\mathbb{R})$ liegen, weil sie für $k \rightarrow \pm\infty$ nur wie $O(1/|k|)$ abfallen. Andererseits sollte sich jedes $f \in L_1(\mathbb{R})$ wegen der Eindeutigkeit 1.68.e) aus \widehat{f} rekonstruieren lassen, auch wenn \widehat{f} nicht in L_1 liegt und damit $\mathcal{F}^{-1}[\widehat{f}]$ nicht definiert ist. Dazu beobachten wir, dass für eine L_1 -Funktion \widehat{f} die Limite

$$\lim_{R_1 \rightarrow -\infty} \lim_{R_2 \rightarrow \infty} \int_{R_1}^{R_2} |\widehat{f}(k) \cdot \cancel{e^{ikx}}| dk$$

in R_1 und R_2 getrennt existieren müssen, wobei wegen der Betragszeichen der oszillierende Charakter von $e^{i \cdot k \cdot x}$ gar nicht eingeht und die Existenz der Fourier-Rücktransformation nur durch das Abklingverhalten von $|\widehat{f}(k)|$ für $k \rightarrow \pm\infty$ bestimmt wird.

Es gibt jedoch viele Fälle von Fourier-Transformierten $\widehat{f}(k)$, die zwar nicht in

L_1 liegen, für die aber der spezielle Grenzwert

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \widehat{f}(k) \cdot e^{i \cdot k \cdot x} dk \quad (\#)$$

existiert (man beachte, dass hier keine Betragszeichen um den Integranden stehen). Der Unterschied zwischen der Existenz von $\int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(k)| dk$ und der Existenz des Grenzwertes (#) entspricht dem Unterschied zwischen der absoluten Konvergenz von Reihen (mit Beträgen unter der Summe) und der (üblichen) Konvergenz von Reihen (ohne Beträgen unter der Summe). In der Praxis hat man es sehr oft mit unstetigen Funktionen zu tun, deren Fourier-Transformierte typischerweise nur wie $O(1/|k|)$ für $k \rightarrow \pm\infty$ abfallen und damit keine L_1 -Funktionen sind. Trotzdem existiert in der Regel die Umkehrtransformation im Sinne von (#), wobei die Konvergenz für Funktionen mit dem Abklingverhalten $O(1/|k|)$ durch den oszillierenden Charakter von $e^{i \cdot k \cdot x}$ bedingt wird.

Wir verallgemeinern daher den Begriff der Fourier-(Rück-)Transformation auf

$$\mathcal{F}[f](k) = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \int_{-R}^R f(x) \cdot e^{-i \cdot k \cdot x} dx,$$

$$\mathcal{F}^{-1}[\widehat{f}](x) = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \int_{-R}^R \widehat{f}(k) \cdot e^{i \cdot k \cdot x} dk,$$

die auch für Funktionen f, \widehat{f} existieren können, die nicht in $L_1(\mathbb{R})$ gelten.

Der folgende Satz ist das Analogon des Satzes 1.39 und garantiert lokale Rücktransformierbarkeit für nicht allzu „wilde“ Funktionen:

Satz 1.71: (Das Dirichlet-Kriterium für Fourier-Integrale)

Sei $f \in L_1(\mathbb{R})$, sei $\widehat{f} = \mathcal{F}[f]$ (wobei nicht notwendigerweise $\widehat{f} \in L_1(\mathbb{R})$ zu gelten braucht). Gilt an einer Stelle $x_0 \in \mathbb{R}$, dass sowohl der links- als auch der rechtsseitige Grenzwert

$$f(x_0 - 0) := \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} f(x_0 - h) \quad f(x_0 + 0) := \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} f(x_0 + h)$$

existiert und ebenfalls die links- und rechtsseitigen Ableitungen

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} \frac{f(x_0 - 0) - f(x_0 - h)}{h}, \quad \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 + 0)}{h},$$

so konvergiert die Fourier-Rücktransformation gegen den Mittelwert des links- und rechtsseitigen Grenzwerts:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \int_{-R}^R \widehat{f}(k) \cdot e^{i \cdot k \cdot x_0} dk = \frac{f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)}{2}.$$

Beweis: Wir etablieren zunächst das Analogon zu Satz 1.38, d.h., wir stellen die Rückkehrtransformation als Integral mit dem Analogon D_R des Dirichlet-Kerns D_N dar:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \int_{-R}^R \widehat{f}(k) \cdot e^{i \cdot k \cdot x} dk &= \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{-R}^R \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-i \cdot k \cdot t} dt \cdot e^{i \cdot k \cdot x} dk \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{-R}^R e^{i \cdot k \cdot (x-t)} dk \right) \cdot f(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} D_R(x-t) \cdot f(t) dt, \end{aligned}$$

wobei

$$D_R(y) = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{-R}^R e^{i \cdot k \cdot y} dk = \begin{cases} \frac{\sin(R \cdot y)}{\pi \cdot y} & \text{für } y \neq 0, \\ \frac{R}{\pi} & \text{für } y = 0. \end{cases}$$

Es gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} D_R(y) dy = 1.$$

Nun kann man genauso wie im Beweis von Satz 1.39 verfahren.

Q.E.D.

Es gilt das Analogon des Satzes 1.45:

Satz 1.72:

Für eine differenzierbare L_1 -Funktion f mit absolut integrierbarer Ableitung $f' \in L_1(\mathbb{R})$ gilt:

$$\mathcal{F}[f'](k) = i \cdot k \cdot \mathcal{F}[f](k).$$

Beweis: Da differenzierbare (und damit stetige) L_1 -Funktionen im Unendlichen verschwinden müssen, folgt durch partielle Integration:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f'](k) &= \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f'(x) \cdot e^{-i \cdot k \cdot x} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \left[f(x) \cdot e^{-i \cdot k \cdot x} \right]_{x=-\infty}^{x=\infty} - \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot (-i \cdot k) \cdot e^{-i \cdot k \cdot x} dx \\ &= \frac{i \cdot k}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot e^{-i \cdot k \cdot x} dx = i \cdot k \cdot \mathcal{F}[f](k). \end{aligned}$$

Q.E.D.

Diese Aussage ist leicht zu merken: stellt man sich die Funktion als Fourier-Rücktransformierte vor, so kann man die Differentiation unter dem Integral vornehmen und erhält die Ableitung als Fourier-Rücktransformierte von $i \cdot k \cdot \mathcal{F}[f](k)$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} f(x) &= \frac{d}{dx} \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k) \cdot e^{i \cdot k \cdot x} dk \\ &= \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k) \cdot \frac{d}{dx} e^{i \cdot k \cdot x} dk = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\widehat{f}(k) \cdot (i \cdot k)}_{\mathcal{F}^{-1}[f'](k)} \cdot e^{i \cdot k \cdot x} dk. \end{aligned}$$

Da eine Fourier-Rücktransformation bis auf Spiegelung der Argumente identisch zu einer Fourier-Transformation ist, gilt eine analoge Aussage für die Ableitung einer Fourier-Transformierten:

Satz 1.73:

Ist f in $L_1(\mathbb{R})$ und ist die Funktion $x \cdot f : x \rightarrow x \cdot f(x)$ ebenfalls in $L_1(\mathbb{R})$, so ist $\mathcal{F}[f]$ differenzierbar, und es gilt

$$\frac{d}{dk} \mathcal{F}[f](k) = -i \cdot \mathcal{F}[x \cdot f](k).$$

Beweis: Für den Beweis der Differenzierbarkeit braucht man wieder Lebesguesche Integrationstheorie. Siehe z.B. Theorem 3 in K. CHANDRASEKHARAN, *Classical Fourier Transforms*, Springer (1989).

Setzt man die Differenzierbarkeit von $\mathcal{F}[f]$ voraus, ergibt sich die Ableitung elementar durch

$$\begin{aligned} \frac{d}{dk} \mathcal{F}[f](k) &= \frac{d}{dk} \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot e^{-i \cdot k \cdot x} dx = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot \frac{d}{dk} e^{-i \cdot k \cdot x} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} (-i \cdot x) \cdot f(x) \cdot e^{-i \cdot k \cdot x} dx = -i \cdot \mathcal{F}[x \cdot f](k). \end{aligned}$$

Q.E.D.

Es gilt das Analogon des Satzes 1.47:

↓29.11.02

Satz 1.74: (Abklingverhalten der Fourier-Transformierten)

Sind die Ableitungen einer p -fach differenzierbaren L_1 -Funktion f jeweils in $L_1(\mathbb{R})$, so gilt für die Fourier-Transformierte

$$\mathcal{F}[f](k) = o\left(\frac{1}{|k|^p}\right).$$

Beweis: Genauso wie der Beweis des Satzes 1.47.

Q.E.D.

1.4.3 L_2 -Theorie

Für die Physik (genauer, für die Quantenmechanik) sind die Funktionen im Raum

$$L_2(\mathbb{R}) = \left\{ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}; \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx < \infty \right\}$$

von größtem Interesse. Über endlichen Intervallen gilt $L_2([a, b]) \subset L_1([a, b])$, was mit $g \equiv f/|f|$ aus der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung

$$\|f\|_1^2 = |\langle f, g \rangle|^2 \leq \|f\|_2^2 \cdot \|g\|_2^2 = \|f\|_2^2 \cdot (b - a)$$

folgt ($\|f\|_2 < \infty \Rightarrow \|f\|_1 < \infty$). Damit sind auf endlichen Intervallen die L_2 -Funktionen ein Spezialfall der L_1 -Funktionen. Über der gesamten reellen Achse gilt dies leider nicht mehr. Dies liegt daran, daß in $L_1(\mathbb{R})$ das Abklingverhalten $o(1/|x|)$ für $x \rightarrow \pm\infty$ als zusätzliche Bedingung an L_1 -Funktionen hinzukommt. Beispielsweise fallen die Funktionen

$$f_\epsilon(x) = \frac{1}{1 + |x|^{\frac{1}{2} + \epsilon}}$$

für $0 < \epsilon \leq \frac{1}{2}$ im Unendlichen hinreichend schnell ab, um in $L_2(\mathbb{R})$ zu liegen, aber nicht schnell genug, um in $L_1(\mathbb{R})$ zu liegen.

Für Funktionen, die nicht in $L_1(\mathbb{R})$ liegen, hat man zunächst das Problem, dass das Integral

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot e^{-i \cdot k \cdot x} dx$$

im Lebesgue-Sinne gar nicht existiert. Aus diesem Dilemma kann man sich retten, indem man stattdessen (wie beim Riemann-Integral) den Grenzwert

$$\hat{f}(k) = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \int_{-R}^R f(x) \cdot e^{-i \cdot k \cdot x} dx$$

betrachtet. Dieser Zugang wurde von dem schweizer Mathematiker Michel Plancherel (1885–1967) benutzt, eine Fourier-Theorie über dem $L_2(\mathbb{R})$ aufzubauen. Wir wählen hier einen vereinfachten Zugang, indem wir $L_2(\mathbb{R})$ als Vervollständigung eines speziellen Raums glatter Funktionen bezüglich der L_2 -Norm auffassen. Die betrachteten glatten Funktionen bilden den sogenannten „Schwarz-Raum“:

Definition 1.75:

Der „Schwarz-Raum“

$$\mathcal{S} = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}; f \text{ ist } \infty\text{-oft differenzierbar und}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^p \cdot f^{(q)}(x) = 0 \quad \forall p, q \in \mathbb{N}_0\}$$

besteht aus den glatten Funktionen, deren Ableitungen im Unendlichen stärker als jede rationale Funktion verschwinden. Die Schwarz-Funktionen $f \in \mathcal{S}$ werden auch als „Testfunktionen“ bezeichnet.

Bemerkung 1.76: Bei der Frage, ob die glatten Schwarz-Funktionen $f \in \mathcal{S}$ integrierbar sind, geht es nur um das Abklingverhalten im Unendlichen. Speziell fallen sie schneller ab als $1/|x|$ oder auch als $1/|x|^2$. Damit sind sie absolut integrierbar und auch absolut quadratintegrierbar:

$$\mathcal{S} \subset L_1(\mathbb{R}), \quad \mathcal{S} \subset L_2(\mathbb{R}).$$

Ebenso liegen alle Ableitungen einer Schwarz-Funktion sowohl in $L_1(\mathbb{R})$ als auch in $L_2(\mathbb{R})$, da sie im Unendlichen schnell abfallen. Wir können damit Satz 1.74 anwenden: die Fourier-Transformierten $\widehat{f}(k)$ von Schwarz-Funktionen $f(x)$ fallen im Unendlichen schneller ab als jede rationale Funktion der Frequenz k .

Die Ableitung $\frac{d}{dk}\widehat{f}(k)$ der Fourier-Transformierten einer Schwarz-Funktion $f(x)$ ist nach Satz 1.73 i. W. (bis auf die multiplikative Konstante $-i$) die Transformierte von $x \cdot f(x)$. Da $x \cdot f(x)$ aber wiederum eine Schwarz-Funktion ist, gilt auch für $\frac{d}{dk}\widehat{f}(k)$, dass sie im Unendlichen schneller als jede rationale Funktion der Frequenz k abfällt.

Usw. Per Induktion erhält man, dass jede beliebige Ableitung $\frac{d^q}{dk^q}\widehat{f}(k)$ die Eigenschaft hat, im Unendlichen schneller als jede rationale Funktion der Frequenz k abzufallen. Ergebnis:

Die Fourier-Transformierte einer Schwarz-Funktion ist wieder eine Schwarz-Funktion.

Der Schwarz-Raum \mathcal{S} wird durch Fourier-Transformation also auf sich selbst abgebildet. Dasselbe gilt natürlich für die Fourier-Rücktransformation, die ja bis auf Spiegelung des Funktionsarguments eine Fourier-Transformation ist.

Hilfssatz 1.77: (Invertierbarkeit der Fourier-Transformation auf \mathcal{S})

Für jede Schwarz-Funktion $f \in \mathcal{S}$ gilt $f = \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[f]] = \mathcal{F}[\mathcal{F}^{-1}[f]]$.

Beweis: Als Schwarz-Funktion ist f eine stetige L_1 -Funktion und läßt sich nach Satz 1.69 punktweise als Rücktransformierte ihrer Fourier-Transformierten schreiben.

Q.E.D.

Hilfssatz 1.78: (Das Plancherel-Theorem für \mathcal{S})

Für zwei Schwarz-Funktionen $f, g \in \mathcal{S}$ mit den Fourier-Transformierten $\widehat{f} = \mathcal{F}[f]$, $\widehat{g} = \mathcal{F}[g]$ gilt

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(x)} \cdot g(x) \, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\widehat{f}(k)} \cdot \widehat{g}(k) \, dk = \langle \widehat{f}, \widehat{g} \rangle.$$

Für $g = f$ folgt: $\|f\|_2 = \|\widehat{f}\|_2$.

Beweis: Nach dem vorigen Hilfssatz 1.77 läßt sich f als Rücktransformierte ihrer Fourier-Transformierten schreiben:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(x)} \cdot g(x) \, dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\left(\frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k) \cdot e^{i \cdot k \cdot x} \, dk \right)} \cdot g(x) \, dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \overline{\widehat{f}(k)} \cdot e^{-i \cdot k \cdot x} \cdot g(x) \, dk \, dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\widehat{f}(k)} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i \cdot k \cdot x} \cdot g(x) \, dx \right) \, dk \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\widehat{f}(k)} \cdot \widehat{g}(k) \, dk. \end{aligned}$$

Q.E.D.

Als ein wesentliches technisches Zwischenresultat zitieren wir die Tatsache, dass sich die Funktionen in $L_2(\mathbb{R})$ nicht nur durch (allgemeine) stetige Funktionen über \mathbb{R} bezüglich der L_2 -Norm approximieren lassen, sondern auch durch die speziellen Schwarz-Funktionen:

Lemma 1.79:

Der Schwarz-Raum \mathcal{S} liegt „dicht“ in $L_2(\mathbb{R})$, d.h., zu $f \in L_2(\mathbb{R})$ gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ eine Funktion $g \in \mathcal{S}$ mit $\|f - g\|_2 \leq \epsilon$. Anders ausgedrückt: zu jedem $f \in L_2(\mathbb{R})$ existiert eine Folge (f_n) von Schwarz-Funktionen mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f \text{ (im } L_2\text{-Sinn), d.h., } \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_2 = 0.$$

Beweis: Lebesguesche Integrationstheorie.

Nun können wir endlich die Fourier-Transformation auf $L_2(\mathbb{R})$ definieren:

Satz und Definition 1.80:

Sei $f \in L_2(\mathbb{R})$. Wähle eine gegen f konvergierende Folge (f_n) von Schwarz-Funktionen. Die Fourier-Transformierten $\widehat{f}_n = \mathcal{F}[f_n]$ konvergieren gegen ein $\widehat{f} \in L_2(\mathbb{R})$. Dieser Grenzwert \widehat{f} ist unabhängig von der Wahl der gegen f konvergierenden Folge (f_n) . Wir definieren die Fourier-Transformierte von f als dieses \widehat{f} .

Für $f \in L_2(\mathbb{R}) \cap L_1(\mathbb{R})$ stimmt diese Fourier-Transformierte mit der aus Definition 1.64 überein.

Die Fourier-Rücktransformation einer Funktion $f \in L_2(\mathbb{R})$ wird analog als L_2 -Grenzwert der Rücktransformierten von Schwarz-Approximationen von f definiert.

Beweis: Sei (f_n) eine beliebige gegen f konvergierende Folge von Schwarz-Funktionen. Wegen der Konvergenz ist (f_n) eine Cauchy-Folge. Mit Hilfssatz 1.78 bilden die Fourier-Transformierten \widehat{f}_n wieder eine Cauchy-Folge, denn

$$\|\widehat{f}_n - \widehat{f}_m\|_2 = \|(\widehat{f_n - f_m})\|_2 = \|f_n - f_m\|_2.$$

Da $L_2(\mathbb{R})$ vollständig ist, hat die Cauchy-Folge \widehat{f}_n einen Grenzwert \widehat{f} . Dieser ist unabhängig von der Wahl der Folge (f_n) . Betrachte dazu eine weitere gegen f konvergierende Folge von Schwarz-Funktionen (g_n) . Wegen des gemeinsamen Grenzwerts ist $\|f_n - g_n\|_2$ eine Nullfolge. Mit Hilfssatz 1.78 ist damit auch $\|\widehat{f}_n - \widehat{g}_n\|_2$ eine Nullfolge, d.h., \widehat{f}_n und \widehat{g}_n konvergieren gegen den selben L_2 -Grenzwert \widehat{f} .

Betrachte $f_R \in L_2(\mathbb{R}) \cap L_1(\mathbb{R})$ mit der Eigenschaft, dass $f_R(x) = 0$ für alle $|x| > R$ gilt. Die L_1 -Definition der Fourier-Transformierten ist:

$$\widehat{f}_R(k) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f_R(x) \cdot e^{-i \cdot k \cdot x} dx = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \int_{-R}^R f_R(x) \cdot e^{-i \cdot k \cdot x} dx. \quad (\#)$$

Wir vergleichen dies mit der L_2 -Definition. Sei dazu (f_{Rn}) eine Folge von im L_2 -Sinne gegen f_R konvergierende Schwarz-Funktionen, die alle ausserhalb des Intervalls $[-R, R]$ verschwinden. Für ihre Fourier-Transformierten \widehat{f}_{Rn} gilt mit

der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung (siehe Bemerkung 1.36):

$$\begin{aligned}
|\widehat{f}_R(k) - \widehat{f_{Rn}}(k)| &\stackrel{(1.68.b)}{\leq} \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |f_R(x) - f_{Rn}(x)| dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \int_{-R}^R |f_R(x) - f_{Rn}(x)| dx \\
&\stackrel{(1.36)}{\leq} \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \sqrt{2 \cdot R \cdot \int_{-R}^R |f_R(x) - f_{Rn}(x)|^2 dx} \\
&\leq \frac{\sqrt{R}}{\sqrt{\pi}} \cdot \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |f_R(x) - f_{Rn}(x)|^2 dx} \\
&= \frac{\sqrt{R}}{\sqrt{\pi}} \cdot \|f_R - f_{Rn}\|_2,
\end{aligned}$$

also $\lim_{n \rightarrow \infty} |\widehat{f}_R(k) - \widehat{f_{Rn}}(k)| = 0$ („gleichmäßig“ in k) und damit

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} \|\widehat{f}_R - \widehat{f_{Rn}}\|_2 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f}_R(k) - \widehat{f_{Rn}}(k)|^2 dk \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} |\widehat{f}_R(k) - \widehat{f_{Rn}}(k)|^2 dk = 0.
\end{aligned}$$

Damit konvergieren die $\widehat{f_{Rn}}$ im L_2 -Sinne gegen die Fourier-Transformierte \widehat{f}_R , d.h., wir haben für $f_R \in L_1(\mathbb{R}) \cap L_2(\mathbb{R})$ gezeigt, dass die L_1 -Definition (#) der Fourier-Transformierten mit der L_2 -Definition übereinstimmt.

Sei nun ein beliebiges $f \in L_2(\mathbb{R}) \cap L_1(\mathbb{R})$ gegeben. Wähle ein $R > 0$ und betrachte

$$f_R(x) = \begin{cases} f(x) & \text{für } x \leq R, \\ 0 & \text{für } x > R. \end{cases}$$

Wie oben gezeigt wurde, ist die Fourier-Transformierte von f_R sowohl im L_1 - als auch im L_2 -Sinne durch die punktweise Definition

$$\mathcal{F}[f_R](k) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f_R(x) \cdot e^{-i \cdot k \cdot x} dx = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \int_{-R}^R f(x) \cdot e^{-i \cdot k \cdot x} dx$$

gegeben. Da im L_2 -Sinne $f_R \rightarrow f$ für $R \rightarrow \infty$, gilt gemäß der L_2 -Definition der Fourier-Transformation:

$$\mathcal{F}[f] = \lim_{R \rightarrow \infty} \mathcal{F}[f_R].$$

Dieser L_2 -Limes bedeutet punktweise, dass für fast alle $k \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\mathcal{F}[f](k) = \lim_{R \rightarrow \infty} \mathcal{F}[f_R](k) = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \int_{-R}^R f(x) \cdot e^{-i \cdot k \cdot x} dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot e^{-i \cdot k \cdot x} dx,$$

wobei das letzte Integral wegen $f \in L_1(\mathbb{R})$ für alle $k \in \mathbb{R}$ existiert.

Q.E.D.

Bemerkung 1.81: Die obige Definition der Fourier-Transformation in $L_2(\mathbb{R})$ ist wenig konstruktiv. Grob gesprochen läuft die Transformation darauf hinaus, dass

$$\mathcal{F}[f](k) = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \int_{-R}^R f(x) \cdot e^{-i \cdot k \cdot x} dx$$

bzw.

$$\mathcal{F}^{-1}[\hat{f}](x) = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \int_{-R}^R \hat{f}(k) \cdot e^{i \cdot k \cdot x} dk$$

für L_2 -Funktionen f bzw. \hat{f} zwar nicht für jedes k bzw. x existieren muss, aber zumindestens „fast überall“, d.h., für „fast alle“ k bzw. x . Dies liefert die explizite Konstruktion der Fourier-(Rück-)Transformierten.

Satz 1.82: (Invertierbarkeit der Fourier-Transformation auf $L_2(\mathbb{R})$)

Für jedes $f \in L_2(\mathbb{R})$ liegen $\mathcal{F}[f]$ und $\mathcal{F}^{-1}[f]$ wieder in $L_2(\mathbb{R})$, und es gilt

$$f = \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[f]] \quad \text{bzw.} \quad f = \mathcal{F}[\mathcal{F}^{-1}[f]].$$

Beweis: Nach Konstruktion von \mathcal{F} bzw. \mathcal{F}^{-1} gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{F}[f_n] = \mathcal{F}[\lim_{n \rightarrow \infty} f_n], \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{F}^{-1}[f_n] = \mathcal{F}^{-1}[\lim_{n \rightarrow \infty} f_n]$$

für jede in $L_2(\mathbb{R})$ konvergente Folge von Schwarz-Funktionen (f_n) . Da Schwarz-Funktionen als glatte L_1 -Funktionen durch die Rücktransformation punktweise dargestellt werden, also $f_n = \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[f_n]]$ gilt, folgt

$$f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n = \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[\lim_{n \rightarrow \infty} f_n]] = \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[f]]$$

mittels einer beliebigen gegen f konvergierenden Schwarz-Folge (f_n) . Die Aussage $f = \mathcal{F}[\mathcal{F}^{-1}[f]]$ folgt analog.

Q.E.D.

Die folgende Beziehung $\|f\|_2 = \|\hat{f}\|_2$ ist das Analogon der Parsevalschen Gleichung 1.23 für Fourier-Reihen:

Satz 1.83: (Das Plancherel-Theorem für $L_2(\mathbb{R})$)

Für jedes $f, g \in L_2(\mathbb{R})$ mit den Fourier-Transformierten $\hat{f} = \mathcal{F}[f] \in L_2(\mathbb{R})$ und $\hat{g} = \mathcal{F}[g] \in L_2(\mathbb{R})$ gilt

$$\langle f, g \rangle = \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle.$$

Mit $g = f$ folgt $\|f\|_2 = \|\hat{f}\|_2$.

Beweis: Seien (f_n) bzw. (g_n) gegen f bzw. g konvergierende Schwarz-Folgen, so dass nach Definition 1.80 ihre Fourier-Transformierten (\widehat{f}_n) bzw. (\widehat{g}_n) gegen \widehat{f} bzw. \widehat{g} konvergieren. Mit der Schwarzschen Ungleichung folgt

$$\begin{aligned} |\langle f, g \rangle - \langle f_n, g_n \rangle| &= |\langle f - f_n, g \rangle + \langle f_n, g - g_n \rangle| \\ &\leq |\langle f - f_n, g \rangle| + |\langle f_n, g - g_n \rangle| \\ &\leq \|f - f_n\|_2 \cdot \|g\|_2 + \|f_n\|_2 \cdot \|g - g_n\|_2 \rightarrow 0 \end{aligned}$$

für $n \rightarrow \infty$. Also

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle f_n, g_n \rangle = \langle f, g \rangle$$

und analog mit den selben Argumenten

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle \widehat{f}_n, \widehat{g}_n \rangle = \langle \widehat{f}, \widehat{g} \rangle.$$

Nach Hilfssatz 1.78 gilt für die Schwarz-Funktionen aber $\langle f_n, g_n \rangle = \langle \widehat{f}_n, \widehat{g}_n \rangle$, so dass die obigen Grenzwerte $\langle f, g \rangle$ und $\langle \widehat{f}, \widehat{g} \rangle$ übereinstimmen müssen.

Q.E.D.

1.4.4 Distributionen und ihre Fourier-Transformation

Wir definieren die Fourier-Transformationen für eine noch grössere Klasse von Funktionen, den „verallgemeinerten Funktionen“, auch „Distributionen“ genannt.

Definition 1.84: (Testfunktionen und Distributionen über \mathcal{S})

Eine „**Distribution**“ ist eine lineare Abbildung $T : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{C}$ über dem Raum \mathcal{S} der Testfunktion aus Definition 1.75.

Bemerkung 1.85: Man beachte $\mathcal{S} \subset L_2(\mathbb{R})$. Damit definiert jede Funktion $f \in L_2(\mathbb{R})$ eine Distribution T_f , denn das Skalarprodukt

$$T_f : \psi \in \mathcal{S} \rightarrow \langle f, \psi \rangle$$

existiert für jedes $\psi \in \mathcal{S} \subset L_2(\mathbb{R})$. Statt T_f benutzt man auch direkt das Symbol f für die Distribution, d.h., man interpretiert ein Element f des Hilbert-Raums als lineare Abbildung $\psi \rightarrow \langle f, \psi \rangle$.

Es gibt aber auch Distributionen, die nicht von Funktionen in $L_2(\mathbb{R})$ erzeugt werden:

Beispiel 1.86: a) Die Funktion $f(x) = 1 \forall x \in \mathbb{R}$ erzeugt die Distribution

$$T_f : \psi \in \mathcal{S} \rightarrow \langle 1, \psi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) dx.$$

Beachte: $f \notin L_2(\mathbb{R})$.

b) Die Sprungfunktion

$$H(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0, \\ 1 & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$$

liegt ebenfalls nicht in $L_2(\mathbb{R})$, definiert aber die Distribution

$$T_H : \psi \in \mathcal{S} \rightarrow \langle H, \psi \rangle = \int_0^{\infty} \psi(x) dx.$$

Die Funktion

$$\text{sign}(x) = 2 \cdot H(x) - 1 = \begin{cases} -1 & \text{für } x < 0, \\ 1 & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$$

definiert die Distribution

$$T_{\text{sign}} : \psi \in \mathcal{S} \rightarrow \langle \text{sign}, \psi \rangle = - \int_{-\infty}^0 \psi(x) dx + \int_0^{\infty} \psi(x) dx.$$

c) Die sogenannte „**Diracsche Delta-Distribution**“

↓4.12.02

$$\delta_{x_0} : \psi \in \mathcal{S} \rightarrow \psi(x_0)$$

wird von keiner Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ mittels

$$\langle f, \psi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(x)} \cdot \psi(x) dx = \psi(x_0) \quad \forall \psi \in \mathcal{S}$$

erzeugt. (Es müsste $f(x) = 0$ gelten für alle $x \neq x_0$. Für solch ein f würde aber $\langle f, \psi \rangle = 0$ für alle $\psi \in \mathcal{S}$ gelten). Man stellt sich δ_{x_0} trotzdem als („verallgemeinerte“) Funktion vor, die sogenannte „**Diracsche Delta-Funktion**“

$$\delta(x - x_0) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \neq x_0, \\ \infty & \text{für } x = x_0, \end{cases}$$

die nur unter dem Integral

$$\delta_{x_0}(\psi) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0) \cdot \psi(x) dx = \psi(x_0)$$

sinnvoll zu interpretieren ist, mit der man aber formal wie mit einer Funktion rechnen kann.

Definition 1.87: (Die Fourier-Transformierte einer Distribution)

Als Fourier-Transformierte $\widehat{T} = \mathcal{F}[T]$ einer Distribution T wird die Distribution

$$\widehat{T} : \widehat{\psi} \in \mathcal{S} \rightarrow T(\mathcal{F}^{-1}[\widehat{\psi}])$$

bezeichnet. Kurz: für $\widehat{\psi} = \mathcal{F}[\psi]$ gilt $\widehat{T}(\widehat{\psi}) = T(\psi)$.

Bemerkung 1.88: Für $f \in L_2(\mathbb{R})$, interpretiert als Distribution, ist mit dem Plancherel-Theorem 1.83 $\langle \widehat{f}, \widehat{\psi} \rangle = \langle f, \psi \rangle$ die Fourier-Transformierte der Distribution nichts anderes als die Fourier-Transformierte der Funktion f , interpretiert als Distribution: $\widehat{T_f} = T_{\widehat{f}}$.

Beispiel 1.89: a) Die Fourier-Transformierte der Funktion $f(x) = 1$, nach Beispiel 1.86.a) als die Distribution

$$\psi \in \mathcal{S} \rightarrow \langle 1, \psi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) dx$$

zu interpretieren, ist die Delta-Distribution $\sqrt{2 \cdot \pi} \cdot \delta_0$:

$$\sqrt{2 \cdot \pi} \cdot \delta_0(\mathcal{F}[\psi]) = \frac{\sqrt{2 \cdot \pi}}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) \cdot e^{-i \cdot k \cdot x} dx \Big|_{k=0} = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) dx = \langle 1, \psi \rangle.$$

Formal:

$$\mathcal{F}[1](k) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} 1 \cdot e^{-i \cdot k \cdot x} dx = \sqrt{2 \cdot \pi} \cdot \delta(k).$$

Merke:

$$\boxed{\frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i \cdot k \cdot x} dx = \delta(k).}$$

b) Die Fourier-Transformierte der sign-Funktion

$$T_{\text{sign}} : \psi \in \mathcal{S} \rightarrow \langle \text{sign}, \psi \rangle = - \int_{-\infty}^0 \psi(x) dx + \int_0^{\infty} \psi(x) dx$$

aus Beispiel 1.86.b) wird gesucht. Um die Wirkung von $\widehat{T_{\text{sign}}}$ auf $\widehat{\psi}$ zu ermitteln, starten wir mit der Wirkung von T_{sign} auf ψ und drücken die (glatte) Funktion ψ als Fourier-

Rücktransformierte von $\widehat{\psi}$ aus:

$$\begin{aligned}
\langle \text{sign}, \psi \rangle &= - \int_{-\infty}^0 \psi(x) dx + \int_0^{\infty} \psi(x) dx = \int_0^{\infty} (\psi(x) - \psi(-x)) dx \\
&= \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \left(\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\psi}(k) \cdot e^{i \cdot k \cdot x} dk - \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\psi}(k) \cdot e^{i \cdot k \cdot (-x)} dk \right) dx \\
&= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\psi}(k) \cdot \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot (e^{i \cdot k \cdot x} - e^{-i \cdot k \cdot x}) dk dx \\
&= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\psi}(k) \cdot \underbrace{\left(\int_0^R \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot (e^{i \cdot k \cdot x} - e^{-i \cdot k \cdot x}) dx \right)}_{\substack{= \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \left[\frac{e^{i \cdot k \cdot x} + e^{-i \cdot k \cdot x}}{i \cdot k} \right]_{x=0}^{x=R} \\ = \frac{2}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \left(\frac{\cos(R \cdot k)}{i \cdot k} - \frac{1}{i \cdot k} \right)}} dk \\
&= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\psi}(k) \cdot \frac{2}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \left(\frac{\cos(R \cdot k)}{i \cdot k} - \frac{1}{i \cdot k} \right) dk \\
&= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\widehat{\psi}(k) - \widehat{\psi}(-k)}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \left(\frac{\cos(R \cdot k)}{i \cdot k} - \frac{1}{i \cdot k} \right) dk \\
&= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\widehat{\psi}(k) - \widehat{\psi}(-k)}{\sqrt{2 \cdot \pi} \cdot i \cdot k} \cdot \cos(R \cdot k) dk + \frac{i}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\widehat{\psi}(k) - \widehat{\psi}(-k)}{k} dk.
\end{aligned}$$

Man beachte, dass für die glatte Funktion $\widehat{\psi}$ am Nullpunkt $\widehat{\psi}(k) - \widehat{\psi}(-k) \approx 2 \cdot \widehat{\psi}'(0) \cdot k$ gilt, also $(\widehat{\psi}(k) - \widehat{\psi}(-k))/k$ am Punkt $k = 0$ keine Singularität hat. Über das Riemann–Lebesgue–Lemma 1.68.c) verschwindet der Grenzwert des ersten Integrals und es verbleibt die Distribution

$$\widehat{T_{\text{sign}}} : \widehat{\psi} \in \mathcal{S} \rightarrow \frac{i}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\widehat{\psi}(k) - \widehat{\psi}(-k)}{k} dk$$

als Fourier–Transformation von T_{sign} . Zuletzt wollen wir diesen Ausdruck noch in der Form $\int_{-\infty}^{\infty} \overline{T_{\text{sign}}(k)} \cdot \widehat{\psi}(k) dk$ schreiben, um T_{sign} als (verallgemeinerte) Funktion in k interpretieren zu können. Dabei müssen wir an der Stelle $k = 0$ etwas vorsichtig sein, da $\widehat{\psi}(k)/k$ für Funktionen mit $\widehat{\psi}(0) \neq 0$ eine nicht integrierbare Singularität hat:

$$\begin{aligned}
\widehat{T_{\text{sign}}}(\widehat{\psi}) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{i}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \left(\int_{-\infty}^{-\epsilon} \frac{\widehat{\psi}(k) - \widehat{\psi}(-k)}{k} dk + \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{\widehat{\psi}(k) - \widehat{\psi}(-k)}{k} dk \right) \\
&= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{2 \cdot i}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \left(\int_{-\infty}^{-\epsilon} \frac{\widehat{\psi}(k)}{k} dk + \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{\widehat{\psi}(k)}{k} dk \right) = \frac{2}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\left(\frac{-i}{k} \right)} \cdot \widehat{\psi}(k) dk.
\end{aligned}$$

Ergebnis: als Funktion ist die Distribution gegeben durch:

$$\widehat{T_{\text{sign}}}(k) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \frac{2}{i \cdot k}.$$

Rechnet man mit dieser Funktion, muss man darauf achten, dass Integrale um die Singularität bei $k = 0$ als sogenannter „Cauchy-Hauptwert“ zu nehmen sind (damit ist der obige Limes $\epsilon \rightarrow \infty$ gemeint, der durch das Symbol $f_{-\infty}^{\infty}$ angedeutet wird).

c) Die Fourier-Transformierte $\widehat{\delta_{x_0}}$ der Delta-Distribution $\delta_{x_0} : \psi \in \mathcal{S} \rightarrow \psi(x_0)$ wird gesucht. Um die Wirkung von $\widehat{\delta_{x_0}}$ auf $\widehat{\psi}$ zu ermitteln, starten wir mit der Wirkung von δ_{x_0} auf ψ und drücken die (glatte) Funktion ψ als Fourier-Rücktransformierte von $\widehat{\psi}$ aus:

$$\begin{aligned} \delta_{x_0}(\psi) &= \psi(x_0) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\psi}(k) \cdot e^{i \cdot k \cdot x} dk \Big|_{x=x_0} = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\psi}(k) \cdot e^{i \cdot k \cdot x_0} dk \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{e^{i \cdot k \cdot x_0}}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \right) \cdot \widehat{\psi}(k) dk = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{e^{-i \cdot k \cdot x_0}}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \right) \cdot \widehat{\psi}(k) dk = \left\langle \frac{e^{-i \cdot k \cdot x_0}}{\sqrt{2 \cdot \pi}}, \widehat{\psi} \right\rangle. \end{aligned}$$

Ergebnis: Die Fourier-Transformierte der Delta-Distribution δ_{x_0} ist die Funktion $\widehat{\delta_{x_0}}(k) = e^{-i \cdot k \cdot x_0} / \sqrt{2 \cdot \pi}$. Dies ist sehr leicht zu merken, indem man die Delta-Distribution δ_{x_0} wie eine Funktion $\delta(x - x_0)$ behandelt und formal rechnet:

$$\widehat{\delta_{x_0}}(k) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0) \cdot e^{-i \cdot k \cdot x_0} dx = \frac{e^{-i \cdot k \cdot x_0}}{\sqrt{2 \cdot \pi}}.$$

6.12.02↓

1.4.5 Die Unschärferelation

Der quantenmechanische Zustand eines physikalischen Systems wird durch eine L_2 -Funktion ψ beschrieben. Die physikalischen Observablen entsprechen selbstadjungierten Operatoren $A : L_2 \rightarrow L_2$:

Definition 1.90: (Selbstadjungierte Operatoren auf $L_2(\mathbb{R})$)

Der „adjungierte“ („transponierte“) Operator A^* eines linearen Operators $A : L_2(\mathbb{R}) \rightarrow L_2(\mathbb{R})$ ist definiert durch

$$\langle A^* \phi, \psi \rangle = \langle \phi, A \psi \rangle$$

für alle $\phi, \psi \in L_2(\mathbb{R})$. Ein Operator mit $A = A^*$ heißt „selbstadjungiert“.

Beispiel 1.91: a) Der „Ortsoperator“ $x : \psi(x) \rightarrow x \cdot \psi(x)$ ist definiert auf einem dichten Teilraum von $L_2(\mathbb{R})$ (nämlich für diejenigen $\psi \in L_2(\mathbb{R})$, die so schnell im Unendlichen abfallen, dass $x \cdot \psi$ wieder in $L_2(\mathbb{R})$ liegt). Der Ortsoperator ist selbstadjungiert:

$$\langle \phi, x \cdot \psi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\phi(x)} \cdot x \cdot \psi(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \overline{\phi(x)} \cdot \psi(x) dx = \langle x \cdot \phi, \psi \rangle.$$

b) Der „Impulsoperator“² $-i \cdot \frac{d}{dx} : \psi(x) \rightarrow -i \cdot \psi'(x)$ ist definiert auf einem dichten Teilraum von $L_2(\mathbb{R})$ (nämlich für diejenigen $\psi \in L_2(\mathbb{R})$, deren Ableitung existiert und wieder in $L_2(\mathbb{R})$ liegt). Der Impulsoperator ist selbstadjungiert. Partielle Integration liefert nämlich:

$$\begin{aligned} \langle \phi, (-i) \cdot \frac{d}{dx} \psi \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\phi(x)} \cdot (-i) \cdot \psi'(x) dx \\ &= \underbrace{\left[\overline{\phi(x)} \cdot (-i) \cdot \psi(x) \right]_{x=-\infty}^{x=\infty}}_{=0} - \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\phi'(x)} \cdot (-i) \cdot \psi(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \overline{(-i) \cdot \phi'(x)} \cdot \psi(x) dx = \left\langle (-i) \cdot \frac{d}{dx} \phi, \psi \right\rangle. \end{aligned}$$

Definition 1.92: (Die Streuung von Observablen)

Ein physikalischer Messwert einer dem Operator A entsprechenden Observablen eines Systems im Zustand $\psi \in L_2(\mathbb{R})$ hat den „Erwartungswert“

$$\langle A \rangle = \frac{\langle \psi, A\psi \rangle}{\langle \psi, \psi \rangle}$$

und die „Streuung“ („Unschärfe“) $\Delta A \geq 0$ definiert durch

$$(\Delta A)^2 = \langle (A - \langle A \rangle)^2 \rangle = \frac{\langle \psi, (A - \langle A \rangle)^2 \psi \rangle}{\langle \psi, \psi \rangle}.$$

Satz 1.93: (Die Heisenbergsche Unschärferelation)

Für selbstadjungierte Operatoren A, B gilt für jedes $\psi \in L_2(\mathbb{R})$, $\psi \neq 0$:

$$\Delta A \cdot \Delta B \geq \frac{1}{2} \cdot \frac{|\langle \psi, (AB - BA)\psi \rangle|}{\langle \psi, \psi \rangle}.$$

Beweis: Setze $X = A - \langle A \rangle$, $Y = B - \langle B \rangle$. Diese Operatoren sind wieder selbstadjungiert. Mit der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung 1.5 ergibt sich

$$\begin{aligned} (\Delta A)^2 \cdot (\Delta B)^2 &= \frac{\langle \psi, X^2 \psi \rangle}{\langle \psi, \psi \rangle} \cdot \frac{\langle \psi, Y^2 \psi \rangle}{\langle \psi, \psi \rangle} = \frac{\langle X\psi, X\psi \rangle}{\langle \psi, \psi \rangle} \cdot \frac{\langle Y\psi, Y\psi \rangle}{\langle \psi, \psi \rangle} \\ &\geq \frac{|\langle X\psi, Y\psi \rangle|^2}{\langle \psi, \psi \rangle^2} = \frac{|\langle \psi, XY\psi \rangle|^2}{\langle \psi, \psi \rangle^2}. \end{aligned}$$

²Eigentlich ist der Impulsoperator $-i \cdot \hbar \cdot \frac{d}{dx}$. Wir setzen hier das Plancksche Wirkungsquantum \hbar auf 1.

Wir wollen $\langle \psi, XY\psi \rangle$ in Real- und Imaginärteil zerlegen und beobachten zunächst, dass mit der Selbstadjungiertheit der Operatoren X, Y gilt:

$$\begin{aligned} \langle \psi, (XY \pm YX)\psi \rangle &= \langle \psi, XY\psi \rangle \pm \langle \psi, YX\psi \rangle = \langle Y^*X^*\psi, \psi \rangle \pm \langle X^*Y^*\psi, \psi \rangle \\ &= \langle YX\psi, \psi \rangle \pm \langle XY\psi, \psi \rangle = \langle (YX \pm XY)\psi, \psi \rangle = \overline{\langle \psi, (YX \pm XY)\psi \rangle}, \end{aligned}$$

also

$$\langle \psi, (XY \pm YX)\psi \rangle = \pm \overline{\langle \psi, (XY \pm XY)\psi \rangle}.$$

Damit ist

$$\langle \psi, (XY + YX)\psi \rangle = \overline{\langle \psi, (XY + YX)\psi \rangle}$$

reell und

$$\langle \psi, (XY - YX)\psi \rangle = -\overline{\langle \psi, (XY - YX)\psi \rangle}$$

imaginär. Es folgt die Zerlegung von $\langle \psi, XY\psi \rangle$ in Real- und Imaginärteil:

$$\begin{aligned} \langle \psi, XY\psi \rangle &= \langle \psi, \left(\frac{XY + YX}{2} + \frac{XY - YX}{2} \right) \psi \rangle \\ &= \underbrace{\langle \psi, \frac{XY + YX}{2} \psi \rangle}_{\Re(\langle \psi, XY\psi \rangle)} + \underbrace{\langle \psi, \frac{XY - YX}{2} \psi \rangle}_{i \cdot \Im(\langle \psi, XY\psi \rangle)}, \end{aligned}$$

also

$$|\langle \psi, XY\psi \rangle|^2 = \left| \langle \psi, \frac{XY + YX}{2} \psi \rangle \right|^2 + \left| \langle \psi, \frac{XY - YX}{2} \psi \rangle \right|^2 \geq \left| \langle \psi, \frac{XY - YX}{2} \psi \rangle \right|^2.$$

Letztlich folgt mit $XY - YX = (A - \langle A \rangle)(B - \langle B \rangle) - (B - \langle B \rangle)(A - \langle A \rangle) = AB - BA$:

$$\Delta A \cdot \Delta B \geq \frac{|\langle \psi, XY\psi \rangle|}{\langle \psi, \psi \rangle} \geq \frac{|\langle \psi, \frac{XY - YX}{2} \psi \rangle|}{\langle \psi, \psi \rangle} = \frac{1}{2} \cdot \frac{|\langle \psi, (AB - BA)\psi \rangle|}{\langle \psi, \psi \rangle}.$$

Q.E.D.

Für $A = \text{Ortsoperator} = x$ und $B = \text{Impulsoperator} = p = -i \cdot \frac{d}{dx}$ folgt mit

$$(AB - BA)\psi = x \cdot (-i) \cdot \frac{d}{dx} \psi(x) + i \cdot \frac{d}{dx} (x \cdot \psi(x)) = i \cdot \psi(x)$$

die Unschärferelation für das Paar Ort/Impuls:

$$\boxed{\Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{1}{2} \cdot \frac{|\langle \psi, i \cdot \psi \rangle|}{\langle \psi, \psi \rangle} = \frac{1}{2}.}$$

Der Zusammenhang mit der Fourier-Transformation ergibt sich durch die Beobachtung aus Satz 1.72:

$$\mathcal{F}[-i \cdot f'](k) = k \cdot \mathcal{F}[f](k),$$

d.h., der Impulsoperator im Ortsraum (i.W. die Ableitung) wird zum „Ortsoperator“ (Multiplikation mit der Frequenz k) im Fourier-Raum.

Satz 1.94: (Die Unschärferelation für Fourier-Paare)

Seien $f, x \cdot f, x^2 \cdot f \in L_2(\mathbb{R})$. Für $\widehat{f}(k) = \mathcal{F}[f](k)$ gelte $\widehat{f}, k \cdot \widehat{f}, k^2 \cdot \widehat{f} \in L_2(\mathbb{R})$. Definiere $\Delta x \geq 0, \Delta k \geq 0$ über

$$(\Delta x)^2 = \frac{\langle f, (x - \langle x \rangle)^2 \cdot f \rangle}{\langle f, f \rangle}, \quad (\Delta k)^2 = \frac{\langle \widehat{f}, (k - \langle k \rangle)^2 \cdot \widehat{f} \rangle}{\langle \widehat{f}, \widehat{f} \rangle}$$

mit $\langle x \rangle = \frac{\langle f, x \cdot f \rangle}{\langle f, f \rangle}, \langle k \rangle = \frac{\langle \widehat{f}, k \cdot \widehat{f} \rangle}{\langle \widehat{f}, \widehat{f} \rangle}$. Es gilt: $\Delta x \cdot \Delta k \geq \frac{1}{2}$.

Beweis: Wir setzen $B = -i \cdot \frac{d}{dx}$. Mit dem Plancherel-Theorem 1.83 gilt

$$\langle B \rangle = \frac{\langle f, Bf \rangle}{\langle f, f \rangle} = \frac{\langle f, -if' \rangle}{\langle f, f \rangle} = \frac{\langle \widehat{f}, \widehat{(-if')} \rangle}{\langle \widehat{f}, \widehat{f} \rangle} \stackrel{(*)}{=} \frac{\langle \widehat{f}, k \cdot \widehat{f} \rangle}{\langle \widehat{f}, \widehat{f} \rangle} = \langle k \rangle,$$

wobei in (*) Satz 1.72 benutzt wurde: $\mathcal{F}[-i \cdot f'](k) = k \cdot \widehat{f}(k)$. Mit $(k - \langle k \rangle) \cdot \widehat{f}(k) = \mathcal{F}[(B - \langle B \rangle)f](k)$ ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{\langle \widehat{f}, (k - \langle k \rangle)^2 \cdot \widehat{f} \rangle}{\langle \widehat{f}, \widehat{f} \rangle} &= \frac{\langle (k - \langle k \rangle) \cdot \widehat{f}, (k - \langle k \rangle) \cdot \widehat{f} \rangle}{\langle \widehat{f}, \widehat{f} \rangle} \\ &= \frac{\langle \mathcal{F}[(B - \langle B \rangle)f], \mathcal{F}[(B - \langle B \rangle)f] \rangle}{\langle \widehat{f}, \widehat{f} \rangle} = \frac{\langle (B - \langle B \rangle)f, (B - \langle B \rangle)f \rangle}{\langle f, f \rangle} \\ &= \frac{\langle f, (B - \langle B \rangle)^2 f \rangle}{\langle f, f \rangle}. \end{aligned}$$

Also: $(\Delta k)^2 = (\Delta B)^2$. Mit $A: f(x) \rightarrow x \cdot f(x)$ gilt $(\Delta x)^2 = (\Delta A)^2$. Mit

$$(AB - BA)f(x) = x \cdot (-i) \frac{d}{dx} f(x) + i \cdot \frac{d}{dx} (x \cdot f(x)) = i \cdot f(x)$$

liefert die Heisenbergsche Unschärferelation 1.93: $\Delta x \cdot \Delta k = \frac{1}{2} \cdot \frac{|\langle f, i \cdot f \rangle|}{\langle f, f \rangle} = \frac{1}{2}$.
Q.E.D.

Bemerkung 1.95: Das Gleichheitszeichen in der obigen Unschärferelation gilt nur für Funktionen der Form

$$f(x) = \text{const} \cdot e^{i \cdot k_0 \cdot x} \cdot e^{-\lambda \cdot (x - x_0)^2 / 2}$$

(d.h., $|f|$ ist eine Gauss-Glocke) mit den Fourier-Transformierten

$$\widehat{f}(k) = \frac{\text{const}}{\sqrt{|\lambda|}} \cdot e^{-i \cdot (k - k_0) \cdot x_0} \cdot e^{-(k - k_0)^2 / (2 \cdot \lambda)}.$$

Hierbei sind x_0, k_0, λ beliebige reelle Werte; es gilt

$$\langle x \rangle = x_0, \quad \langle k \rangle = k_0, \quad \Delta x = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot |\lambda|}}, \quad \Delta k = \frac{\sqrt{|\lambda|}}{\sqrt{2}}.$$

Begründung: Der Beweis der Unschärferelation 1.93 benutzt die Cauchy-Schwarze Ungleichung für $\langle (A - \langle A \rangle)f, (B - \langle B \rangle)f \rangle$, die genau dann zur Gleichheit wird, wenn $(B - \langle B \rangle)f$ und $(A - \langle A \rangle)f$ proportional sind. Der Proportionalitätsfaktor $i \cdot \lambda$ wird mit $\lambda \in \mathbb{R}$ als imaginär angesetzt, sonst gibt es keine L_2 -Lösungen. Die Funktionen mit minimalem Unschärfeprodukt sind also durch die DGL

$$(B - \langle B \rangle)f = i \cdot \lambda \cdot (A - \langle A \rangle)f$$

bestimmt, also

$$-i \cdot f'(x) - k_0 \cdot f(x) = i \cdot \lambda \cdot (x - x_0) \cdot f(x),$$

wobei $k_0 = \langle B \rangle = \langle k \rangle$, $x_0 = \langle A \rangle = \langle x \rangle$. Die Lösungen der DGL

$$f'(x) - i \cdot k_0 \cdot f(x) = -\lambda \cdot (x - x_0) \cdot f(x)$$

sind die Funktionen

$$f(x) = \text{const} \cdot e^{i \cdot k_0 \cdot x} \cdot e^{-\lambda \cdot (x - x_0)^2 / 2},$$

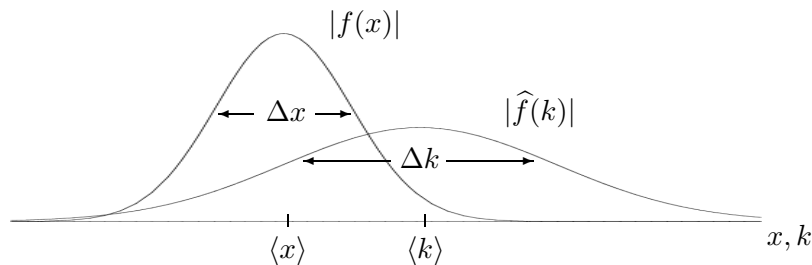
für die sich in der Tat

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot |f(x)|^2 dx = x_0, \quad \langle k \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} k \cdot |\widehat{f}(k)|^2 dk = k_0$$

und die angegebenen Werte für $\Delta x, \Delta k$ ergeben.

Interpretation 1.96:

Der Wert $\langle x \rangle$ ist der „Schwerpunkt“ des Signals $f(x)$ längs der x -Achse, der Wert Δx die „Breite“ des Signals. Analog sind $\langle k \rangle$ und Δk der Schwerpunkt bzw. die Breite der Fourier-Transformierten $\widehat{f}(k)$ längs der k -Achse.



Die Unschärferelation besagt, dass die Breite nicht gleichzeitig sowohl im Urbildbereich als auch im Bildbereich der Fourier–Transformation klein sein kann. Ist ein Signal „örtlich“ (bzgl. x) lokalisiert (Δx klein), so ist es im Frequenzbereich notwendigerweise gestreut (Δk gross) und umgekehrt. Die Unschärferelation quantifiziert das Grundprinzip, das wir schon im Skalierungssatz 1.68.d) kennengelernt hatten: wird das Signal $f(x)$ durch eine geeignete Wahl des Skalierungsparameters im Ortsraum schmal gemacht, verbreitert sich automatisch die Fourier–Transformierte $\hat{f}(k)$.

1.4.6 Zusammenfassung

Wir tragen die wesentlichen Eigenschaften/Rechenregeln für die Fourier–(Rück–)Transformation

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f](k) &= \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot e^{-i \cdot k \cdot x} dx, \\ \mathcal{F}^{-1}[\hat{f}](k) &= \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) \cdot e^{i \cdot k \cdot x} dk\end{aligned}$$

zusammen. Mit

$$\mathcal{F}^{-1}[f](\kappa) = \mathcal{F}[f](-\kappa)$$

können wir uns dabei auf die Eigenschaften der Fourier–Transformation beschränken. Die folgenden Regeln wurden in den früheren Abschnitten oder in Übungsaufgaben bewiesen:

Verschiebung im Ortsraum:

$$\mathcal{F}[f(x - x_0)](k) = e^{-i \cdot k \cdot x_0} \cdot \mathcal{F}[f(x)](k).$$

Modulation einer Trägerfrequenz k_0 :

$$\mathcal{F}[e^{i \cdot k_0 \cdot x} \cdot f(x)](k) = \mathcal{F}[f(x)](k - k_0).$$

Skalierung:

$$\mathcal{F}[f(\lambda \cdot x)](k) = \frac{1}{|\lambda|} \cdot \mathcal{F}[f(x)]\left(\frac{k}{\lambda}\right).$$

Ableitung im Ortsraum:

$$\mathcal{F}[f^{(n)}(x)](k) = (i \cdot k)^n \cdot \mathcal{F}[f(x)](k).$$

Ableitung im Fourier–Raum:

$$\mathcal{F}[x^n \cdot f(x)](k) = i^n \cdot \frac{d^n}{dk^n} \mathcal{F}[f(x)](k).$$

Integration im Ortsraum:

$$\mathcal{F}\left[\int_{-\infty}^x f(\xi) d\xi\right](k) = \frac{1}{i \cdot k} \cdot \mathcal{F}[f(x)](k) + \pi \cdot \mathcal{F}[f(x)](0) \cdot \delta(k).$$

Glättung im Ortsraum:

$$\mathcal{F}\left[\frac{1}{2L} \int_{x-L}^{x+L} f(\xi) d\xi\right](k) = \frac{\sin(k \cdot L)}{k \cdot L} \cdot \mathcal{F}[f(x)](k).$$

Produkt im Ortsraum = Faltung im Frequenzraum:

$$\mathcal{F}[f(x) \cdot g(x)](k) \stackrel{(*)}{=} \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot (\mathcal{F}[f] * \mathcal{F}[g])(k).$$

Faltung im Ortsraum = Produkt im Frequenzraum:

$$\mathcal{F}[(f * g)(x)](k) \stackrel{(*)}{=} \sqrt{2 \cdot \pi} \cdot \mathcal{F}[f](k) \cdot \mathcal{F}[g](k).$$

Hierbei steht in (*) das Symbol $f * g$ für die Faltung

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x - y) \cdot g(y) dy$$

zweier Funktionen (vergleiche Aufgabe 33), während $f(x) \cdot g(x)$ die durch punktweise Multiplikation entstehende Funktion ist.

Eine sehr wichtige Formel:

$$\frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i \cdot (k - k_0) \cdot x} dx = \delta(k - k_0).$$

Einige wichtige Fourier-Transformationen:

$$\mathcal{F}[\delta(x - x_0)](k) = e^{-i \cdot k \cdot x_0}.$$

$$\mathcal{F}[1](k) = \sqrt{2 \cdot \pi} \cdot \delta(k).$$

$$\mathcal{F}[e^{i \cdot k_0 \cdot x}](k) = \sqrt{2 \cdot \pi} \cdot \delta(k - k_0).$$

$$\mathcal{F}[\sin(k_0 \cdot x)](k) = i \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot (\delta(k + k_0) - \delta(k - k_0)).$$

$$\mathcal{F}[\cos(k_0 \cdot x)](k) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot (\delta(k + k_0) + \delta(k - k_0)).$$

$$\mathcal{F}[H(x)](k) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \frac{1}{i \cdot k} + \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \delta(k).$$

Hierbei ist H die Sprungfunktion $H(x) = 0$ für $x < 0$, $H(x) = 1$ für $x \geq 0$.

Kapitel 2

Sturm–Liouville–Probleme

Die Fourier–Entwicklungen des ersten Kapitels sind nur ein spezielles Beispiel einer allgemeineren Struktur: Entwicklung nach den Eigenfunktionen von Operatoren. Zur Erinnerung an den endlich–dimensionalen Fall: Eine symmetrische (bzw. hermitesche) Matrix $n \times n$ –Matrix hat nur reelle Eigenwerte und stets eine vollständige Basis von Eigenvektoren, die den \mathbb{R}^n (bzw. \mathbb{C}^n) aufspannen. Symmetrie (= Selbstadjungiertheit) ist dabei eine wesentliche Eigenschaft.

2.1 Das Eigenwertproblem

Wir erinnern an das Konzept 1.90 des adjungierten Operators bzw. der Selbstadjungiertheit, wobei wir nun speziell die gewichteten L_{2w} –Räume 1.12 betrachten:

Der „adjungierte“ („transponierte“) Operator A^* eines linearen Operators $A : L_{2w}([a, b]) \rightarrow L_{2w}([a, b])$ ist definiert durch

$$\langle A^* \phi, \psi \rangle_w = \langle \phi, A \psi \rangle_w$$

für alle $\phi, \psi \in L_{2w}([a, b])$. Ein Operator mit $A = A^*$ heißt „selbstadjungiert“.

Bezeichnung 2.1:

Für das Skalarprodukt $\int_a^b w(x) \cdot \overline{\phi(x)} \cdot \psi(x) dx$ mit nichttrivialelem Gewicht $w \neq 1$ benutzen wir nun das Symbol $\langle \phi, \psi \rangle_w$. Für $w \equiv 1$ benutzen wir $\langle \phi, \psi \rangle$.

Beispiel 2.2: Betrachte die Gewichtsfunktion $w(x) = 1$. Auf dem Unterraum

$$L_2^{(0)}([a, b]) = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}; f \text{ ist 2-fach stetig diff'bar; } f(a) = 0, f(b) = 0, \int_a^b |f(x)|^2 dx < \infty\}$$

des $L_2([a, b])$ ist der Operator

$$L = -\frac{d^2}{dx^2}$$

selbstadjungiert:

$$\langle \phi, L\psi \rangle = -\int_a^b \overline{\phi(x)} \cdot \psi''(x) dx = -\left[\overline{\phi(x)} \cdot \psi'(x) \right]_{x=a}^{x=b} + \int_a^b \overline{\phi'(x)} \cdot \psi'(x) dx,$$

$$\langle L\phi, \psi \rangle = -\int_a^b \overline{\phi''(x)} \cdot \psi(x) dx = -\left[\overline{\phi'(x)} \cdot \psi(x) \right]_{x=a}^{x=b} + \int_a^b \overline{\phi'(x)} \cdot \psi'(x) dx,$$

Diese Werte stimmen überein, denn die Randterme verschwinden auf $L_2^{(0)}$.

Definition 2.3:

Sei L ein auf einem geeigneten (dichten) Unterraum $L_{2w}^{(0)}([a, b])$ des $L_{2w}([a, b])$ definierter Operator. Eine Funktion $\psi \in L_{2w}^{(0)}([a, b])$, $\psi \neq 0$, mit $L\psi = \lambda \cdot \psi$ heisst „**Eigenvektor**“ oder auch „**Eigenfunktion**“ von L zum „**Eigenwert**“ $\lambda \in \mathbb{C}$.

Satz 2.4:

Für einen selbstadjungierten Operator auf L_{2w} gilt:

- a) Alle Eigenwerte sind reell.
- b) Eigenfunktionen zu unterschiedlichen Eigenwerten sind orthogonal.

Beweis: a) Aus $L\psi = \lambda \cdot \psi$ folgt

$$\lambda = \frac{\langle \psi, L\psi \rangle_w}{\langle \psi, \psi \rangle_w} \stackrel{(1)}{=} \frac{\overline{\langle L\psi, \psi \rangle_w}}{\langle \psi, \psi \rangle_w} \stackrel{(2)}{=} \frac{\overline{\langle \psi, L\psi \rangle_w}}{\langle \psi, \psi \rangle_w} = \bar{\lambda}.$$

Hierbei wurde in (1) die Identität $\langle f, g \rangle_w = \overline{\langle g, f \rangle_w}$ benutzt, in (2) die Selbstadjungiertheit von L .

b) Sei $L\phi = \lambda \cdot \phi$, $L\psi = \mu \cdot \psi$ mit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$:

$$(\lambda - \mu) \cdot \langle \phi, \psi \rangle_w = \langle \lambda \cdot \phi, \psi \rangle_w - \langle \phi, \mu \cdot \psi \rangle_w = \langle L\phi, \psi \rangle_w - \langle \phi, L\psi \rangle_w = 0.$$

Für $\lambda \neq \mu$ folgt $\langle \phi, \psi \rangle_w = 0$.

Q.E.D.

Beispiel 2.5: Betrachte die triviale Gewichtsfunktion $w(x) = 1$ und $L_2([0, 1])$. Für $L = -\frac{d}{dx^2}$ auf dem Unterraum

$$L_2^{(0)}([0, 1]) = \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}; f \text{ ist 2-fach stetig diff'bar; } f(0) = 0, f(1) = 0\}$$

folgt (zunächst ohne die Randbedingungen):

$$-\psi''(x) = \lambda \cdot \psi(x) \quad \Rightarrow \quad \psi(x) = \alpha \cdot \sin(\sqrt{\lambda} \cdot x) + \beta \cdot \cos(\sqrt{\lambda} \cdot x).$$

Berücksichtigung der Randbedingungen:

$$\begin{aligned} \psi(0) = 0 &\Rightarrow \beta = 0, \\ \psi(1) = 0 &\Rightarrow \alpha \cdot \sin(\sqrt{\lambda}) = 0 \Rightarrow \sqrt{\lambda} = k \cdot \pi, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

(Beachte hierbei, dass $\alpha = 0$ völlig uninteressant ist, da dies nur zu den trivialen Lösungen $\psi(x) = 0$ führen würde.) Da k und $-k$ auf die selben Eigenfunktionen führen (bis auf ein Vorzeichen), braucht nur $k \in \mathbb{N}$ betrachtet zu werden ($k = 0$ führt zu $\psi(x) = 0$). Ergebnis:

$$\begin{aligned} \text{Eigenwerte:} \quad \lambda_k &= k^2 \cdot \pi^2, \quad k \in \mathbb{N}, \\ \text{Eigenvektoren:} \quad \psi_k(x) &= \sin(k \cdot \pi \cdot x). \end{aligned}$$

Die Orthogonalität der Eigenfunktionen ist leicht explizit überprüft:

$$\int_0^1 \sin(k \cdot \pi \cdot x) \cdot \sin(\tilde{k} \cdot \pi \cdot x) \, dx = \frac{\tilde{k} \cdot \cos(\tilde{k} \cdot \pi) \cdot \sin(k \cdot \pi) - k \cdot \cos(k \cdot \pi) \cdot \sin(\tilde{k} \cdot \pi)}{\pi \cdot (k^2 - \tilde{k}^2)} = 0$$

für $k, \tilde{k} \in \mathbb{N}, k \neq \tilde{k}$. Eine für die Intuition wichtige Beobachtung:

Die Diskretisierung von Eigenwerten entsteht durch die Randbedingungen.

Wir werden nun das Eigenwertproblem zu linearen Differentialoperatoren zweiter Ordnung diskutieren, die auf einem L_2 -Unterraum zweifach differenzierbarer Funktionen mit homogenen Randbedingungen betrachtet werden.

Satz 2.6: (Selbstadjungiertheit von Differentialoperatoren)

Es seien $A(x), B(x), C(x)$ reelle, glatte Funktionen. Der Differentialoperator

$$L = -A(x) \cdot \frac{d^2}{dx^2} - B(x) \cdot \frac{d}{dx} + C(x) :$$

$$\psi(x) \rightarrow -A(x) \cdot \psi''(x) - B(x) \cdot \psi'(x) + C(x) \cdot \psi(x),$$

definiert auf dem Intervall $[a, b]$ mit den Randbedingungen

$$\alpha_1 \cdot \psi(a) + \alpha_2 \cdot \psi'(a) = 0, \quad \beta_1 \cdot \psi(b) + \beta_2 \cdot \psi'(b) = 0$$

(mit $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}$, $|\alpha_1| + |\alpha_2| \neq 0$, $|\beta_1| + |\beta_2| \neq 0$) ist selbstadjungiert bezüglich des Skalarprodukts $\langle \phi, \psi \rangle_w = \int_a^b w(x) \cdot \overline{\phi(x)} \cdot \psi(x) dx$ mit der Gewichtsfunktion

$$w(x) = \exp \left(\underbrace{\int^x \frac{B(\xi) - A'(\xi)}{A(\xi)} d\xi}_{\text{Stammfunktion}} \right).$$

Die Eigenwerte von L sind dementsprechend reell, die Eigenfunktionen sind orthogonal bezüglich dieses Skalarprodukts.

13.12.02↓

Beweis: Seien ϕ und ψ Funktionen, die den Randbedingungen genügen. Es folgt

$$\begin{pmatrix} \overline{\phi(a)} & \overline{\phi'(a)} \\ \overline{\psi(a)} & \overline{\psi'(a)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{\phi(b)} & \overline{\phi'(b)} \\ \overline{\psi(b)} & \overline{\psi'(b)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Da die Vektoren (α_1, α_2) , (β_1, β_2) nicht verschwinden, müssen die Determinanten¹ der Matrizen verschwinden:

$$\Rightarrow \overline{\phi(a)} \cdot \overline{\psi'(a)} - \overline{\phi'(a)} \cdot \overline{\psi(a)} = \overline{\phi(b)} \cdot \overline{\psi'(b)} - \overline{\phi'(b)} \cdot \overline{\psi(b)} = 0.$$

Es gilt die „Lagrange-Identität“:

$$w \cdot \left(\overline{\phi} \cdot L\psi - \psi \cdot L\overline{\phi} \right) = \frac{d}{dx} \left(-A \cdot w \cdot (\overline{\phi} \cdot \psi' - \overline{\phi}' \cdot \psi) \right),$$

die leicht nachzurechnen ist:

$$\begin{aligned} w \cdot \left(\overline{\phi} \cdot L\psi - \psi \cdot L\overline{\phi} \right) &= w \cdot \left(\overline{\phi} \cdot (-A \cdot \psi'' - B \cdot \psi' + C \cdot \psi) - (-A \cdot \overline{\phi}'' - B \cdot \overline{\phi}' + C \cdot \overline{\phi}) \cdot \psi \right) \\ &= -A \cdot w \cdot (\overline{\phi} \cdot \psi'' - \overline{\phi}'' \cdot \psi) - B \cdot w \cdot (\overline{\phi} \cdot \psi' - \overline{\phi}' \cdot \psi), \\ \frac{d}{dx} \left(-A \cdot w \cdot (\overline{\phi} \cdot \psi' - \overline{\phi}' \cdot \psi) \right) &= - \underbrace{(A \cdot w)'}_{=B \cdot w} \cdot (\overline{\phi} \cdot \psi' - \overline{\phi}' \cdot \psi) - A \cdot w \cdot (\overline{\phi} \cdot \psi'' - \overline{\phi}'' \cdot \psi). \end{aligned}$$

Aus der Definition des Gewichts folgt dabei:

$$w' = \frac{B - A'}{A} \cdot w \quad \Rightarrow \quad A \cdot w' + w \cdot A' = B \cdot w \quad \Rightarrow \quad (A \cdot w)' = B \cdot w.$$

Durch Integration der Lagrange-Identität folgt

$$\langle \phi, L\psi \rangle_w - \langle L\phi, \psi \rangle_w = \int_a^b w \cdot \left(\overline{\phi} \cdot L\psi - \psi \cdot L\overline{\phi} \right) dx$$

¹Die Determinante $\overline{\phi(x)} \cdot \psi'(x) - \overline{\phi'(x)} \cdot \psi(x)$ nennt man „die von $\overline{\phi}$ und ψ erzeugte Wronski-Determinante“.

$$= \int_a^b \frac{d}{dx} \left(-A \cdot w \cdot (\bar{\phi} \cdot \psi' - \bar{\phi}' \cdot \psi) \right) dx = \left[-A \cdot w \cdot (\bar{\phi} \cdot \psi' - \bar{\phi}' \cdot \psi) \right]_{x=a}^{x=b} = 0,$$

da die Wronski-Determinante an den Rändern verschwindet.

Q.E.D.

Bemerkung 2.7: Wir haben den obigen Beweis mit dem komplexen Skalarprodukt $\langle \phi, \psi \rangle_w = \int w \cdot \bar{\phi} \cdot \psi dx$ durchgeführt. Eigentlich könnten wir uns in diesem Kapitel auf reelle Funktionen einschränken und auf die komplexe Konjugation verzichten. Beachte dabei, dass sowohl die Operatoren als auch die Koeffizienten der Randbedingungen durchweg als reell vorausgesetzt werden. Mit einer komplexen Eigenfunktion ψ ist damit auch $\Re(\psi)$ und $\Im(\psi)$ jeweils eine Eigenfunktion. Man kann sich daher o.B.d.A. auf reelle Funktionen einschränken. Wir schleppen die komplexe Schreibweise nur aus Konsistenzgründen zum ersten Kapitel mit.

Durch Multiplikation der Eigenwertgleichung mit dem Gewicht w läßt sich jede lineare DGL 2-ter Ordnung auf eine spezielle Standardform („Sturm–Liouville-Form“) bringen, in der der Differentialoperator symmetrisch bezüglich des ungewichteten Skalarproduktes ist:

Satz 2.8: (Transformation auf Sturm–Liouville-Form)

Die Differentialgleichung

$$\tilde{L}\psi = -A \cdot \psi'' - B \cdot \psi' + C \cdot \psi = \lambda \cdot \psi$$

ist äquivalent zum „verallgemeinerten Eigenwertproblem“

$$L\psi = -(p \cdot \psi')' + q \cdot \psi = \lambda \cdot w \cdot \psi$$

mit

$$w(x) = \exp \left(\underbrace{\int^x \frac{B(\xi) - A'(\xi)}{A(\xi)} d\xi}_{\text{Stammfunktion}} \right), \quad p = w \cdot A, \quad q = w \cdot C.$$

Beweis: Die Definition des Gewichts liefert:

$$w' = \frac{B - A'}{A} \cdot w \Rightarrow A \cdot w' + w \cdot A' = B \cdot w \Rightarrow (A \cdot w)' = B \cdot w \Rightarrow p' = B \cdot w.$$

In Operatorschreibweise gilt damit

$$\begin{aligned} L - \lambda \cdot w &= -\frac{d}{dx} p \frac{d}{dx} + q - \lambda \cdot w = -p \cdot \frac{d^2}{dx^2} - p' \cdot \frac{d}{dx} + q - \lambda \cdot w \\ &= w \cdot \left(-A \cdot \frac{d^2}{dx^2} - B \cdot \frac{d}{dx} + C - \lambda \right) = w \cdot (\tilde{L} - \lambda). \end{aligned}$$

Q.E.D.

Bezeichnung 2.9:

Ein Operator der Form

$$L = -\frac{d}{dx} p \frac{d}{dx} + q$$

wird „**Sturm–Liouville–Operator**“ genannt. Die Eigenwertgleichung

$$L\psi = -(p \cdot \psi')' + q \cdot \psi = \lambda \cdot w \cdot \psi$$

mit glatten reellen Funktionen p, q, w zusammen mit Randbedingungen der Form

$$\alpha_1 \cdot \psi(a) + \alpha_2 \cdot \psi'(a) = 0, \quad \beta_1 \cdot \psi(b) + \beta_2 \cdot \psi'(b) = 0$$

(mit $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}$, $|\alpha_1| + |\alpha_2| \neq 0$, $|\beta_1| + |\beta_2| \neq 0$) nennt man ein „**reguläres Sturm–Liouville–Problem**“ über dem Intervall $[a, b]$, wenn dieses Intervall endlich ist und

$$p(x) > 0 \quad \forall x \in [a, b] \quad \text{sowie} \quad w(x) > 0 \quad \forall x \in [a, b]$$

gilt. Ist das Intervall unendlich oder gilt

$$p(x) > 0 \quad \forall x \in (a, b) \quad \text{und} \quad p(a) = 0 \quad \text{und/oder} \quad p(b) = 0$$

oder verschwindet das Gewicht $w(x)$ an einigen Punkten oder ersetzt man eine oder beide der Randbedingungen durch

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} \psi(x) \text{ existiert} \quad \text{bzw.} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow b \\ x < b}} \psi(x) \text{ existiert}$$

(oder einer ähnlichen Bedingung), so spricht man von einem „**singulären Sturm–Liouville–Problem**“.

Bemerkung 2.10: Ein Sturm–Liouville–Operator $L = -\frac{d}{dx} p \frac{d}{dx} + q$ ist selbstadjungiert bezüglich des ungewichteten Skalarprodukts $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Der Operator $\frac{1}{w} \cdot L$ ist selbstadjungiert bezüglich des gewichteten Skalarprodukts $\langle \cdot, \cdot \rangle_w$. Mit

$$L\psi = \lambda \cdot w \cdot \psi \quad \iff \quad \frac{1}{w} \cdot L\psi = \lambda \cdot \psi$$

sind die Eigenfunktionen orthogonal bzgl. $\langle \cdot, \cdot \rangle_w$.

Satz 2.11: (Eigenwerte regulärer Probleme sind einfach)

Zu jedem Eigenwert λ eines regulären Sturm–Liouville–Problems $L\psi = \lambda \cdot w \cdot \psi$ mit den Randbedingungen

$$\alpha_1 \cdot \psi(a) + \alpha_2 \cdot \psi'(a) = 0, \quad \beta_1 \cdot \psi(b) + \beta_2 \cdot \psi'(b) = 0$$

(mit $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}$, $|\alpha_1| + |\alpha_2| \neq 0$, $|\beta_1| + |\beta_2| \neq 0$) gibt es genau eine Eigenfunktion (bis auf Multiplikation mit einer Konstanten).

Beweis: Die Lagrange-Identität aus dem Beweis von Satz 2.6 wird nach Transformation auf Sturm-Liouville-Form zu

$$\bar{\phi} \cdot L\psi - \psi \cdot L\bar{\phi} = \frac{d}{dx} \left(-p \cdot (\bar{\phi} \cdot \psi' - \bar{\phi}' \cdot \psi) \right).$$

Für $L\phi = \lambda \cdot w \cdot \phi$, $L\psi = \lambda \cdot w \cdot \psi$ folgt, dass das Produkt aus p und der Wronski-Determinante konstant ist:

$$\frac{d}{dx} \left(p \cdot (\bar{\phi} \cdot \psi' - \bar{\phi}' \cdot \psi) \right) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} p(x) \cdot \left(\bar{\phi}(x) \cdot \psi'(x) - \bar{\phi}'(x) \cdot \psi(x) \right) &= p(a) \cdot \left(\bar{\phi}(a) \cdot \psi'(a) - \bar{\phi}'(a) \cdot \psi(a) \right) \\ &= p(b) \cdot \left(\bar{\phi}(b) \cdot \psi'(b) - \bar{\phi}'(b) \cdot \psi(b) \right). \end{aligned}$$

Die Randbedingungen sorgen dafür, dass die Wronski-Determinante an den Rändern verschwindet; siehe den Beweis von Satz 2.6. Es folgt

$$0 = p \cdot \frac{\bar{\phi} \cdot \psi' - \bar{\phi}' \cdot \psi}{\psi^2} = p \cdot \left(\frac{\bar{\phi}}{\psi} \right)' \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{\bar{\phi}}{\psi} \right)' = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{\phi} = \text{const} \cdot \psi.$$

Q.E.D.

Satz 2.12: (Beschränkung der Eigenwerte)

Für die Eigenwerte λ des (regulären oder singulären) Sturm-Liouville-Problems

$$L\psi = -(p \cdot \psi')' + q \cdot \psi = \lambda \cdot w \cdot \psi$$

über dem Intervall $[a, b]$ mit $p(x) > 0$ und $w(x) > 0 \forall x \in (a, b)$ und mit einer der speziellen Randbedingungen

$$\psi(a) = 0, \quad \psi(b) = 0 \quad (\text{Dirichletsche Randbedingungen}),$$

oder auch

$$\psi'(a) = 0, \quad \psi'(b) = 0 \quad (\text{Neumannsche Randbedingungen})$$

oder auch $\psi(a) = 0, \psi'(b) = 0$ oder auch $\psi'(a) = 0, \psi(b) = 0$ gilt:

$$\lambda \geq \min_{x \in [a, b]} \frac{q(x)}{w(x)}.$$

Beweis: Offensichtlich gilt mit der Eigenfunktion ψ :

$$\frac{\langle \psi, L\psi \rangle}{\langle \psi, \psi \rangle_w} = \frac{\langle \psi, \lambda \cdot w \cdot \psi \rangle}{\langle \psi, \psi \rangle_w} = \lambda.$$

Es gilt (partielle Integration):

$$\begin{aligned} \langle \psi, L \cdot \psi \rangle &= \int_a^b \bar{\psi} \cdot \left(-(p \cdot \psi')' + q \cdot \psi \right) dx \\ &= \left[-p \cdot \bar{\psi} \cdot \psi' \right]_{x=a}^{x=b} + \int_a^b \left(p \cdot \bar{\psi}' \cdot \psi' + q \cdot \bar{\psi} \cdot \psi \right) dx. \end{aligned}$$

Die Randterme verschwinden wegen der Randbedingungen. Es folgt

$$\lambda = \frac{\langle \psi, L\psi \rangle}{\langle \psi, \psi \rangle_w} = \frac{\int_a^b p \cdot \bar{\psi}' \cdot \psi' dx}{\langle \psi, \psi \rangle_w} + \frac{\int_a^b q \cdot \bar{\psi} \cdot \psi dx}{\int_a^b w \cdot \bar{\psi} \cdot \psi dx} \geq \frac{\int_a^b q \cdot \bar{\psi} \cdot \psi dx}{\int_a^b w \cdot \bar{\psi} \cdot \psi dx}.$$

Mit $\phi = \sqrt{w} \cdot \psi$ folgt

$$\lambda \geq \frac{\int_a^b \frac{q}{w} \cdot \bar{\phi} \cdot \phi dx}{\int_a^b \bar{\phi} \cdot \phi dx} \geq \frac{\int_a^b \left(\min_{x \in [a,b]} \frac{q(x)}{w(x)} \right) \cdot \bar{\phi}(x) \cdot \phi(x) dx}{\int_a^b \bar{\phi}(x) \cdot \phi(x) dx} = \min_{x \in [a,b]} \frac{q(x)}{w(x)}.$$

Q.E.D.

18.12.02↓

Beispiel 2.13: Einige anwendungsrelevante Sturm–Liouville–Probleme:

a) **Sinus–Funktionen**

In Beispiel 2.5 hatten wir das reguläre SL–Problem

$$-\psi''(x) = \lambda \cdot \psi(x)$$

mit

$$[a, b] = [0, 1], \quad p(x) = 1, \quad q(x) = 0, \quad w(x) = 1$$

und den Randbedingungen

$$\psi(0) = 0, \quad \psi(1) = 0$$

betrachtet. Die Eigenwerte wurden zu $\lambda_k = k^2 \cdot \pi^2$, $k \in \mathbb{N}$, bestimmt. Die entsprechenden Eigenfunktionen sind $\psi_k(x) = \sin(k \cdot \pi \cdot x)$. Ihre Normierung ist:

$$\langle \psi_k, \psi_{k'} \rangle = \int_0^1 \psi_k(x) \cdot \psi_{k'}(x) dx = \frac{1}{2} \cdot \delta_{kk'}.$$

b) **Legendre–Polynome**

Betrachte das singuläre SL–Problem

$$-\left((1-x^2) \cdot \psi'(x)\right)' = \lambda \cdot \psi(x)$$

mit

$$[a, b] = [-1, 1], \quad p(x) = 1 - x^2, \quad q(x) = 0, \quad w(x) = 1$$

und den Randbedingungen

$$|\psi(-1)| < \infty, \quad |\psi(1)| < \infty.$$

Die Eigenwerte sind $\lambda_k = k \cdot (k+1)$, $k = 0, 1, 2, \dots$. Die Eigenfunktionen sind Polynome. Sie werden als „**Legendre–Polynome**“ P_k bezeichnet und besitzen die Darstellung

$$P_k(x) = \frac{1}{2^k \cdot k!} \cdot \frac{d^k}{dx^k} (x^2 - 1)^k.$$

In dieser Normierung gilt

$$\langle P_k, P_{k'} \rangle = \int_{-1}^1 P_k(x) \cdot P_{k'}(x) dx = \frac{2}{2 \cdot k + 1} \cdot \delta_{kk'}.$$

Es handelt sich um die bereits in Beispiel 1.17 vorgestellten Polynome.

c) **Hermite–Polynome**

Betrachte den quantenmechanischen Harmonischen Oszillator (mit $\hbar = 1$):

$$-\psi''(x) + x^2 \cdot \psi(x) = \lambda \cdot \psi(x). \quad (\#)$$

Es handelt sich hierbei um ein singuläres SL–Problem mit

$$[a, b] = (-\infty, \infty), \quad p(x) = 1, \quad q(x) = x^2, \quad w(x) = 1$$

und den Randbedingungen

$$\psi(-\infty) = 0, \quad \psi(\infty) = 0.$$

Die Eigenwerte sind $\lambda_k = 2 \cdot k + 1$, $k = 0, 1, 2, \dots$. Die Eigenfunktionen sind

$$\psi_k(x) = H_k(x) \cdot e^{-x^2/2},$$

wo H_k die „**Hermite–Polynome**“

$$H_k(x) = (-1)^k \cdot e^{x^2} \cdot \frac{d^k}{dx^k} e^{-x^2}$$

sind. Diese sind wiederum die Lösungen des Eigenwertproblems

$$-H''(x) + 2 \cdot x \cdot H'(x) = (\lambda - 1) \cdot H(x),$$

das durch den Ansatz $\psi(x) = H(x) \cdot e^{-x^2/2}$ aus (#) entsteht. Die Sturm-Liouville-Form dieser Gleichung ist

$$-\left(e^{-x^2} \cdot H'(x)\right)' = (\lambda - 1) \cdot e^{-x^2} \cdot H(x),$$

in der das Gewicht e^{-x^2} auftaucht. Für die oben eingeführten Eigenfunktionen H_k gilt die Normierung:

$$\langle H_k, H_{k'} \rangle_w = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \cdot H_k(x) \cdot H_{k'}(x) dx = 2^k \cdot k! \cdot \sqrt{\pi} \cdot \delta_{kk'}.$$

Bemerkung 2.14: Wie entstehen die angegebenen Eigenwerte

- b) $\lambda_k = k \cdot (k + 1)$, $k = 0, 1, 2, \dots$ (Legendre-Polynome),
- c) $\lambda_k = 2 \cdot k + 1$, $k = 0, 1, 2, \dots$ (Hermite-Polynome)

im letzten Beispiel? Wir zeigen dies nur exemplarisch für den Fall der Hermite-Polynome, welche als Lösung des Eigenwertproblems

$$-H''(x) + 2 \cdot x \cdot H'(x) = \mu \cdot H(x)$$

(mit $\mu = \lambda - 1$) entstehen. Wir lösen diese DGL durch einen Potenzreihenansatz

$$H(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \cdot x^j.$$

Einsetzen in die DGL ergibt

$$-\sum_{j=0}^{\infty} j \cdot (j - 1) \cdot a_j \cdot x^{j-2} + 2 \cdot x \cdot \sum_{j=0}^{\infty} j \cdot a_j \cdot x^{j-1} - \mu \cdot \sum_{j=0}^{\infty} a_j \cdot x^j = 0,$$

also nach Umsummierung $j \rightarrow j + 2$ der ersten Summe:

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{j=0}^{\infty} (j + 2) \cdot (j + 1) \cdot a_{j+2} \cdot x^j + \sum_{j=0}^{\infty} 2 \cdot j \cdot a_j \cdot x^j - \sum_{j=0}^{\infty} \mu \cdot a_j \cdot x^j \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \underbrace{\left((j + 2) \cdot (j + 1) \cdot a_{j+2} + 2 \cdot j \cdot a_j - \mu \cdot a_j \right)}_{=0} \cdot x^j. \end{aligned}$$

Es folgt

$$a_{j+2} = \frac{2 \cdot j - \mu}{(j + 2) \cdot (j + 1)} \cdot a_j.$$

Die allgemeine Lösung der DGL ist also durch a_0 und a_1 festgelegt (a_0 bestimmt a_2, a_4 etc., a_1 bestimmt a_3, a_5 etc.):

$$H(x) = a_0 \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_{2 \cdot j} \cdot x^{2 \cdot j} + a_1 \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_{2 \cdot j+1} \cdot x^{2 \cdot j+1}$$

mit den durch die Rekursion

$$\alpha_{j+2} = \frac{2 \cdot j - \mu}{(j+2) \cdot (j+1)} \cdot \alpha_j, \quad \alpha_0 = 1, \quad \alpha_1 = 1$$

bestimmten Koeffizienten $\alpha_j = a_j/a_0$ (j gerade) bzw. $\alpha_j = a_j/a_1$ (j ungerade). Wir setzen

$$\alpha_{2 \cdot j} = \frac{\beta_{2 \cdot j}}{j!}, \quad \alpha_{2 \cdot j+1} = \frac{\beta_{2 \cdot j+1}}{j!}$$

und erhalten

$$H(x) = a_0 \cdot \underbrace{\sum_{j=0}^{\infty} \beta_{2 \cdot j} \cdot \frac{x^{2 \cdot j}}{j!}}_{c(x)} + a_1 \cdot x \cdot \underbrace{\sum_{j=0}^{\infty} \beta_{2 \cdot j+1} \cdot \frac{x^{2 \cdot j}}{j!}}_{d(x)}$$

mit den durch die Rekursion

$$\beta_{2 \cdot j+2} = \frac{(4 \cdot j - \mu) \cdot j}{(2 \cdot j + 2) \cdot (2 \cdot j + 1)} \cdot \beta_{2 \cdot j}, \quad \beta_0 = 1, \quad (\#)$$

$$\beta_{2 \cdot j+3} = \frac{(4 \cdot j + 2 - \mu) \cdot (j + 1)}{(4 \cdot j + 3) \cdot (4 \cdot j + 2)} \cdot \beta_{2 \cdot j+1}, \quad \beta_1 = 1 \quad (\#)$$

bestimmten Koeffizienten β_j . Wir zeigen nun, dass $|c(x)|$ und $|d(x)|$ schneller als $e^{x^2/2}$ für $x \rightarrow \infty$ anwachsen, falls die obige Rekursion nicht irgendwann abbricht, also falls $\mu \notin \{0, 2, 4, 6, \dots\}$. Wir setzen dies nun voraus und betrachten $c(x)$: Aus der obigen Rekursion folgt sofort, dass $\beta_{2 \cdot j+2}/\beta_{2 \cdot j} \rightarrow 1$ für $j \rightarrow \infty$. Also gilt

$$|\beta_{2 \cdot j+2}| \geq \frac{|\beta_{2 \cdot j}|}{2} \quad \Rightarrow \quad |\beta_{2 \cdot j}| \geq \frac{|\beta_{2 \cdot j_0}|}{2^{j-j_0}}$$

für alle $j \geq j_0$ mit einem geeigneten j_0 . Es folgt

$$\begin{aligned} \text{sign}(\beta_{2 \cdot j_0}) \cdot c(x) &= \text{sign}(\beta_{2 \cdot j_0}) \cdot \sum_{j=0}^{j_0-1} \beta_{2 \cdot j} \cdot \frac{x^{2 \cdot j}}{j!} + \text{sign}(\beta_{2 \cdot j_0}) \cdot \sum_{j=j_0}^{\infty} \beta_{2 \cdot j} \cdot \frac{x^{2 \cdot j}}{j!} \\ &\geq \text{Polynom}(x) + |\beta_{j_0}| \cdot 2^{j_0} \cdot \sum_{j=j_0}^{\infty} \frac{x^{2 \cdot j}}{2^j \cdot j!} \\ &= \text{Polynom}(x) + |\beta_{j_0}| \cdot 2^{j_0} \cdot \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(x^2/2)^j}{j!} - \sum_{j=0}^{j_0-1} \frac{(x^2/2)^j}{j!} \right) \\ &= \text{Polynom}(x) + |\beta_{j_0}| \cdot 2^{j_0} \cdot \left(e^{x^2/2} - \text{Polynom}(x) \right). \end{aligned}$$

Analog folgt, dass $|d(x)|$ stärker als $x \cdot e^{x^2/2}$ für $x \rightarrow \infty$ anwächst. Damit verschwindet die potentielle Eigenfunktion $\psi(x) = H(x) \cdot e^{-x^2/2}$ des Harmonischen Oszillators aus Beispiel 2.13.c) aber nicht im Unendlichen und kann damit keine L_2 -Funktion sein. Die einzige Möglichkeit, eine Eigenfunktion zu erhalten, besteht also darin, dass eine der beiden Rekursionen (#) zusammenbricht, also $\mu \in \{0, 2, 4, 6, \dots\}$ gilt. Ist $\mu = 2 \cdot k$, $k \in \mathbb{N}_0$, k gerade, so ist mit der Wahl $a_1 = 0$ das gerade Polynom

$$H_k(x) = a_0 \cdot \underbrace{\sum_{j=0}^{k/2} \beta_{2 \cdot j} \cdot \frac{x^{2 \cdot j}}{j!}}_{c(x)}$$

vom Grad k die gesuchte Lösung. Ist $\mu = 2 \cdot k$, $k \in \mathbb{N}$, k ungerade, so ist mit der Wahl $a_0 = 0$ das ungerade Polynom

$$H_k(x) = a_1 \cdot x \cdot \underbrace{\sum_{j=0}^{(k-1)/2} \beta_{2 \cdot j+1} \cdot \frac{x^{2 \cdot j}}{j!}}_{d(x)}$$

vom Grad k die gesuchte Lösung. Die Funktionen $\psi_k(x) = H_k(x) \cdot e^{-x^2/2}$ sind jeweils L_2 -Eigenfunktionen des Harmonischen Oszillators zu den Eigenwerten $\lambda = \mu + 1 = 2 \cdot k + 1$, $k \in \mathbb{N}_0$. Mit geeigneter Wahl von a_0 bzw. a_1 erhält man die einheitliche Darstellung

$$H_k(x) = (-1)^k \cdot e^{x^2} \cdot \frac{d^k}{dx^k} e^{-x^2}$$

für die Hermite-Polynome.

Bemerkung 2.15: In MuPAD stehen die Orthogonalpolynome aus Beispiel 2.5.b) und c) (und weitere) in der Bibliothek `orthpoly` zur Verfügung (z.B. `orthpoly::legendre(k, x)`, `orthpoly::hermite(k, x)`).

↓20.12.02

Beispiel 2.16: Bessel-Funktionen (tauchen bei der Darstellung des Laplace-Operators in Polar- bzw. Zylinderkoordinaten auf)
Betrachte die „parametrische Besselsche DGL“

$$-\psi''(x) - \frac{1}{x} \cdot \psi'(x) + \frac{\nu^2}{x^2} \cdot \psi(x) = \lambda \cdot \psi(x)$$

in der (singulären) SL-Form

$$-\left(x \cdot \psi'(x)\right)' + \frac{\nu^2}{x} \cdot \psi(x) = \lambda \cdot x \cdot \psi(x)$$

mit einem reellen Parameter $\nu \geq 0$,

$$[a, b] = [0, 1], \quad p(x) = x, \quad q(x) = \frac{\nu^2}{x}, \quad w(x) = x$$

und den Randbedingungen

$$|\psi(0)| < \infty, \quad \psi(1) = 0.$$

Die Eigenwerte sind $\lambda_k = \lambda_{\nu k}^2$, $k \in \mathbb{N}$, wo $\lambda_{\nu k}$ die k -te positive Nullstelle der Bessel-Funktion J_ν ist. Die Eigenfunktionen sind $\psi_k(x) = J_\nu(\lambda_{\nu k} \cdot x)$. Ihre Normierung ist:

$$\langle \psi_k, \psi_{k'} \rangle_w = \int_0^1 x \cdot J_\nu(\lambda_{\nu k} \cdot x) \cdot J_\nu(\lambda_{\nu k'} \cdot x) dx = \frac{1}{2} \cdot \left(J_{\nu+1}(\lambda_{\nu k})\right)^2 \cdot \delta_{kk'}.$$

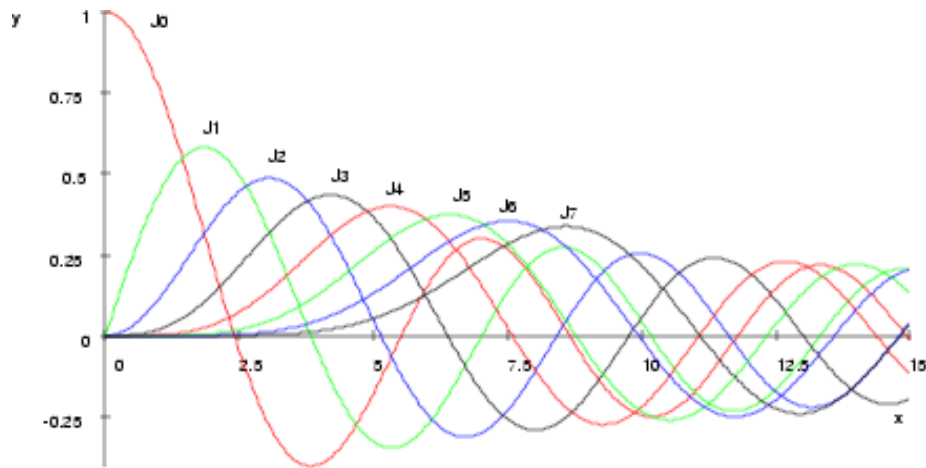
Hintergrund: Die „Bessel-Funktion“ (der ersten Art) mit Index $\nu \geq 0$ ist die bei $x = 0$ reguläre Lösung der DGL („Besselsche DGL“)

$$-\left(x \cdot J'(x)\right)' = \left(x - \frac{\nu^2}{x}\right) \cdot J(x).$$

Die spezielle Lösung mit $J(0) = 1$ für $\nu = 0$ bzw. $J(0) = 0$ für $\nu > 0$ wird mit $J_\nu(x)$ bezeichnet („die Bessel-Funktion der Ordnung ν “). Sie besitzt für ganzzahliges $\nu = 0, 1, 2, \dots$ die Potenzreihendarstellung

$$J_\nu(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j! \cdot (j + \nu)!} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2 \cdot j}.$$

Hier ist eine Graphik der Bessel-Funktionen J_0, \dots, J_7 :



Die Bessel-DGL

$$-\left(x \cdot J'(x)\right)' = \left(x - \frac{\nu^2}{x}\right) \cdot J(x)$$

ist die parametrische Bessel-DGL des Eigenwertproblems

$$-\left(x \cdot \psi'(x)\right)' + \frac{\nu^2}{x} \cdot \psi(x) = \lambda \cdot x \cdot \psi(x), \quad |\psi(0)| < \infty, \quad \psi(1) = 0$$

mit $\lambda = 1$. Setzt man $\psi(x) = J_\nu(\lambda_{\nu k} \cdot x)$, so erhält man in der Tat die bei $x = 0$ reguläre Lösung der parametrischen Bessel-DGL mit $\lambda = \lambda_{\nu k}^2$. Die Forderung $\psi(1) = 0$ führt sofort zu dem Ergebnis, dass die Eigenwerte $\lambda = \lambda_{\nu k}^2$ durch die Nullstellen $\lambda_{\nu k}$ von J_ν gegeben sind.

Man kann zeigen, dass jedes $J_\nu(x)$ unendlich viele positive reelle Nullstellen

$$0 < \lambda_{\nu 1} < \lambda_{\nu 2} < \dots$$

besitzt, welche in der obigen Konstruktion der Eigenfunktionen der parametrischen Bessel-DGL benutzt werden. (Die Nullstelle $x = 0$ für $\nu > 0$ wird nicht betrachtet.) Diese Nullstellen lassen sich nicht durch explizite Formeln darstellen, können aber recht leicht numerisch berechnet werden. Für die kleinste Nullstelle gilt (für großes ν)

$$\lambda_{\nu 1} \approx \nu + 1.85575 \cdot \nu^{1/3} + 1.03315 \cdot \nu^{-1/3} - 0.00397 \cdot \nu^{-1} - \dots,$$

was schon ab $\nu = 2$ die Nullstelle auf zwei Nachkommastellen genau bestimmt. Hiermit sind Startpunkte für die numerische Suche gegeben. Hat man $\lambda_{\nu 1}$ gefunden, so findet man Startpunkte für die $\lambda_{\nu k}$ für die Werte $k > 1$ aus der Tatsache, dass für jedes ν

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (\lambda_{\nu, k+1} - \lambda_{\nu, k}) = \pi$$

gilt, also $\lambda_{\nu, k+1} \approx \lambda_{\nu, k} + \pi$. Dies liefert für jedes nicht allzu große ν schon ab $k = 1$ eine ganz passable Näherung von $\lambda_{\nu, k+1}$, sobald $\lambda_{\nu k}$ numerisch berechnet worden ist.


```

>> DIGITS:= 4: // Ausgabe auf nur 4 Stellen
>> // die ersten 7 Nullstellen der Besselfunktionen J0,...,J7
>> lambda;

```

	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7
J[0]	2.405,	5.52,	8.654,	11.79,	14.93,	18.07,	21.21
J[1]	3.832,	7.016,	10.17,	13.32,	16.47,	19.62,	22.76
J[2]	5.136,	8.417,	11.62,	14.80,	17.96,	21.12,	24.27
J[3]	6.380,	9.761,	13.02,	16.22,	19.41,	22.58,	25.75
J[4]	7.588,	11.06,	14.37,	17.62,	20.83,	24.02,	27.20
J[5]	8.771,	12.34,	15.70,	18.98,	22.22,	25.43,	28.63
J[6]	9.936,	13.59,	17.00,	20.32,	23.59,	26.82,	30.03
J[7]	11.09,	14.82,	18.29,	21.64,	24.93,	28.19,	31.42

2.2 Reguläre Sturm–Liouville–Probleme

Für die regulären SL–Probleme (Bezeichnung 2.9)

$$L\psi = -(p \cdot \psi')' + q \cdot \psi = \lambda \cdot w \cdot \psi$$

über endlichen Intervallen $[a, b]$ mit glatten Funktionen p, q, w (mit $p(x) > 0$, $w(x) > 0$ für alle $x \in [a, b]$) und den Randbedingungen

$$\alpha_1 \cdot \psi(a) + \alpha_2 \cdot \psi'(a) = 0, \quad \beta_1 \cdot \psi(b) + \beta_2 \cdot \psi'(b) = 0$$

(mit $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}$, $|\alpha_1| + |\alpha_2| \neq 0$, $|\beta_1| + |\beta_2| \neq 0$) existiert eine bemerkenswert einheitliche Theorie, die wir im folgenden (Mega–)Satz zusammenfassen:

Satz 2.18: (Reguläre Sturm–Liouville–Probleme)

Für das reguläre SL–Eigenwertproblem gilt:

- a) Es gibt eine abzählbar unendliche Anzahl reeller diskreter Eigenwerte λ_k mit $k = 0, 1, 2, \dots$:

$$\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots$$

- b) Diese Eigenwerte wachsen in der Form $O(k^2)$ gegen ∞ : es gibt positive Konstanten c und C , sodass für alle hinreichend grossen k gilt:

$$c \leq \frac{\lambda_k}{k^2} \leq C.$$

- c) Die Eigenwerte sind einfach: zu jedem λ_k gibt es (bis auf Multiplikation mit einer Konstanten) genau eine Eigenfunktion $\psi_k(x)$ mit $L\psi_k = \lambda_k \cdot w \cdot \psi_k$.
- d) Die Eigenfunktionen „oszillieren“: die k -te Eigenfunktion hat genau k einfache Nullstellen im offenen Intervall (a, b) (und, je nach Randbedingung, evtl. noch Nullstellen an den Rändern).
- e) Die Eigenfunktionen bilden ein vollständiges Orthogonalsystem auf $L_{2w}([a, b])$: für jedes $f \in L_{2w}([a, b])$ (welches nicht die Randbedingungen zu erfüllen braucht) konvergiert die Fourier–Reihe im L_2 –Sinne gegen f :

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \cdot \psi_k \quad \text{mit} \quad c_k = \frac{\langle \psi_k, f \rangle_w}{\langle \psi_k, \psi_k \rangle_w}.$$

- f) Jede stückweise glatte Funktion f über $[a, b]$, die den Randbedingungen genügt, läßt sich punktweise als Grenzwert der Fourier–Reihe über die Eigenfunktionen darstellen. Es gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n c_k \cdot \psi_k(x) = \frac{f(x-0) + f(x+0)}{2},$$

wo $f(x \mp 0)$ der links– bzw. rechtsseitige Limes der Funktion an der Stelle x ist. Stetige Funktionen, die den Randbedingungen genügen, werden damit überall durch ihre Fourier–Reihe dargestellt.

Der **Beweis** sprengt unseren Rahmen, und wir verweisen auf

[WW] WOLFGANG WALTER, *Gewöhnliche Differentialgleichungen*, Springer, 1996.

- a) + d) Siehe Kapitel 27 (II. Existenzsatz) in [WW].
- b) Siehe Kapitel 27 (Asymptotisches Verhalten, Formel (12)) in [WW].
- c) Satz 2.11.
- e) Siehe Kapitel 28 (VII. Entwicklungssatz) in [WW].
- f) Siehe Kapitel 27 (III. Entwicklungssatz) in [WW] (nur für stetig diff'bare Funktionen).
- Die Orthogonalität der Eigenfunktionen wurde in Satz 2.4 gezeigt.

Q.E.D.

Bemerkung 2.19: Die meisten der in Anwendungen auftretenden SL -Probleme sind singulär. In der Tat entstammen in den Beispielen 2.13 nur die **Sinus-Funktionen** 2.13.a) einem regulären Problem. In der Zählung der Eigenfunktionen nach Satz 2.18 ist dabei $\psi_k(x) = \sin((k+1) \cdot \pi \cdot x)$, $k = 0, 1, 2, \dots$. Wie in den Übungen bei der Wärmeleitgleichung und der Wellengleichung schon diskutiert, kann man jede auf dem Intervall $[0, 1]$ gegebene Funktion ungerade auf $[-1, 1]$ fortsetzen und dann gemäß Kapitel 1 in eine trigonometrische Reihe entwickeln, die nur Sinus-Terme enthält. Die Gültigkeit aller Teilaussagen von Satz 2.18 ist damit nach Kapitel 1 klar.

↓6.1.03

Die meisten der Aussagen in Satz 2.18 gelten auch für singuläre SL -Probleme, sind dann aber für das konkret betrachtete Problem jeweils einzeln zu beweisen. Für die **Legendre-Polynome** in Beispiel 2.13.b) gelten beispielsweise alle Aussagen des Satzes 2.18.

Für die **Hermite-Polynome** in Beispiel 2.13.c) gelten ebenfalls alle Aussagen des Satzes 2.18 mit der Ausnahme von 2.18.b): die Eigenwerte $\lambda_k = 2 \cdot k + 1$ wachsen nicht quadratisch mit k .

Für die **Besselfunktionen** in Beispiel 2.13.d) gelten wiederum alle Aussagen des Satzes 2.18. In der Zählung der Eigenfunktionen nach Satz 2.18 ist dabei $\psi_k(x) = J_\nu(\lambda_{\nu, k+1} \cdot x)$, $k = 0, 1, 2, \dots$.

Bemerkung 2.20: Satz 2.18 liefert offensichtlich eine Verallgemeinerung der Theorie trigonometrischer Fourier-Reihen (mit Sinus- und Cosinus-Termen), die als Spezialfall enthalten sein sollten. Sie entstammen keinem regulären SL -Problem, sondern dem Eigenwertproblem

$$-\psi''(x) = \lambda \cdot \psi(x), \quad \psi(-\pi) = \psi(\pi), \quad \psi'(-\pi) = \psi'(\pi)$$

mit periodischen Randbedingungen. In der Tat gelten alle Aussagen des Satzes 2.18 bis auf 2.18.c): die Eigenwerte $\lambda_k = k \in \mathbb{N}_0$ sind alle bis auf $\lambda_0 = 0$ entartet: es gibt jeweils 2 Eigenfunktionen, nämlich $\sin(k \cdot x)$ und $\cos(k \cdot x)$.

Bemerkung 2.21: In der Quantenmechanik sind der kleinste Eigenwert λ_0 und die entsprechende Eigenfunktion ψ_0 von besonderem Interesse: man spricht von „Grundenergie“ λ_0 und „Grundzustand“ ψ_0 . In Satz 2.12 wurde eine grobe untere Abschätzung bewiesen. Man bekommt leicht obere Abschätzungen für die Grundenergie durch die Aussage

$$\lambda_0 = \min_{\substack{\psi \in L_{2w} \\ \psi \neq 0}} \frac{\langle \psi, L\psi \rangle}{\langle \psi, \psi \rangle_w}$$

(das Minimum wird für $\psi = \psi_0$ angenommen). Durch Einsetzen einer beliebigen Funktion ψ erhält man eine obere Schranke

$$\lambda_0 \leq \frac{\langle \psi, L\psi \rangle}{\langle \psi, \psi \rangle_w},$$

die umso genauer ist, je näher man ψ bei ψ_0 wählt. Numerisch kann man zur systematischen Approximation von λ_0 und ψ_0 folgendermaßen vorgehen: Wähle eine (möglichst gute) Approximation μ von λ_0 , wähle eine beliebige Startfunktion $\psi^{(0)}$, die keine Eigenfunktion von L ist. Ist die Approximation μ hinreichend genau, so konvergiert die Iteration

$$\psi^{(j)} = \frac{1}{\sqrt{\langle \tilde{\psi}^{(j)}, \tilde{\psi}^{(j)} \rangle_w}} \cdot \tilde{\psi}^{(j)} \quad \text{mit} \quad \tilde{\psi}^{(j)} = (L - \mu \cdot w)^{-1} w \cdot \psi^{(j-1)}$$

im L_2 -Sinn gegen ψ_0 und

$$\lambda^{(j)} = \frac{\langle \psi^{(j)}, L\psi^{(j)} \rangle}{\langle \psi^{(j)}, \psi^{(j)} \rangle_w} = \mu + \frac{\langle \tilde{\psi}^{(j)}, (L - \mu \cdot w)\tilde{\psi}^{(j)} \rangle}{\langle \tilde{\psi}^{(j)}, \tilde{\psi}^{(j)} \rangle_w} = \mu + \frac{\langle \tilde{\psi}^{(j)}, \psi^{(j-1)} \rangle_w}{\langle \tilde{\psi}^{(j)}, \tilde{\psi}^{(j)} \rangle_w}$$

konvergiert gegen λ_0 . Hierbei ist $\tilde{\psi}^{(j)} = (L - \mu \cdot w)^{-1} w \cdot \psi^{(j-1)}$ als die Lösung von $(L - \mu \cdot w)\tilde{\psi}^{(j)} = w \cdot \psi^{(j-1)}$ zu verstehen.

Durch geeignete Wahl von μ kann man auch andere Eigenwerte/–vektoren durch diese Iteration ansteuern. Siehe Übungsaufgabe 47.

Mit der Aufgabe, die Gleichung $L\psi = w \cdot f$ für gegebenes f zu lösen, beschäftigen wir uns im nächsten Abschnitt 2.3.

2.3 Inverse Sturm–Liouville–Operatoren: die Greensche Funktion

Sei $L = -\frac{d}{dx} p \frac{d}{dx} + q$ ein SL-Operator über dem Intervall $[a, b]$ mit den Randbedingungen

$$\alpha_1 \cdot \psi(a) + \alpha_2 \cdot \psi'(a) = 0, \quad \beta_1 \cdot \psi(b) + \beta_2 \cdot \psi'(b) = 0 \quad (\#)$$

(mit $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}$, $|\alpha_1| + |\alpha_2| \neq 0$, $|\beta_1| + |\beta_2| \neq 0$). Wir betrachten das Problem, die inhomogene Gleichung

$$L\psi = w \cdot f$$

mit einer gegebenen Funktion $f \in L_{2w}([a, b])$ zu lösen, wobei die Lösung ψ die Randbedingungen (#) erfüllen soll.

Wir zerlegen dazu ψ und f in eine Fourier-Reihe bzgl. der Eigenfunktionen ψ_k von L (was für reguläre SL-Probleme immer möglich ist):

$$\psi = \sum_{k=0}^{\infty} d_k \cdot \psi_k, \quad f = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \cdot \psi_k, \quad c_k = \frac{\langle \psi_k, f \rangle_w}{\langle \psi_k, \psi_k \rangle_w}.$$

Aus $L\psi = w \cdot f$ folgt mit $L\psi_k = \lambda_k \cdot w \cdot \psi_k$ die Gleichung

$$L\psi = \sum_{k=0}^{\infty} d_k \cdot L\psi_k = \sum_{k=0}^{\infty} d_k \cdot \lambda_k \cdot w \cdot \psi_k = w \cdot f = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \cdot w \cdot \psi_k.$$

Durch Vergleich der einzelnen Terme folgt $d_k = c_k/\lambda_k$, d.h., man erhält die Lösungsformel

$$\psi = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{\lambda_k} \cdot \psi_k, \quad c_k = \frac{\langle \psi_k, f \rangle_w}{\langle \psi_k, \psi_k \rangle_w}$$

für das Problem $L\psi = w \cdot f$. Solange keiner der Eigenwerte $\lambda_k = 0$ ist, erhält man so die Lösung. (Die Bedingung, dass 0 kein Eigenwert von L sein darf, sollte nicht verwundern: eine quadratische Matrix ist genau dann invertierbar, wenn 0 kein Eigenwert ist). Damit ist bewiesen:

Satz 2.22: (Lösung von $L\psi = w \cdot f$ über Fourier-Reihen)

Sei L ein SL -Operator auf einem den Randbedingungen entsprechenden Teilraum $L_{2w}^{(0)}([a, b]) \subset L_{2w}([a, b])$ mit einem vollständigen Orthogonalsystem von Eigenfunktionen ($L\psi_k = \lambda_k \cdot w \cdot \psi_k$, $k \in \mathbb{N}_0$). Sei 0 nicht Eigenwert von L . Dann existiert für jedes $f \in L_{2w}([a, b])$ eine eindeutige Lösung

$$\psi = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{\lambda_k} \cdot \psi_k, \quad c_k = \frac{\langle \psi_k, f \rangle_w}{\langle \psi_k, \psi_k \rangle_w}$$

von $L\psi = w \cdot f$ mit $\psi \in L_{2w}^{(0)}([a, b])$.

Bemerkung 2.23: Startet man mit dem Operator

$$\tilde{L} = -A \frac{d}{dx^2} - B \frac{d}{dx} + C,$$

der nach Satz 2.8 durch $L = w \cdot \tilde{L}$ auf SL -Form L gebracht wird, so entspricht die Gleichung $L\psi = w \cdot f$ der Gleichung $\tilde{L}\psi = f$. Mit den Eigenfunktionen $\tilde{L}\psi_k = \lambda \cdot \psi_k$ wird die Gleichung

$$\tilde{L}\psi = f$$

auch für allgemeine Operatoren \tilde{L} durch die Fourier-Entwicklung gelöst, falls 0 kein Eigenwert von \tilde{L} ist:

$$\psi = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{\lambda_k} \cdot \psi_k, \quad c_k = \frac{\langle \psi_k, f \rangle_w}{\langle \psi_k, \psi_k \rangle_w}.$$

Bemerkung 2.24: Die Inhomogenität f in $L\psi = w \cdot f$ braucht die Randbedingungen nicht zu erfüllen. In einem solchen Fall ist das Abklingverhalten der Fourier–Koeffizienten c_k von f recht langsam: die Fourier–Reihe $f = \sum_k c_k \cdot \psi_k$ konvergiert nicht gleichmäßig, sodass der L_2 –Grenzwert f der Reihe nicht die Randbedingungen erfüllen muß, auch wenn die einzelnen Terme $c_k \cdot \psi_k$ der Reihe dies tun. Im Gegensatz dazu fallen die Fourier–Koeffizienten c_k/λ_k der Lösung ψ wesentlich schneller ab (beachte $\lambda_k \rightarrow \infty$), was zu gleichmäßiger Konvergenz $\psi = \sum_k \frac{c_k}{\lambda_k} \cdot \psi_k$ und der Vererbung der Randbedingungen von ψ_k auf die Lösung ψ führt.

Wir beobachten, dass der SL–Operator L auf $L_{2w}([a, b])$ eine Inverse L^{-1} besitzt, die Bilder in $L_{2w}^{(0)}([a, b]) \subset L_{2w}([a, b])$ annimmt:

$$\begin{aligned} (L^{-1}(w \cdot f))(x) &= \psi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\langle \psi_k, f \rangle_w}{\lambda_k \cdot \langle \psi_k, \psi_k \rangle_w} \cdot \psi_k(x) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k \cdot \langle \psi_k, \psi_k \rangle_w} \cdot \psi_k(x) \cdot \int_a^b w(y) \cdot \overline{\psi_k(y)} \cdot f(y) \, dy \\ &= \int_a^b \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\psi_k(x) \cdot \overline{\psi_k(y)}}{\lambda_k \cdot \langle \psi_k, \psi_k \rangle_w}}_{g(x,y)} \cdot w(y) \cdot f(y) \, dy \\ &= \int_a^b g(x, y) \cdot (w(y) \cdot f(y)) \, dy. \end{aligned}$$

Wir ersetzen $w \cdot f$ durch f und erhalten:

Satz 2.25: (Inverser SL–Operator)

↓10.1.03

Sei $L : L_{2w}^{(0)}([a, b]) \rightarrow L_{2w}([a, b])$ ein SL–Operator auf einem den Randbedingungen entsprechenden Teilraum $L_{2w}^{(0)}([a, b]) \subset L_{2w}([a, b])$ mit einem vollständigen Orthogonalsystem von Eigenfunktionen $L\psi_k = \lambda_k \cdot w \cdot \psi_k$, $k \in \mathbb{N}_0$. Ist 0 nicht Eigenwert, so ist L invertierbar. Der inverse Operator $L^{-1} : L_{2w}([a, b]) \rightarrow L_{2w}^{(0)}([a, b])$ wirkt als Integraloperator:

$$(L^{-1}f)(x) = \int_a^b g(x, y) \cdot f(y) \, dy \quad \text{mit} \quad g(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\psi_k(x) \cdot \overline{\psi_k(y)}}{\lambda_k \cdot \langle \psi_k, \psi_k \rangle_w}.$$

Bezeichnung: L^{-1} heißt „Greens–Operator“, der Integralkern $g(x, y)$ heißt „Greensche Funktion“.

Bemerkung 2.26: Kann das homogene Problem $L\psi = 0$ für $\psi \in L_{2w}^{(0)}([a, b])$ explizit gelöst werden, so kann man die Greensche Funktion nicht nur als Reihe, sondern auch ganz explizit konstruieren. Wir fixieren dazu ein $y \in (a, b)$ und lösen die DGL

$$Lg(x, y) = \delta(x - y),$$

in x (mit Parameter y), sodass formal

$$L \int_a^b g(x, y) \cdot f(y) dy = \int_a^b Lg(x, y) \cdot f(y) dy = \int_a^b \delta(x - y) \cdot f(y) dy = f(x)$$

gilt. Für $x < y$ bzw. $x > y$ ist jeweils das homogene Problem

$$Lg(x, y) = 0$$

zu lösen, an der Stelle $x = y$ muss

$$\lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ \epsilon > 0}} \int_{y-\epsilon}^{y+\epsilon} Lg(x, y) dx = \lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ \epsilon > 0}} \int_{y-\epsilon}^{y+\epsilon} \delta(x - y) dx = 1$$

gelten, also

$$\lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ \epsilon > 0}} \int_{y-\epsilon}^{y+\epsilon} \left(-\frac{\partial}{\partial x} p(x) \frac{\partial}{\partial x} g(x, y) + q(x) \cdot g(x, y) \right) dx = 1.$$

Wir fordern, dass $g(x, y)$ an der Stelle $x = y$ stetig sein soll. Damit folgt

$$\lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ \epsilon > 0}} \left(-p(y + \epsilon) \cdot \frac{\partial g}{\partial x}(y + \epsilon, y) + p(y - \epsilon) \cdot \frac{\partial g}{\partial x}(y - \epsilon, y) \right) = 1.$$

Wir erhalten also ein Sprungbedingung an der Nahtstelle $x = y$ der beiden Bereiche $x < y$ und $x > y$:

$$\frac{\partial g}{\partial x}(y - 0, y) - \frac{\partial g}{\partial x}(y + 0, y) = \frac{1}{p(y)}.$$

Ergebnis: die Greensche Funktion $g(x, y)$ ist bei gegebenem $y \in (a, b)$ durch die folgenden Forderungen festgelegt:

- $Lg(x, y) = 0$ für alle $x \in [a, y)$ und alle $x \in (y, b]$,
- $g(a, y)$ erfüllt die linke Randbedingung,
- $g(b, y)$ erfüllt die rechte Randbedingung,
- $g(x, y)$ ist stetig bei $x = y$,
- $\frac{\partial g}{\partial x}(x, y)$ ist unstetig bei $x = y$ mit $\frac{\partial g}{\partial x}(y - 0, y) - \frac{\partial g}{\partial x}(y + 0, y) = \frac{1}{p(y)}$.

In der Tat läßt sich hieraus algorithmisch $g(x, y)$ eindeutig bestimmen, falls wir eine explizite Lösung des homogenen Problems $Lg(x, y) = 0$ berechnen können.

Beispiel 2.27: Wir berechnen die Greensfunktion des SL-Operators $L = -\frac{d^2}{dx^2}$ mit den Randbedingungen $\psi(0) = \psi(1) = 0$. Sei $y \in (0, 1)$ vorgegeben.

a) Die Lösung des homogenen Problems $Lg(x, y) = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} g(x, y) = 0$ ist $g(x, y) = \alpha(y) + \beta(y) \cdot x$. Wir machen also den Ansatz

$$g(x, y) = \begin{cases} \alpha_-(y) + \beta_-(y) \cdot x & \text{für } x \in [0, y), \\ \alpha_+(y) + \beta_+(y) \cdot x & \text{für } x \in (y, 1] \end{cases}$$

mit noch zu bestimmenden Funktionen $\alpha_{\pm}(y)$, $\beta_{\pm}(y)$.

b) Aus der linken Randbedingung $g(0, y) = 0$ folgt $\alpha_-(y) = 0$.

c) Aus der rechten Randbedingung $g(1, y) = 0$ folgt $\alpha_+(y) + \beta_+(y) = 0$.

Der Ansatz hat sich damit auf

$$g(x, y) = \begin{cases} \beta_-(y) \cdot x & \text{für } x \in [0, y), \\ \alpha_+(y) \cdot (1 - x) & \text{für } x \in (y, 1] \end{cases}$$

reduziert.

d) Für $x = y$ ergibt sich

$$\beta_-(y) \cdot y = \alpha_+(y) \cdot (1 - y). \quad (1)$$

e) Es gilt

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = \begin{cases} \beta_-(y) & \text{für } x \in [0, y), \\ -\alpha_+(y) & \text{für } x \in (y, 1]. \end{cases}$$

Für unseren Operator ist $p(x) = 1$. Die Sprungbedingung e) liefert damit

$$\beta_-(y) + \alpha_+(y) = \frac{1}{p(y)} = 1. \quad (2)$$

Aus den linearen Gleichungen (1) und (2) ergibt sich

$$\alpha_+(y) = y, \quad \beta_-(y) = 1 - y.$$

Damit ist die Greens-Funktion bestimmt (wir lassen nun auch $y = 0$, $y = 1$ sowie wegen der Stetigkeit auch $x = y$ zu):

$$g(x, y) = \begin{cases} x \cdot (1 - y) & \text{für } 0 \leq x \leq y \leq 1, \\ (1 - x) \cdot y & \text{für } 0 \leq y \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Probe: Die Funktion

$$\psi(x) = \int_0^1 g(x, y) \cdot f(y) dy = \int_0^x g(x, y) \cdot f(y) dy + \int_x^1 g(x, y) \cdot f(y) dy$$

$$= (1-x) \cdot \int_0^x y \cdot f(y) dy + x \cdot \int_x^1 (1-y) \cdot f(y) dy$$

erfüllt in der Tat die Randbedingungen $\psi(0) = \psi(1) = 0$ sowie

$$\begin{aligned} L\psi(x) &= -\frac{d^2}{dx^2}\psi(x) \\ &= -\frac{d}{dx}\left(-\int_0^x y \cdot f(y) dy + (1-x) \cdot x \cdot f(x) + \int_x^1 (1-y) \cdot f(y) dy - x \cdot (1-x) \cdot f(x)\right) \\ &= -\frac{d}{dx}\left(-\int_0^x y \cdot f(y) dy + \int_x^1 (1-y) \cdot f(y) dy\right) = -\left(-x \cdot f(x) - (1-x) \cdot f(x)\right) = f(x). \end{aligned}$$

Bemerkung 2.28: Im obigen Beispiel beobachtet man, dass die Symmetrie $g(x, y) = g(y, x)$ gilt. Dies ist kein Zufall. Bezüglich des ungewichteten Skalarprodukts gilt

$$\begin{aligned} &\langle f_1, L^{-1}f_2 \rangle - \langle L^{-1}f_1, f_2 \rangle \\ &= \int_a^b \overline{f_1(x)} \cdot \left(\int_a^b g(x, y) \cdot f_2(y) \right) dy dx - \int_a^b \left(\int_a^b g(x, y) \cdot f_1(y) dy \right) \cdot f_2(x) dx \\ &= \int_a^b \int_a^b g(x, y) \cdot \overline{f_1(x)} \cdot f_2(y) dx dy - \int_a^b \int_a^b \overline{g(x, y)} \cdot \overline{f_1(y)} \cdot f_2(x) dy dx \\ &\stackrel{(*)}{=} \int_a^b \int_a^b \left(g(x, y) - \overline{g(y, x)} \right) \cdot \overline{f_1(x)} \cdot f_2(y) dx dy, \end{aligned}$$

wobei im Schritt (*) im zweiten Integral die Namen x, y der Integrationsvariablen ausgetauscht wurden. Der Greensche Operator ist also genau dann selbstadjungiert bzgl. des ungewichteten Skalarprodukts, wenn

$$g(x, y) = \overline{g(y, x)}$$

gilt. Da das Inverse eines (immer symmetrischen) SL -Operators wieder ein symmetrischer Operator ist, muss für den Integralkern $g(x, y)$ die obige Symmetrie gelten.

2.4 Anwendungen

Viele der den Sturm-Liouville-Problemen entstammenden Orthogonalsysteme tauchen in der Lösung von partiellen DGLen der mathematischen Physik auf. Ein wichtiges Beispiel hierfür ist etwa die Poisson-Gleichung

$$\Delta u(x, y, z) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -f(x, y, z)$$

auf einem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ mit einer in Ω vorgegebenen Funktion f und vorgegebenen Randwerten der Lösung u auf dem Rand von Ω . Das grobe Verfahren sieht dabei folgendermaßen aus:

- a) Transformiere die Gleichung auf der Symmetrie des Problems angepasste Koordinaten, die wir hier wieder x, y, z nennen wollen (z.B. Polar- oder Kugelkoordinaten bei Rotationssymmetrie, Zylinderkoordinaten bei Zylindersymmetrie etc.)
- b) In den neuen Koordinaten hat man typischerweise einen Quader vor sich, über dem man sich ein mehrdimensionales orthogonales System $\psi_{k_1 k_2 k_3}(x, y, z)$ verschafft. Dies geschieht durch Produktansätze

$$\psi_{k_1 k_2 k_3}(x, y, z) = X_{k_1}(x) \cdot Y_{k_2}(y) \cdot Z_{k_3}(z),$$

wo $X_{k_1}(x)$, $Y_{k_2}(y)$, $Z_{k_3}(z)$ jeweils 1-dimensionale orthogonale Funktionen sind. Die mehrdimensionale Fourier-Entwicklung der Lösung führt dabei auf Mehrfachsummen über jeweils 1-dimensionale Fourier-Reihen in den einzelnen Koordinatenrichtungen.

- c) Man erhält so eine Fourier-Reihendarstellung der Lösung.

Wir demonstrieren dieses Programm an einem noch überschaubaren Fall: die Poisson-Gleichung im \mathbb{R}^2 mit Rotationssymmetrie und homogenen Randbedingungen. Es bietet sich eine Transformation des Gebiets Ω (ein Kreis mit Radius r_0) per Polarkoordinaten (r, ϕ) auf den Quader $(r, \phi) \in [0, r_0] \times [0, 2 \cdot \pi]$ an, wobei über die Transformation des Volumenelements $dx dy = r dr d\phi$ das Gewicht $w(r) = r$ im Radialanteil auftaucht. Dieses Gewicht gehört zu den Bessel-Funktionen, sodass sich als geeignetes 2-dimensionales Orthogonalsystem auf dem (r, ϕ) -Quader die Produkte aus Bessel-Funktionen (in r) und trigonometrischen Funktionen (in ϕ) erweisen:

Beispiel 2.29: Wir betrachten den Laplace-Operator

$$\Delta u(x, y) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

in Polarkoordinaten (r, ϕ) :

$$x = r \cdot \cos(\phi), \quad y = r \cdot \sin(\phi).$$

Mit der Kettenregel ergeben sich aus

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial x} = 1 &= \frac{\partial r}{\partial x} \cdot \cos(\phi) - r \cdot \sin(\phi) \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x}, & \frac{\partial y}{\partial x} = 0 &= \frac{\partial r}{\partial x} \cdot \sin(\phi) + r \cdot \cos(\phi) \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x}, \\ \frac{\partial x}{\partial y} = 0 &= \frac{\partial r}{\partial y} \cdot \cos(\phi) - r \cdot \sin(\phi) \cdot \frac{\partial \phi}{\partial y}, & \frac{\partial y}{\partial y} = 1 &= \frac{\partial r}{\partial y} \cdot \sin(\phi) + r \cdot \cos(\phi) \cdot \frac{\partial \phi}{\partial y} \end{aligned}$$

die Beziehungen

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \cos(\phi), \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \sin(\phi), \quad \frac{\partial \phi}{\partial x} = -\frac{\sin(\phi)}{r}, \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\cos(\phi)}{r}.$$

Mit der Kettenregel folgt dann

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial r}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial \phi} = \cos(\phi) \cdot \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\sin(\phi)}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial \phi},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial r}{\partial y} \cdot \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \cdot \frac{\partial u}{\partial \phi} = \sin(\phi) \cdot \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\cos(\phi)}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial \phi},$$

woraus sich nach einiger Rechnung ergibt:

$$\Delta u(r, \phi) = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2}.$$

Wir betrachten die „**Poisson-Gleichung**“

$$\Delta u = -f$$

mit einer in Polarkoordinaten gegebenen Funktion $f(r, \phi)$ und der Randbedingung

$$u(r_0, \phi) = 0$$

(auf einem Kreis des Radius r_0 soll die Lösung verschwinden). In Polarkoordinaten haben wir zu lösen:

$$\Delta u(r, \phi) = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} = -f(r, \phi), \quad u(r_0, \phi) = 0.$$

Wir führen die dimensionslose Koordinate

$$\rho = \frac{r}{r_0}$$

ein, die den Radialbereich $r \in [0, r_0]$ auf den Standardbereich $\rho \in [0, 1]$ transformiert. Da sowohl f als auch die Lösung u in der Winkelkoordinate ϕ die Periode $2 \cdot \pi$ haben muss, zerlegen wir f und u in Fourier-Reihen bzgl. ϕ :

$$u(r, \phi) = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} U_\nu(\rho) \cdot e^{i \cdot \nu \cdot \phi}, \quad f(r, \phi) = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} F_\nu(\rho) \cdot e^{i \cdot \nu \cdot \phi}$$

mit

$$F_\nu(\rho) = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_0^{2 \cdot \pi} f(\rho \cdot r_0, \phi) \cdot e^{-i \cdot \nu \cdot \phi} d\phi.$$

Einsetzen in die Poisson-Gleichung liefert:

$$\begin{aligned}
\Delta u(r, \phi) &= \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right) \cdot U_\nu(\rho) \cdot e^{i \cdot \nu \cdot \phi} \\
&= \frac{1}{r_0^2} \cdot \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} \left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right) \cdot U_\nu(\rho) \cdot e^{i \cdot \nu \cdot \phi} \\
&= \frac{1}{r_0^2} \cdot \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} \left(U_\nu''(\rho) + \frac{1}{\rho} \cdot U_\nu'(\rho) - \frac{\nu^2}{\rho^2} \cdot U_\nu(\rho) \right) \cdot e^{i \cdot \nu \cdot \phi} \\
&= - \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} F_\nu(\rho) \cdot e^{i \cdot \nu \cdot \phi} = -f(r, \phi).
\end{aligned}$$

Vergleich der Fourier-Koeffizienten liefert, dass die Funktionen $U_\nu(\rho)$ durch die Gleichung

$$-U_\nu''(\rho) - \frac{1}{\rho} \cdot U_\nu'(\rho) + \frac{\nu^2}{\rho^2} \cdot U_\nu(\rho) = r_0^2 \cdot F_\nu(\rho)$$

mit den Randbedingungen

$$|U_\nu(0)| < \infty, \quad U_\nu(1) = 0$$

bestimmt sind. Dies ist die inhomogene Version der in Beispiel 2.16 betrachteten parametrischen Bessel-Gleichung über dem Intervall $[0, 1]$, zu der das Gewicht $w(\rho) = \rho$ gehört. Entwicklung nach den bzgl. w orthogonalen Eigenfunktionen

$$\psi_{\nu k}(\rho) = J_{|\nu|}(\lambda_{|\nu|, k} \cdot \rho), \quad \nu \in \mathbb{Z}$$

mit den Eigenwerten $\lambda_{|\nu|, k}^2$ (wo $\lambda_{|\nu|, k}$ die k -te positive Nullstelle von $J_{|\nu|}$ ist) liefert gemäß Bemerkung 2.23 unter Verwendung der Angaben in Beispiel 2.16 die Lösung

$$U_\nu(\rho) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{1}{\lambda_{|\nu|, k}^2} \cdot \frac{\langle \psi_{\nu k}, r_0^2 \cdot F_\nu \rangle_w}{\langle \psi_{\nu k}, \psi_{\nu k} \rangle_w} \cdot \psi_{\nu k}(\rho) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{2}{\lambda_{|\nu|, k}^2} \cdot \frac{\langle \psi_{\nu k}, r_0^2 \cdot F_\nu \rangle_w}{J_{|\nu|+1}(\lambda_{|\nu|, k})^2} \cdot \psi_{\nu k}(\rho).$$

Mit $u(r, \phi) = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} U_\nu(\rho) \cdot e^{i \cdot \nu \cdot \phi}$ erhalten wir das

Endergebnis: Die Lösung des Randwertproblems

$$\Delta u(r, \phi) = -f(r, \phi), \quad u(r_0, \phi) = 0$$

ist in Polarkoordinaten gegeben durch die Reihenentwicklung

$$u(r, \phi) = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{2}{\lambda_{|\nu|, k}^2} \cdot \frac{\langle \psi_{\nu k}, r_0^2 \cdot F_\nu \rangle_w}{J_{|\nu|+1}(\lambda_{|\nu|, k})^2} \cdot J_{|\nu|} \left(\lambda_{|\nu|, k} \cdot \frac{r}{r_0} \right) \cdot e^{i \cdot \nu \cdot \phi}$$

mit

$$\begin{aligned}
 \boxed{\langle \psi_{\nu k}, r_0^2 \cdot F_\nu \rangle_w} &= \int_0^1 \rho \cdot r_0^2 \cdot F_\nu(\rho) \cdot J_{|\nu|}(\lambda_{|\nu|,k} \cdot \rho) d\rho \\
 &= \frac{r_0^2}{2 \cdot \pi} \cdot \int_0^1 \int_0^{2\pi} \rho \cdot f(\rho \cdot r_0, \phi) \cdot e^{-i \cdot \nu \cdot \phi} \cdot J_{|\nu|}(\lambda_{|\nu|,k} \cdot \rho) d\phi d\rho \\
 &\stackrel{(r=\rho \cdot r_0)}{=} \boxed{\frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_0^{r_0} \int_0^{2\pi} r \cdot f(r, \phi) \cdot e^{-i \cdot \nu \cdot \phi} \cdot J_{|\nu|}\left(\lambda_{|\nu|,k} \cdot \frac{r}{r_0}\right) d\phi dr.}
 \end{aligned}$$

Abschließend soll noch die passendste (weil 2-dimensionale) Sichtweise dieser Lösung vorgestellt werden. Auf dem Gebiet $\Omega =$ Kreis mit Radius r_0 haben wir ein 2-dimensionales Orthogonalsystem benutzt, das in Polarkoordinaten durch

$$\Psi_{\nu k}(r, \phi) = J_{|\nu|}\left(\lambda_{|\nu|,k} \cdot \frac{r}{r_0}\right) \cdot e^{i \cdot \nu \cdot \phi}, \quad \nu \in \mathbb{Z}, \quad k \in \mathbb{N}$$

gegeben ist. Es besteht aus den Eigenfunktionen des Laplace-Operators, welche den Randbedingungen $\Psi(r_0, \phi) = 0$ genügen:

$$-\Delta \Psi_{\nu k} = \underbrace{\frac{\lambda_{|\nu|,k}^2}{r_0^2}}_{\Lambda_{\nu k}} \cdot \Psi_{\nu k}.$$

Die Normierung dieses Systems bezüglich des 2-dimensionalen Skalarprodukts $\langle \Phi, \Psi \rangle = \iint_{\Omega} \overline{\Phi} \cdot \Psi dx dy = \int_0^{r_0} \int_0^{2\pi} \overline{\Phi} \cdot \Psi \cdot r dr d\phi$ ist

$$\langle \Psi_{\nu k}, \Psi_{\nu' k'} \rangle = \frac{r_0^2}{2} \cdot \left(J_{|\nu|+1}(\lambda_{|\nu|,k}) \right)^2 \cdot 2 \cdot \pi \cdot \delta_{\nu \nu'} \cdot \delta_{k k'}.$$

In Analogie zu Bemerkung 2.23 ist die Lösung von $-\Delta u = f$ durch die 2-dimensionale Fourier-Reihe

$$u(r, \phi) = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{1}{\Lambda_{\nu k}} \cdot \frac{\langle \Psi_{\nu k}, f \rangle}{\langle \Psi_{\nu k}, \Psi_{\nu k} \rangle} \cdot \Psi_{\nu k}(r, \phi)$$

mit den Eigenwerten $\Lambda_{\nu k} = \frac{\lambda_{|\nu|,k}^2}{r_0^2}$ des Operators $L = -\Delta$ und den Fourier-Koeffizienten

$$\langle \Psi_{\nu k}, f \rangle = \iint_{\Omega} \overline{\Psi_{\nu k}} \cdot f dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^{r_0} J_{|\nu|}\left(\lambda_{|\nu|,k} \cdot \frac{r}{r_0}\right) \cdot e^{-i \cdot \nu \cdot \phi} \cdot f(r, \phi) \cdot r dr d\phi$$

gegeben. Verfolgt man alle Konstanten, so sieht man leicht, dass dieses Ergebnis mit der weiter oben gegebenen Darstellung der Lösung übereinstimmt.

Kapitel 3

Komplexe Funktionen

↓22.1.03

Die Theorie differenzierbarer (analytischer) komplexer Funktion $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ist eine der schönsten Teildisziplinen der Analysis. Von den zahlreichen Anwendungen beschränken wir uns hier auf den „Residuen-Satz“, mit dem man die speziellen Werte vieler bestimmter Integral berechnen kann. Als Literatur zu diesem Kapitel empfehle ich wärmstens

[Jän] KLAUS JÄNICH: *Funktionentheorie – Eine Einführung*, Springer, 1999.

Es handelt sich um ein sehr gut lesbares, recht elementares Büchlein mit nur 123 Seiten, in dem die wichtigsten Tatsachen der Funktionentheorie übersichtlich dargelegt werden.

3.1 Differenzierbarkeit in \mathbb{C}

Definition 3.1: (Komplexe Differenzierbarkeit)

Eine Funktion $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ heißt „**am Punkt** $z \in \mathbb{C}$ (**komplex**) **differenzierbar**“, wenn der Grenzwert

$$\frac{d}{dz} f(z) = f'(z) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$

existiert (wobei für den Grenzwert $h \in \mathbb{C}$ betrachtet wird). Eine in allen Punkten eines offenen¹ Gebiets $U \subset \mathbb{C}$ differenzierbare Funktion heißt „**auf U analytisch**“ (oder auch „**holomorph**“). Das Gebiet U wird als „**Holomorphie-Gebiet**“ von $f(z)$ bezeichnet.

¹Intuitiv bedeutet „offenes Gebiet“, dass der Rand des Gebiets nicht Teil des Gebiets ist. Genauer: zu jedem $z \in U$ gibt es eine Kreisscheibe um z , die komplett in U enthalten ist.

Beispiel 3.2: Wegen der analogen Definition der Ableitung gelten alle für Funktionen von \mathbb{R} nach \mathbb{R} bekannten Rechenregeln (Summenregel, Produktregel, Quotientenregel, Kettenregel) auch in \mathbb{C} . Damit sind Polynome und rationale Funktionen überall in \mathbb{C} differenzierbar (außer, bei rationalen Funktionen, an den Polstellen). Weiterhin sind die Exponentialfunktion und die trigonometrischen Funktionen

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}, \quad \sin(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot z^{2k+1}}{(2 \cdot k + 1)!}, \quad \cos(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot z^{2k}}{(2 \cdot k)!}$$

auf ganz \mathbb{C} differenzierbar, es gilt wie im Reellen:

$$\frac{d}{dz} e^z = e^z, \quad \frac{d}{dz} \sin(z) = \cos(z), \quad \frac{d}{dz} \cos(z) = -\sin(z).$$

Bemerkung 3.3: *Trotz der analogen Definition und Rechenregeln ist die Differenzierbarkeit in \mathbb{C} eine ungleich stärkere Regularitätsbedingung als die Differenzierbarkeit von Funktionen von \mathbb{R} nach \mathbb{R} . Wie wir später sehen werden, ist eine auf einem offenen Gebiet U einmal differenzierbare (= analytische = holomorphe) Funktion **automatisch** unendlich oft differenzierbar und wird **automatisch** durch ihre Taylor-Reihe dargestellt! Ein erstes Indiz für diese starke Regularitätsstruktur liefert der folgende Satz, der besagt, dass Real- und Imaginärteil differenzierbarer Funktionen bestimmte partielle Differentialgleichungen erfüllen.*

Satz 3.4: (Die Cauchy–Riemannschen Differentialgleichungen)

Seien $x, y, u(x, y), v(x, y) \in \mathbb{R}$. Die Funktion

$$f(z) = f(x + i \cdot y) = u(x, y) + i \cdot v(x, y)$$

ist auf einem offenen Gebiet $U \in \mathbb{C}$ genau dann komplex differenzierbar, wenn dort die **Cauchy–Riemannschen Differentialgleichungen**

$$u_x(x, y) = v_y(x, y), \quad u_y(x, y) = -v_x(x, y)$$

erfüllt sind (mit $u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$ etc.).

Beweis: Sei $z \in U$. Wir setzen $\Delta z = h = a + i \cdot b$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ und betrachten den Differenzenquotienten

$$\begin{aligned} \frac{\Delta f}{\Delta z} &= \frac{f(z+h) - f(z)}{h} \\ &= \frac{(u(x+a, y+b) - u(x, y)) + i \cdot (v(x+a, y+b) - v(x, y))}{a + i \cdot b}. \end{aligned}$$

Für $b = 0$ gilt

$$\frac{\Delta f}{\Delta z} = \frac{(u(x+a, y) - u(x, y)) + i \cdot (v(x+a, y) - v(x, y))}{a}.$$

Bei komplexer Differenzierbarkeit folgt im Grenzwert $a \rightarrow 0$: $f'(z) = u_x + i \cdot v_x$.
Für $a = 0$ gilt

$$\frac{\Delta f}{\Delta z} = \frac{(u(x, y+b) - u(x, y)) + i \cdot (v(x, y+b) - v(x, y))}{i \cdot b}.$$

Bei komplexer Differenzierbarkeit folgt im Grenzwert $b \rightarrow 0$: $f'(z) = \frac{u_y + i \cdot v_y}{i} = v_y - i \cdot u_y$. Aus der Differenzierbarkeit folgen also die Cauchy–Riemanschen Dglen

$$f'(z) = u_x + i \cdot v_x = v_y - i \cdot u_y \quad \Rightarrow \quad u_x = v_y, \quad v_x = -u_y.$$

Umgekehrt: per reeller Taylor–Entwicklung gilt

$$u(x+a, y+b) = u(x, y) + a \cdot u_x(x, y) + b \cdot u_y(x, y) + o(\sqrt{a^2 + b^2}),$$

$$v(x+a, y+b) = v(x, y) + a \cdot v_x(x, y) + b \cdot v_y(x, y) + o(\sqrt{a^2 + b^2}).$$

Gelten die Cauchy–Riemanschen Dglen, so folgt

$$\begin{aligned} \frac{\Delta f}{\Delta z} &= \frac{a \cdot u_x + b \cdot \overbrace{u_y}^{=-v_x} + i \cdot (a \cdot v_x + b \cdot \overbrace{v_y}^{=u_x}) + o(\sqrt{a^2 + b^2})}{a + i \cdot b} \\ &= \frac{a \cdot u_x - b \cdot v_x + i \cdot (a \cdot v_x + b \cdot u_x) + o(\sqrt{a^2 + b^2})}{a + i \cdot b} \\ &= \frac{(a + i \cdot b) \cdot (u_x + i \cdot v_x) + o(\sqrt{a^2 + b^2})}{a + i \cdot b} \\ &= u_x + i \cdot v_x + \frac{o(\sqrt{a^2 + b^2})}{a + i \cdot b}. \end{aligned}$$

Der komplexe Grenzwert $h = a + i \cdot b \rightarrow 0$ von $\Delta f / \Delta z$ existiert damit und ergibt $f'(z) = u_x + i \cdot v_x = v_y - i \cdot u_y$.

Q.E.D.

Bemerkung 3.5: Bei differenzierbaren Funktionen sind Real– und Imaginärteil nicht unabhängig! Für differenzierbare Funktionen $f_1 = u + i \cdot v_1$, $f_2 = u + i \cdot v_2$ mit dem selben Realteil u folgt für die differenzierbare Differenzfunktion $f_1 - f_2 = i \cdot (v_1 - v_2)$ aus den Cauchy–Riemanschen Dglen

$$(v_1 - v_2)_x = 0, \quad (v_1 - v_2)_y = 0 \quad \Rightarrow \quad v_1 - v_2 = \text{const},$$

d.h., der Realteil bestimmt den Imaginärteil eindeutig bis auf eine additive Konstante.

Bemerkung 3.6: Setzen wir voraus, dass die differenzierbare Funktion $f = u + i \cdot v$ zweifach stetig differenzierbar ist (was, wie wir sehen werden, automatisch erfüllt ist), so folgt mit der Symmetrie zweiter Ableitungen aus den Cauchy–Riemannschen Dglen

$$u_{xx} = v_{yx} = v_{xy} = (-u_y)_y, \quad v_{xx} = (-u_y)_x = -u_{xy} = -(v_y)_y.$$

Sowohl Real- als auch Imaginärteil differenzierbarer Funktionen erfüllen also die Laplace–Gleichung

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad v_{xx} + v_{yy} = 0.$$

3.2 Konturintegrale in \mathbb{C}

Der Begriff komplexer Wegintegrale ist von entscheidender Bedeutung. Zunächst der Begriff einer komplexen Kurve:

Definition 3.7: (Parametrisierte Kurve)

Eine „**Kurvenparametrisierung**“ ist eine stetige Abbildung

$$t \in [a, b] \in \mathbb{R} \rightarrow z(t) \in \mathbb{C}.$$

Die zugeordnete „**Kurve**“ („**Weg**“, „**Kontur**“) ist das Bild $\Gamma = \{z(t), t \in [a, b]\} \subset \mathbb{C}$ der Parametrisierung.

24.1.02↓

Beispiel 3.8: a) Ein wichtiges Beispiel eines Wegs in \mathbb{C} ist die gerade Linie von einem Punkt $z_0 \in \mathbb{C}$ zu einem anderen Punkt $z_1 \in \mathbb{C}$. Eine mögliche Parametrisierung ist

$$t \in [0, 1] \rightarrow z(t) = z_0 + t \cdot (z_1 - z_0).$$

b) Ein anderes wichtiges Beispiel einer (geschlossenen) Kurve ist der Kreis mit Radius r um den Mittelpunkt z_0 mit der Parametrisierung

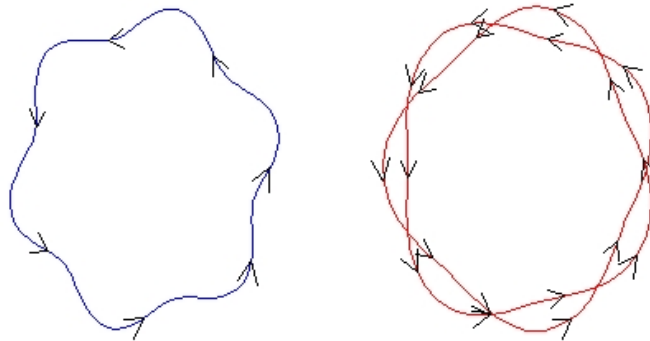
$$t \in [0, 2 \cdot \pi] \rightarrow z(t) = z_0 + r \cdot e^{i \cdot t} = z_0 + r \cdot (\cos(t) + i \cdot \sin(t)).$$

Vereinbarung 3.9:

Aus technischen Gründen nehmen wir im Folgenden als zusätzliche Bedingung an unsere Kurven immer implizit „**Doppelpunktfreiheit**“ an (ohne dies in den folgenden Formulierungen jeweils explizit zu erwähnen).

Damit ist gemeint, dass aus $z(t_1) = z(t_2)$ mit $t_1, t_2 \in (a, b)$ immer $t_1 = t_2$ folgen muss: die Kurven sollen sich nicht selbst schneiden. Die Endpunkte $z(a)$, $z(b)$ dürfen aber übereinstimmen („geschlossene Kurven“).

Die Doppelpunktfreiheit ist keine strukturell wichtige Bedingung: man kann alle folgenden Aussagen mit leichten Modifikationen auch für Kurven mit Doppelpunkten formulieren. Man braucht dabei aber für geschlossene Kurven das Konzept der „Windungszahl der Kurve um einen Punkt“ (welche angibt, wie oft die Kurve um den Punkt herumläuft). Die folgenden Kurven haben bezgl. eines Punktes im von den Kurven eingeschlossenen Gebiet die (anschaulich offensichtlichen) Windungszahlen 1 bzw. 2:



Man kann diese Windungszahl einer geschlossenen Kurve um einen Punkt folgendermassen einführen: Die Kurve $z(t)$ hat eine „Orientierung“ von kleinen t -Werten zu großen t -Werten, die man sich als tangentielle Pfeile an den Kurvenpunkten vorstellen kann. Man startet nun in dem Punkt, dessen Windungszahl bestimmt werden soll und läuft auf einem beliebigen Weg ins Unendliche, wobei dieser Weg die Kurve jeweils transversal schneiden soll (wenn dieser Weg die Kurve schneidet). Man zählt alle Schnittpunkte des Wegs mit der Kurve, wo die Kurve den Weg von „rechts nach links“ schneidet und zieht die Zahl aller Schnittpunkte ab, wo die Kurve von „links nach rechts“ schneidet. Das Ergebnis ist die Windungszahl.

Punkte weit außerhalb der Kurven haben die Windungszahl 0, denn man kann ins Unendliche gelangen, ohne die Kurve schneiden zu müssen. Die Punkte mit Windungszahl $\neq 0$ definieren das „von der Kurve eingeschlossene Gebiet“.

Für die von uns im Folgenden betrachteten geschlossenen Kurven Γ setzen wir mit der Doppelpunktfreiheit voraus, dass $\mathbb{C} \setminus \Gamma$ sich zerlegt in Punkte mit Windungszahl 0 (das „Außengebiet“ der Kurve) und Punkte mit Windungszahl ± 1 (das von der Kurve eingeschlossene Gebiet). Haben die inneren Punkte alle die Windungszahl 1, sprechen wir von einer „positiv“ (gegen den Uhrzeigersinn) orientierten geschlossenen Kurve. Haben die inneren Punkte alle die Windungszahl -1 , sprechen wir von einer „negativ“ (im Uhrzeigersinn) orientierten geschlos-

senen Kurve.

Definition 3.10: (Reelle Ableitungen und Integrale)

Kurven können problemlos nach dem reellen Kurvenparameter differenziert werden bzw. es kann über einen reellen Parameter integriert werden:

- a) Eine parametrisierte Kurve $t \rightarrow z(t) = u(t) + i \cdot v(t) \in \mathbb{C}$ heißt „**differenzierbar**“, wenn der Realteil $u(t) = \Re(z(t))$ und der Imaginärteil $v(t) = \Im(z(t))$ differenzierbar sind. Die Ableitung einer Kurve $z(t)$ nach dem reellen „**Kurvenparameter**“ t wird definiert als

$$\frac{dz(t)}{dt} = \frac{du(t)}{dt} + i \cdot \frac{dv(t)}{dt}.$$

- b) Das Integral einer komplexwertigen Funktion $f(t) \in \mathbb{C}$ eines reellen Parameters t wird definiert als

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^b u(t) dt + i \cdot \int_a^b v(t) dt$$

mit $u(t) = \Re(f(t))$, $v(t) = \Im(f(t))$.

Mit diesen Hilfsbegriffen läßt sich der zentrale Begriff des komplexen Kurvenintegrals einführen:

Definition 3.11: (Komplexes Wegintegral)

Sei $t \in [a, b] \rightarrow z(t)$ eine differenzierbare Parametrisierung einer Kurve Γ . Das „**Wegintegral über f von $z(a)$ nach $z(b)$ längs der Kurve Γ** “ wird definiert als

$$\int_{z(a)}^{z(b)} f(z) dz := \int_a^b f(z(t)) \cdot \frac{dz(t)}{dt} dt.$$

Für eine geschlossene Kurve Γ mit $z(a) = z(b)$ benutzen wir auch das Symbol $\oint_{\Gamma} f(z) dz$.

Beispiel 3.12: a) Betrachte das Integral über $f(z) = z^n$, $n > 0$, längs der Geraden Γ vom Nullpunkt zum Punkt z_1 . Wähle dazu die Parametrisierung $z(t) = t \cdot z_1$, $t \in [0, 1]$:

$$\int_{\Gamma} z^n dz = \int_0^1 (z(t))^n \cdot \frac{dz(t)}{dt} dt = \int_0^1 (t \cdot z_1)^n \cdot z_1 t dt = z_1^{n+1} \cdot \int_0^1 t^n dt = \frac{z_1^{n+1}}{(n+1)}.$$

b) Betrachte das Integral über $f(z) = \frac{1}{(z-z_0)^n}$ längs des Kreises Γ mit Radius r um den Punkt z_0 . Wähle dazu die Parametrisierung $z(t) = z_0 + r \cdot e^{i \cdot t}$, $t \in [0, 2 \cdot \pi]$. Mit

$$\frac{dz(t)}{dt} = i \cdot r \cdot e^{i \cdot t}$$

ergibt sich

$$\oint_{\Gamma} \frac{dz}{(z - z_0)^n} = \int_0^{2\pi} \frac{i \cdot r \cdot e^{i \cdot t} dt}{r^n \cdot e^{i \cdot n \cdot t}} = i \cdot r^{1-n} \cdot \int_0^{2\pi} e^{i \cdot (1-n) \cdot t} dt.$$

Für $n \neq 1$ ist dies

$$\frac{i \cdot r^{1-n}}{i \cdot (1-n)} \cdot \left[e^{i \cdot (1-n) \cdot t} \right]_{t=0}^{t=2\pi} = 0,$$

während sich für $n = 1$ offensichtlich $2 \cdot \pi \cdot i$ ergibt. Man erhält also:

$$\frac{1}{2 \cdot \pi \cdot i} \cdot \oint_{\Gamma} \frac{dz}{(z - z_0)^n} = \begin{cases} 1 & \text{für } n = 1, \\ 0 & \text{für } n \neq 1. \end{cases}$$

↓29.1.02

Satz 3.13: (Eigenschaften von Kurvenintegralen)

- a) Ein Kurvenintegral vom Punkt z_a zum Punkt z_b längs einer Kurve hängt nicht von der Parametrisierung ab, sondern nur vom Bild Γ der Parametrisierung, dem Startpunkt z_a und dem Endpunkt z_b . Vertauscht man Start- und Endpunkt, so wechselt das Vorzeichen:

$$\int_{z_a}^{z_b} f(z) dz = - \int_{z_b}^{z_a} f(z) dz.$$

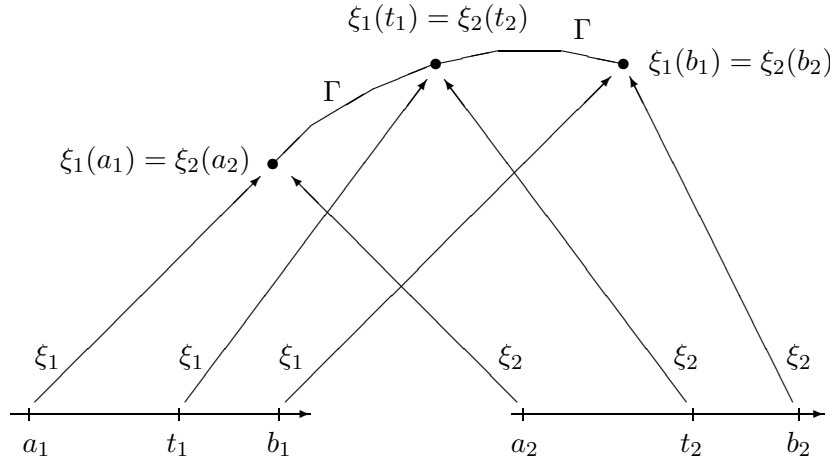
- b) Ein Kurvenintegral über eine geschlossene Kurve hängt nicht vom Startpunkt (= Endpunkt) ab, sondern nur vom „Durchlaufsin“ („in Uhrzeigerichtung“ oder „gegen die Uhrzeigerichtung“). Wird kein Durchlaufsin explizit angegeben, setzen wir „Durchlauf gegen die Uhrzeigerichtung“ voraus. Sind Γ_1 und Γ_2 die selben geschlossenen Kurven, die in unterschiedlicher Richtung durchlaufen werden, so gilt

$$\oint_{\Gamma_1} f(z) dz = - \oint_{\Gamma_2} f(z) dz.$$

- c) Zerlegt man eine Kurve Γ_{ab} von z_a nach z_b durch Wahl eines Zwischenpunktes $z_c \in \Gamma$ in zwei Teilkurven Γ_{ac} von z_a nach z_c und Γ_{cb} von z_c nach z_b , so gilt

$$\int_{z_a}^{z_b} f(z) dz = \int_{z_a}^{z_c} f(z) dz + \int_{z_c}^{z_b} f(z) dz.$$

Beweis: a) Seien $\xi_1(t_1)$, $t_1 \in [a_1, b_1]$ und $\xi_2(t_2)$, $t_2 \in [a_2, b_2]$ unterschiedliche differenzierbare Parametrisierungen von Γ mit dem selben Durchlaufsinne, also $z_a = \xi_1(a_1) = \xi_2(a_2)$, $z_b = \xi_1(b_1) = \xi_2(b_2)$, so wird durch $\xi_1(t_1) = \xi_2(t_2)$ eine streng monoton wachsende Abbildung $t_1 \rightarrow t_2(t_1)$ definiert:



Durch Differenzieren von $\xi_1(t_1) = \xi_2(t_2(t_1))$ nach t_1 folgt mit der Kettenregel

$$\frac{d\xi_1(t_1)}{dt_1} = \frac{d\xi_2(t_2)}{dt_2} \cdot \frac{dt_2}{dt_1},$$

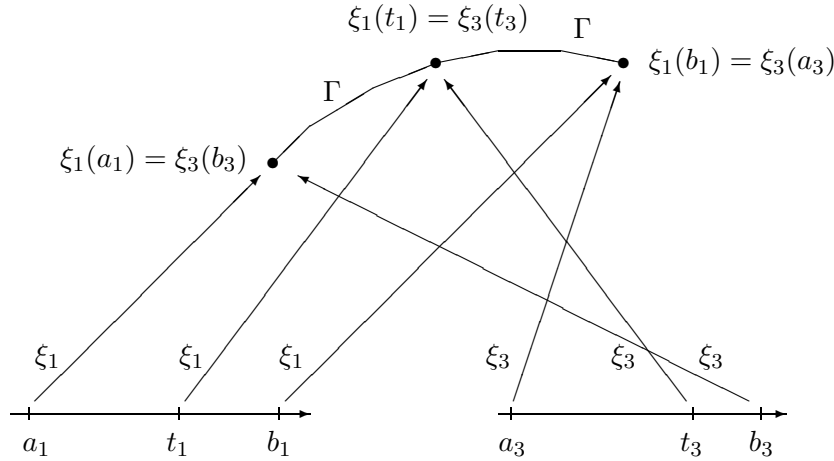
womit gilt:

$$\int_{z_a}^{z_b} f(z) dz = \int_{a_1}^{b_1} f(\xi_1(t_1)) \cdot \frac{d\xi_1(t_1)}{dt_1} dt_1 = \int_{a_1}^{b_1} f(\xi_1(t_1)) \cdot \frac{d\xi_2(t_2)}{dt_2} \cdot \frac{dt_2}{dt_1} dt_1.$$

Die Integralsubstitution $t_2 = t_2(t_1)$ liefert damit:

$$\int_{z_a}^{z_b} f(z) dz = \int_{a_1}^{b_1} f(\xi_1(t_1)) \cdot \frac{d\xi_1(t_1)}{dt_1} dt_1 = \int_{a_2}^{b_2} f(\xi_2(t_2)) \cdot \frac{d\xi_2(t_2)}{dt_2} dt_2,$$

d.h., die Parametrisierungen $\xi_1(t_1)$ und $\xi_2(t_2)$ führen auf den selben Integralwert. Betrachten wir nun eine dritte Parametrisierung $\xi_3 : t_3 \in [a_3, b_3] \rightarrow \Gamma$ mit einem anderen Durchlaufsinne, die von $\xi_3(a_3) = \xi_1(b_1) = z_b$ nach $\xi_3(b_3) = \xi_1(a_1) = z_a$ läuft, wenn t_3 von a_3 nach b_3 läuft. Durch $\xi_1(t_1) = \xi_3(t_3)$ erhält man nun eine monoton fallende Abbildung $t_1 \rightarrow t_3(t_1)$:



Mit

$$\frac{d\xi_1(t_1)}{dt_1} = \frac{d\xi_3(t_3)}{dt_3} \cdot \frac{dt_3}{dt_1}$$

ergibt sich wiederum

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_{a_1}^{b_1} f(\xi_1(t_1)) \cdot \frac{d\xi_1(t_1)}{dt_1} dt_1 = \int_{a_1}^{b_1} f(\xi_1(t_1)) \cdot \frac{d\xi_3(t_3)}{dt_3} \cdot \frac{dt_3}{dt_1} dt_1.$$

Die Integralsubstitution $t_3 = t_3(t_1)$ liefert diesmal

$$\begin{aligned} \int_{z_a}^{z_b} f(z) dz &= \int_{a_1}^{b_1} f(\xi_1(t_1)) \cdot \frac{d\xi_1(t_1)}{dt_1} dt_1 = \int_{b_3}^{a_3} f(\xi_3(t_3)) \cdot \frac{d\xi_3(t_3)}{dt_3} dt_3 \\ &= - \int_{a_3}^{b_3} f(\xi_3(t_3)) \cdot \frac{d\xi_3(t_3)}{dt_3} dt_3 = - \int_{z_b}^{z_a} f(z) dz. \end{aligned}$$

c) Sei $z(t) : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ eine Parametrisierung der Kurve. Es gilt

$$\begin{aligned} \int_{z_a}^{z_b} f(z) dz &= \int_a^b f(z(t)) \cdot \frac{dz(t)}{dt} dt = \int_a^c f(z(t)) \cdot \frac{dz(t)}{dt} dt + \int_c^b f(z(t)) \cdot \frac{dz(t)}{dt} dt \\ &= \int_{z_a}^{z_c} f(z) dz + \int_{z_c}^{z_b} f(z) dz, \end{aligned}$$

wobei $z(t)$ mit $t \in [a, c]$ bzw. $t \in [c, b]$ Parametrisierungen von Γ_{ac} bzw. Γ_{cb} sind.

b) Sei $z(t)$ mit $t \in [a, b]$ eine Parametrisierung mit Start- und Endpunkt $z_a = z(a) = z(b)$. Sei $c \in [a, b]$, $z_c = z(c)$. Nach c) gilt:

$$\oint_{\Gamma} f(z) dz = \int_{z_a}^{z_b} f(z) dz = \underbrace{\int_{z_a}^{z_c} f(z) dz}_{(*)} + \underbrace{\int_{z_c}^{z_b} f(z) dz}_{(**)}$$

$$= \underbrace{\int_{z_c}^{z_b} f(z) dz}_{(**)} + \underbrace{\int_{z_a}^{z_c} f(z) dz}_{(*)} = \underbrace{\int_{z_c}^{z_b} f(z) dz}_{(**)} + \underbrace{\int_{z_b}^{z_c} f(z) dz}_{(*)}$$

wobei $\Gamma_{ac} = \Gamma_{bc}$ bzw. Γ_{cb} die Teilkurven von $z_a = z_b$ bis z_c bzw. von z_c bis $z_b = z_a$ der geschlossenen Gesamtkurve Γ_{ab} sind. Die Summe der beiden letzten Integrale läßt sich auffassen als das Kurvenintegral vom Startpunkt z_c aus (über den Zwischenpunkt $z_b = z_a$) zum Endpunkt z_c . Unabhängig von der Wahl von c ergibt sich als Integralwert für den Start = Endpunkt z_c also immer der selbe Wert. Öffnet man die Kurve ein wenig, d.h., wählt man $z_b \in \Gamma$ mit $z_b \approx z_a$, $z_b \neq z_a$, so gilt nach c):

$$\int_{z_a}^{z_b} f(z) dz = - \int_{z_b}^{z_a} f(z) dz,$$

wobei sich der Durchlaufsin im Durchlauf von z_a nach z_b bzw. von z_b nach z_a ändert. Läßt man z_b gegen z_a streben, so geht die Kurve wieder in eine geschlossene Kurve über, wobei der Integralwert je nach Umlaufsinn ein anderes Vorzeichen annimmt.

Q.E.D.

Bemerkung 3.14: Man nimmt Satz 3.13.c) zum Anlass, Kurvenintegrale auch für nur stückweise differenzierbare Kurven $\Gamma_{0n} = \Gamma_{01} \cup \Gamma_{12} \cup \Gamma_{23} \cup \dots$ zu definieren, die aus n differenzierbaren Teilkurven Γ_{01} , Γ_{12} etc. zusammengesetzt sind:

$$\int_{\Gamma_{0n}} f(z) dz = \int_{z_0}^{z_1} f(z) dz + \int_{z_1}^{z_2} f(z) dz + \int_{z_2}^{z_3} f(z) dz + \dots$$

Betrachte z.B. die Berandung Γ eines Rechtecks, die die Vereinigung von 4 glatten Seiten (Geradenstücke) ist.

3.3 Der Cauchysche Integralsatz

Interpretiert man $z = x + i \cdot y \in \mathbb{C}$ als den Vektor $\vec{z} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, so stimmt die Definition 3.11

$$\int_{z(a)}^{z(b)} f(z) dz = \int_a^b f(z(t)) \cdot \frac{dz(t)}{dt} dt.$$

des komplexen Kurvenintegrals mit der Definition des Kurvenintegrals

$$\int_{\vec{z}(a)}^{\vec{z}(b)} \langle f(\vec{z}), d\vec{z} \rangle = \int_a^b \langle \vec{f}_1(\vec{z}(t)) + i \cdot \vec{f}_2(\vec{z}(t)), \frac{d\vec{z}(t)}{dt} \rangle dt$$

im \mathbb{R}^2 überein, wenn wir $f(z(t)) = u(z(t)) + i \cdot v(z(t))$ (mit $u = \Re(f(z))$, $v = \Im(f(z))$) in die beiden Vektorfelder

$$\vec{f}_1(\vec{z}) = \begin{pmatrix} u(\vec{z}) \\ -v(\vec{z}) \end{pmatrix}, \quad \vec{f}_2(\vec{z}) = \begin{pmatrix} v(\vec{z}) \\ u(\vec{z}) \end{pmatrix}$$

zerlegen:

$$\begin{aligned} \langle \vec{f}_1(\vec{z}(t)) + i \cdot \vec{f}_2(\vec{z}(t)), \frac{d\vec{z}(t)}{dt} \rangle &= \left\langle \begin{pmatrix} u + i \cdot v \\ -v + i \cdot u \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} dx/dt \\ dy/dt \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= (u + i \cdot v) \cdot \frac{dx}{dt} + (-v + i \cdot u) \cdot \frac{dy}{dt} = (u + i \cdot v) \cdot \left(\frac{dx}{dt} + i \cdot \frac{dy}{dt} \right) = f(z) \cdot \frac{dz}{dt}. \end{aligned}$$

Aus der Vektoranalysis ist bekannt, dass das Kurvenintegral

$$\int_{\vec{z}(a)}^{\vec{z}(b)} \langle \vec{f}, d\vec{z} \rangle = \int_{\vec{z}(a)}^{\vec{z}(b)} \left\langle \begin{pmatrix} a(\vec{z}) \\ b(\vec{z}) \end{pmatrix}, d\vec{z} \right\rangle$$

wegunabhängig ist, wenn das Vektorfeld ein Potential hat, d.h., wenn \vec{f} ein Gradientenfeld ist. Dies ist aber genau dann der Fall, wenn die Komponenten $a(\vec{z})$, $b(\vec{z})$ des Vektorfeldes die Bedingungen $a_y = b_x$ erfüllen. Für die beiden Vektorfelder \vec{f}_1 bzw. \vec{f}_2 , welche die komplexe Funktion $f(z)$ kodieren, ist dies erfüllt, wenn

$$u_y = -v_x \quad \text{bzw.} \quad v_y = u_x$$

gilt. Dies sind aber genau die Cauchy–Riemannschen Differentialgleichungen aus Satz 3.4, die für komplex differenzierbares (analytisches, holomorphes) $f(z)$ immer gelten! Wir erhalten damit:

Satz 3.15: (Wegunabhängigkeit komplexer Wegintegrale)

Sei U ein offenes Gebiet in \mathbb{C} , auf dem die Funktion $f(z)$ differenzierbar ist. Seien $\Gamma_1, \Gamma_2 \subset U$ Kurven, die jeweils von $z_a \in U$ nach $z_b \in U$ laufen.

Dann gilt:

$$\int_{\Gamma_1}^{z_b} f(z) dz = \int_{\Gamma_2}^{z_b} f(z) dz.$$

Die übliche (äquivalente) Formulierung ist:

Satz 3.16: (Der Cauchysche Integralsatz)

Sei U ein offenes Gebiet in \mathbb{C} , auf dem die Funktion $f(z)$ differenzierbar ist. Dann gilt für jede geschlossene Kurve $\Gamma \subset U$:

$$\oint_{\Gamma} f(z) dz = 0.$$

Beweis: Die Aussagen 3.16 und 3.15 sind äquivalent:

Startet man mit zwei Kurven Γ_1, Γ_2 , die beide von z_a nach z_b laufen, so erhält man eine geschlossene Kurve $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ von z_a nach z_a , wenn man Γ_1 von z_a nach z_b und dann Γ_2 rückwärts von z_b nach z_a durchläuft. Gilt Satz 3.16, so folgt Satz 3.15:

$$\int_{\Gamma_1}^{z_b} f(z) dz + \int_{\Gamma_2}^{z_a} f(z) dz = 0 \Rightarrow \int_{\Gamma_1}^{z_b} f(z) dz = - \int_{\Gamma_2}^{z_a} f(z) dz = \int_{\Gamma_2}^{z_b} f(z) dz.$$

Umgekehrt, gilt Satz 3.15, so können wir jeden geschlossenen Weg Γ von z_a nach z_a zerlegen, indem wir einen beliebigen Zwischenpunkt $z_b \in \Gamma$ betrachten. Mit dem Teilweg Γ_1 von z_a nach z_b und Γ_2 von z_b zurück nach z_a folgt

$$\oint_{\Gamma} f(z) dz = \int_{\Gamma_1}^{z_b} f(z) dz + \int_{\Gamma_2}^{z_a} f(z) dz = \int_{\Gamma_1}^{z_b} f(z) dz - \int_{\Gamma_2}^{z_b} f(z) dz = 0.$$

Q.E.D.

Bemerkung 3.17: Die Formulierung 3.16 des Cauchyschen Integralsatzes liefert eines der wichtigsten Hilfsmittel der Funktionentheorie:

Das Deformationsprinzip: Innerhalb eines Holomorphie-Gebietes einer Funktion $f(z)$ kann ein Weg zwischen zwei Punkten beliebig deformiert werden, ohne den Wert des Kurvenintegrals über $f(z)$ zwischen den Punkten zu ändern.

Achtung: bei der Deformation darf die Kurve keinen Punkt überstreichen, an dem die Funktion nicht differenzierbar ist. Typischerweise bleibt die Deformation an Singularitäten „hängen“.

Beispiel 3.18: Sei Γ eine beliebige geschlossene Kurve. Sei $z_0 \in \mathbb{C}$ ein beliebiger Punkt innerhalb des von Γ umschlossenen Gebiets. Wir betrachten $f(z) = (z - z_0)^n, n \in \mathbb{Z}$. Das Holomorphie-Gebiet von f ist \mathbb{C} für $n \geq 0$ und $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ für $n < 0$. Wir können damit Γ stets zu einen Kreis um z_0 deformieren. Mit Beispiel 3.12 folgt

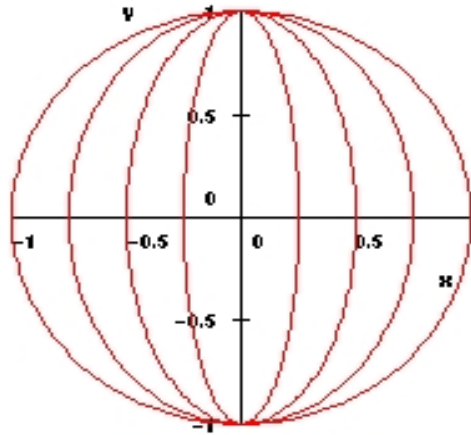
$$\frac{1}{2 \cdot \pi \cdot i} \cdot \oint_{\Gamma} (z - z_0)^n dz = \begin{cases} 1 & \text{für } n = -1, \\ 0 & \text{für } n \neq -1. \end{cases}$$

Liegt z_0 nicht im von Γ umschlossenen Gebiet, folgt mit Satz 3.16 $\oint_{\Gamma} f(z) dz = 0$ für jeden Wert von n .

Beispiel 3.19: Betrachte $f(z) = \frac{1}{2 \cdot i \cdot z}$ und die Kurvenschar

$$\Gamma_c : t \in [-\pi/2, \pi/2] \rightarrow c \cdot \cos(t) + i \cdot \sin(t), \quad c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Diese Kurven sind Ellipsenhälften mit den Halbachsen $|c|$ in x -Richtung und 1 in y -Richtung, die für jedes c vom Punkt $-i$ zum Punkt i laufen:



Man berechnet

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_c}^i \frac{dz}{2 \cdot i \cdot z} &= \frac{1}{2 \cdot i} \cdot \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{-c \cdot \sin(t) + i \cdot \cos(t)}{c \cdot \cos(t) + i \cdot \sin(t)} dt \\ &= \frac{1}{2 \cdot i} \cdot \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{(-c \cdot \sin(t) + i \cdot \cos(t)) \cdot (c \cdot \cos(t) - i \cdot \sin(t))}{c^2 \cdot \cos^2(t) + \sin^2(t)} dt \\ &= \frac{1}{2 \cdot i} \cdot \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{(1 - c^2) \cdot \sin(t) \cdot \cos(t) + c \cdot i}{c^2 + (1 - c^2) \cdot \sin^2(t)} dt \stackrel{(*)}{=} \frac{1}{2 \cdot i} \cdot \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{i \cdot c dt}{c^2 + (1 - c^2) \cdot \sin^2(t)} \\ &\stackrel{(**)}{=} \int_0^{\pi/2} \frac{c dt}{c^2 + (1 - c^2) \cdot \sin^2(t)}, \end{aligned}$$

wobei in (*) ein Teil des Integranden verschwindet, da dieser Anteil eine ungerade Funktion ist und in (**) benutzt wird, dass der verbleibende Integrand eine gerade Funktion ist. Das verbleibende Integral kann nun sehr einfach für beliebiges $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ bestimmt werden! Das Holomorphie-Gebiet von $f(z) = \frac{1}{2 \cdot i \cdot z}$ ist $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, d.h., das Integral hängt gar nicht vom Deformationsparameter c ab! Genauer, es hängt nur vom Vorzeichen von c ab, denn für $c < 0$ bzw. $c > 0$ kann c auf einen beliebigen Wert des gleichen Vorzeichens verändert werden, ohne dass die Kurve Γ_c die Singularität $z = 0$ von $f(z)$ überstreicht. Wir brauchen das Integral daher nur für bestimmte Werte von c zu berechnen. Für $c = \pm 1$ ergibt sich sofort

$$\int_0^{\pi/2} \frac{c dt}{c^2 + (1 - c^2) \cdot \sin^2(t)} = \pm \frac{\pi}{2}.$$

Damit haben wir als eine Anwendung der bisherigen Theorie erhalten:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{c^2 + (1-c^2) \cdot \sin^2(t)} = \frac{\pi}{2 \cdot |c|}.$$

Satz 3.20: (Die Cauchysche Integralformel)

Sei $U \subset \mathbb{C}$ ein Holomorphie-Gebiet von $f(z)$. Sei $\Gamma \subset U$ eine beliebige geschlossene Kurve. Für jeden Punkt z_0 im Innern des von Γ umschlossenen Gebiets gilt²

$$f(z_0) = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot i} \cdot \oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

Beweis: Da f als differenzierbare Funktion auch stetig ist, gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ eine Umgebung U_ϵ von z_0 , auf der $|f(z) - f(z_0)| < \epsilon$ gilt. Wir deformieren Γ zu einem (kleinen) Kreis Γ' um z_0 , der innerhalb von $U \cap U_\epsilon$ liegt. Dort gilt nach Beispiel 3.12:

$$f(z_0) = \frac{f(z_0)}{2 \cdot \pi \cdot i} \cdot \oint_{\Gamma'} \frac{dz}{z - z_0},$$

also

$$\frac{1}{2 \cdot \pi \cdot i} \cdot \oint_{\Gamma'} \frac{f(z)}{z - z_0} dz - f(z_0) = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot i} \cdot \oint_{\Gamma'} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz.$$

Mit der Parametrisierung $z(t) = z_0 + r \cdot e^{2 \cdot \pi \cdot i \cdot t}$, $t \in [0, 1]$ des Kreises Γ' folgt

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot i} \cdot \oint_{\Gamma'} \frac{f(z)}{z - z_0} dz - f(z_0) \right| &= \left| \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot i} \cdot \oint_{\Gamma'} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz \right| \\ &= \left| \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot i} \cdot \int_0^1 (f(z) - f(z_0)) \cdot \frac{2 \cdot \pi \cdot i \cdot r \cdot e^{2 \cdot \pi \cdot i \cdot t}}{r \cdot e^{2 \cdot \pi \cdot i \cdot t}} dt \right| \\ &\leq \int_0^1 \underbrace{|f(z) - f(z_0)|}_{< \epsilon} dt < \epsilon. \end{aligned}$$

Da ϵ beliebig klein gewählt werden kann, muss $f(z_0)$ mit der Cauchyschen Integraldarstellung übereinstimmen.

Q.E.D.

²Erlaubt man auch geschlossene Kurven Γ , die sich selbst schneiden, so modifiziert sich diese Aussage zu

$$\frac{1}{2 \cdot \pi \cdot i} \cdot \oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \text{Windungszahl}(z_0) \cdot f(z_0).$$

Bemerkung 3.21: Für eine komplex differenzierbare Funktion sind die Funktionswerte im Innern eines Gebietes bereits eindeutig durch die Funktionswerte auf dem Rand des Gebietes festgelegt und durch die Cauchysche Integraldarstellung des letzten Satzes recht explizit per Integration konstruierbar. In Bemerkung 3.6 hatten wir gesehen, dass Real- und Imaginärteil u, v einer differenzierbaren Funktion der Laplace-Gleichung

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad v_{xx} + v_{yy} = 0$$

genügen. In der Tat ist die Lösung der Laplace-Gleichung innerhalb eines Gebietes durch Vorgabe von Werten auf dem Rand eindeutig bestimmt.

3.4 Potenzreihen

↓31.1.03

Wir sammeln die grundsätzlichen Tatsachen über Potenzreihen und verallgemeinern die (aus dem Reellen bereits bekannten) Aussagen auf die komplexe Ebene.

Definition 3.22: (Komplexe Potenzreihen)

Eine „Potenzreihe um den Punkt $z_0 \in \mathbb{C}$ “ ist eine Reihe der Form

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (z - z_0)^k, \quad a_k, z, z_0 \in \mathbb{C}.$$

Dort, wo die Reihe konvergiert, definiert sie eine Funktion von z , deren Eigenschaften untersucht werden sollen.

Satz 3.23: (Konvergenz von Potenzreihen)

Zur Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (z - z_0)^k$ existiert ein $r \geq 0$ (der „Konvergenzradius“), so dass

- a) die Reihe für alle z mit $|z - z_0| < r$ **absolut** konvergiert,
- b) die Reihe für kein z mit $|z - z_0| > r$ konvergiert.

Beweis: Gibt es einen Punkt Z , in dem die Reihe $\sum_k a_k \cdot (Z - z_0)^k$ konvergiert, so bildet $a_k \cdot (Z - z_0)^k$ eine Nullfolge. Es gilt also $|a_k \cdot (Z - z_0)^k| \leq 1$ für hinreichend grosses $k \geq k_0$. Mit

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} |a_k \cdot (z - z_0)^k| = \sum_{k=k_0}^{\infty} \underbrace{|a_k \cdot (Z - z_0)^k|}_{\leq 1} \cdot \left| \frac{z - z_0}{Z - z_0} \right|^k$$

ist also für jedes z mit $|z - z_0| < |Z - z_0|$ die geometrische Reihe $\sum_k \left| \frac{z - z_0}{Z - z_0} \right|^k$ eine konvergente Majorante, d.h., $\sum_k a_k \cdot (z - z_0)^k$ konvergiert absolut. Damit ist

$$r = \sup \left\{ |Z|; \sum_k a_k \cdot (Z - z_0)^k \text{ konvergiert} \right\}.$$

Für jedes z mit $|z - z_0| > r$ muss die Reihe nach dieser Konstruktion von r divergieren.

Q.E.D.

Bemerkung 3.24: Der Konvergenzbereich einer Potenzreihe besteht also prinzipiell aus einer Kreisscheibe um den Entwicklungspunkt z_0 . Der Radius r kann allerdings 0 sein (d.h., die Potenzreihe konvergiert nur am Punkt $z = z_0$). Im Folgenden interessieren natürlich nur Potenzreihen mit einem Konvergenzradius $r > 0$. Über den Rand des Konvergenzkreises $\{z; |z - z_0| = r\}$ kann man keine allgemeine Aussagen machen. In folgendem Beispiel konvergiert die Reihe für keinen der Randpunkte:

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k \quad (\text{Konvergenz für } |z| < r = 1.)$$

Im folgenden Beispiel konvergiert die Reihe für alle Randpunkte:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k^2} \quad (\text{Konvergenz für } |z| \leq r = 1.)$$

Beispiel 3.25: Die geometrische Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1 - z}$$

hat den Konvergenzradius 1. Die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot z^{2 \cdot k} = \sum_{k=0}^{\infty} (-z^2)^k = \frac{1}{1 - (-z^2)} = \frac{1}{1 + z^2}$$

hat ebenfalls den Konvergenzradius 1.

Satz 3.26: (Potenzreihen stellen analytische Funktionen dar)

Auf dem Inneren des Konvergenzkreises $\{z; |z - z_0| < r\}$ einer Potenzreihe mit Konvergenzradius $r > 0$ stellt

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (z - z_0)^k$$

eine unendlich oft differenzierbare Funktion dar. Es gilt

$$\frac{d^n}{dz^n} f(z) = \sum_{k=n}^{\infty} a_k \cdot k \cdot (k-1) \cdot \dots \cdot (k-n+1) \cdot (z-z_0)^{k-n},$$

d.h., die Potenzreihe kann gliedweise differenziert werden (die abgeleiteten Reihen haben wieder den Konvergenzradius r). Speziell gilt $a_k = f^{(k)}(z_0)/k!$.

Beweis: Für die Potenzreihe ist der Differenzquotient

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot \frac{(z+h-z_0)^k - (z-z_0)^k}{h}.$$

Mit der Binomialentwicklung

$$\begin{aligned} \frac{(z+h-z_0)^k - (z-z_0)^k}{h} &= \frac{1}{h} \cdot \sum_{j=1}^k \binom{k}{j} \cdot h^j \cdot (z-z_0)^{k-j} \\ &= k \cdot (z-z_0)^{k-1} + h \cdot \sum_{j=2}^k \binom{k}{j} \cdot h^{j-2} \cdot (z-z_0)^{k-j} \end{aligned}$$

folgt

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot k \cdot (z-z_0)^{k-1} + h \cdot \underbrace{\sum_{k=2}^{\infty} \sum_{j=2}^k a_k \cdot \binom{k}{j} \cdot h^{j-2} \cdot (z-z_0)^{k-j}}_{g(h)}.$$

Die die Funktion $g(h)$ definierende Reihe ist dabei wohldefiniert, da die linke Seite der Gleichung für hinreichend kleines h definiert ist ($z+h$ muss im Konvergenzkreis von $f(z)$ liegen) und die Reihe $\sum_k a_k \cdot k \cdot (z-z_0)^{k-1}$ konvergiert. Damit folgt

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot k \cdot (z-z_0)^{k-1} + \lim_{h \rightarrow 0} O(h) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot k \cdot (z-z_0)^{k-1}. \end{aligned}$$

Damit ist gezeigt, dass die Potenzreihe einmal differenzierbar ist. Die Ableitung ist wieder als Potenzreihe dargestellt. Die höheren Ableitungen folgen nun sofort per Induktion nach der Ableitungsordnung.

Q.E.D.

Beispiel 3.27: Die in Beispiel 3.2 angegebenen Funktionen

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}, \quad \sin(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot z^{2k+1}}{(2 \cdot k + 1)!}, \quad \cos(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot z^{2k}}{(2 \cdot k)!}$$

haben den Konvergenzradius $r = \infty$ und sind damit auf ganz \mathbb{C} differenzierbar. Aus diesen Darstellungen erhält man sofort:

$$\frac{d}{dz} e^z = e^z, \quad \frac{d}{dz} \sin(z) = \cos(z), \quad \frac{d}{dz} \cos(z) = -\sin(z).$$

Nach diesen Vorbereitungen sind wir nun in der Lage, den zentralen Satz über die Taylor–Entwickelbarkeit komplex differenzierbarer Funktionen zu beweisen. Er basiert auf der Integraldarstellung durch die Cauchy–Formel 3.20:

Satz 3.28: (Der Potenzreihenentwicklungssatz)

Sei $f(z)$ auf einem Gebiet komplex differenzierbar. Sei z_0 ein beliebiger Punkt im Inneren des Gebiets. Die Funktion $f(z)$ ist unendlich oft differenzierbar bei z_0 und wird auf einer Umgebung von z_0 durch die Taylor–Reihe

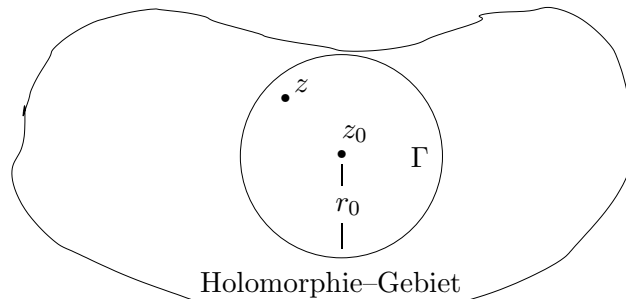
$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} \cdot (z - z_0)^k$$

dargestellt, wobei gilt:

$$f^{(k)}(z_0) = \frac{k!}{2 \cdot \pi \cdot i} \cdot \oint_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{k+1}} d\xi.$$

Hierbei ist Γ eine beliebige im Holomorphie–Gebiet liegende geschlossene Kurve um z_0 herum.

Beweis: Sei z ein Punkt im Inneren des Gebietes, so dass der Kreis um z_0 mit Radius $|z - z_0|$ vollständig im Inneren des Gebietes liegt. Betrachte einen etwas größeren Kreis Γ vom Radius r_0 um z_0 , der z enthält, aber immer noch vollständig im Holomorphie–Gebiet liegt:



Es gilt die Cauchy-Formel 3.20:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot i} \cdot \oint_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot i} \cdot \oint_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z_0 - (z - z_0)} d\xi \\ &= \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot i} \cdot \oint_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\xi - z_0}} d\xi. \end{aligned}$$

Es gilt $|z - z_0| < |\xi - z_0| = r_0$ für alle $\xi \in \Gamma$. Die Entwicklung in eine geometrische Reihe liefert damit

$$f(z) = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot i} \cdot \oint_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z_0} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\xi - z_0} \right)^k d\xi.$$

Da die geometrische Reihe absolut konvergiert und $f(\xi)/(\xi - z_0)$ eine gleichmäßig stetige Funktion in ξ ist, kann Summation und Integration getrost vertauscht werden:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2 \cdot \pi \cdot i} \cdot \oint_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{k+1}} d\xi \right) \cdot (z - z_0)^k.$$

Damit ist $f(z)$ durch eine konvergente Potenzreihe um z_0 dargestellt, deren Konvergenzradius mindestens r_0 ist. Potenzreihen sind aber in ihrem Konvergenzradius automatisch beliebig oft differenzierbar und stimmen mit ihrer Taylor-Reihe um den Mittelpunkt überein. Damit gilt

$$\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot i} \cdot \oint_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{k+1}} d\xi.$$

Hierbei kann der Kreis Γ zu einer beliebigen Kurve um z_0 deformiert werden.

Q.E.D.

Bemerkung 3.29: Wähle Γ im Beweis des Potenzreihenentwicklungssatzes 3.28 als den größten Kreis um z_0 , der noch im Holomorphie-Gebiet von f liegt. Für alle Punkte z innerhalb dieses Kreises wird $f(z)$ durch die Taylor-Reihe um z_0 dargestellt. Der Konvergenzradius der Taylor-Reihe reicht also auf jeden Fall bis zum Rand des Gebietes.

In einer Situation, wo die Funktion $f(z)$ auf ganz \mathbb{C} bis auf endliche viele Singularitätspunkte analytisch ist, ist der Konvergenzradius der Taylor-Reihe um z_0 damit durch den Abstand zwischen z_0 und der nächstgelegenen Singularität gegeben. Beispiel: die Reihe

$$\frac{1}{1 + z^2} = \frac{1}{1 - (-z^2)} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot z^{2 \cdot k}$$

um $z_0 = 0$ hat den Konvergenzradius 1. Er ist gegeben durch den Abstand der Singularitäten $z = \pm i$ vom Nullpunkt.

Bemerkung 3.30: Die Formel

$$f^{(k)}(z_0) = \frac{k!}{2 \cdot \pi \cdot i} \cdot \oint_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{k+1}} d\xi$$

ist leicht zu merken: sie entsteht mit

$$\frac{d}{dz_0} \oint_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^j} d\xi = j \cdot \oint_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{j+1}} d\xi, \quad j = 1, \dots, k$$

durch formales Ableiten der Cauchyschen Integraldarstellung

$$f(z_0) = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot i} \cdot \oint_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z_0} d\xi.$$

Bemerkung 3.31: Eine der zentralen Aussagen über Polynome ist der **Hauptsatz der Algebra**:

Jedes Polynom $P(z) = a_n \cdot z^n + a_{n-1} \cdot z^{n-1} + \dots + a_0$ mit $a_n \neq 0$, $n > 0$ hat genau n komplexe Nullstellen z_1, \dots, z_n :

$$P(z) = a_n \cdot (z - z_1) \cdot (z - z_2) \cdot \dots \cdot (z - z_n).$$

Hierbei können einige der Wurzeln z_k übereinstimmen („mehrfache Nullstellen“).

Ohne die Hilfsmittel der komplexen Funktionentheorie ist der Beweis dieser Aussage aufwendig. Mit den Vorbereitungen dieses Kapitels kann der Beweis als einfache Übungsaufgabe gestellt werden ;-). Siehe Aufgabe 59.

3.5 Der Residuenkalkül

Als eine wichtige Anwendung der komplexen Funktionentheorie soll hier der „**Residuenkalkül**“ vorgestellt werden. Es geht darum, ein (in der Regel) reelles Integral

$$\int_a^b g(x) dx$$

als (Teil eines) komplexen Konturintegrals zu identifizieren. Durch Deformation des komplexen Wegs auf eine möglichst einfache Form gelingt es dann oft, den Wert des Integrals zu ermitteln. Dies ermöglicht die Berechnung vieler bestimmter Integrale für bestimmte Werte der Grenzen a , b auch ohne eine explizite Darstellung der Stammfunktion des Integranden. Typische Anwendungen sind Fourier-Transformationen

$$\mathcal{F}[f](k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot e^{i \cdot k \cdot x} dx$$

oder auch die Laplace-Transformationen

$$\mathcal{L}[f](s) = \int_0^{\infty} f(x) \cdot e^{-s \cdot x} dx$$

des nächsten Kapitels. In vielen Fällen ist der Integrand überall in der komplexen Ebene analytisch bis auf endliche viele Singularitäten (Polstellen). Die einfachste Form, auf die ein komplexes Kurvenintegral längs einer geschlossenen Kurve mit einem solchen Integranden zurückgeführt werden kann, besteht aus einer Summe von Integralen über kleine Kreise um die Singularitäten (den „Residuen“).

Definition 3.32: (Isolierte Singularitäten und Residuen)

↓5.2.03

- a) Ein Punkt $z_0 \in \mathbb{C}$ heißt **„isolierte Singularität“** einer Funktion $f(z)$, wenn es eine Umgebung U von z_0 gibt, so dass $f(z)$ auf $U \setminus \{z_0\}$ analytisch ist.
- b) Eine Funktion $f(z)$, die auf ganz \mathbb{C} bis auf endlich viele isolierte Singularitäten analytisch ist, heißt **„meromorph“**.
- c) Das **„Residuum“** einer meromorphen Funktion $f(z)$ an einer isolierten Singularität z_0 ist

$$\text{Res}_f(z_0) = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot i} \cdot \oint_{\Gamma} f(z) dz,$$

wobei Γ ein (kleiner) Kreis um z_0 herum ist, der außer z_0 keine weiteren Singularitäten von $f(z)$ umfasst.

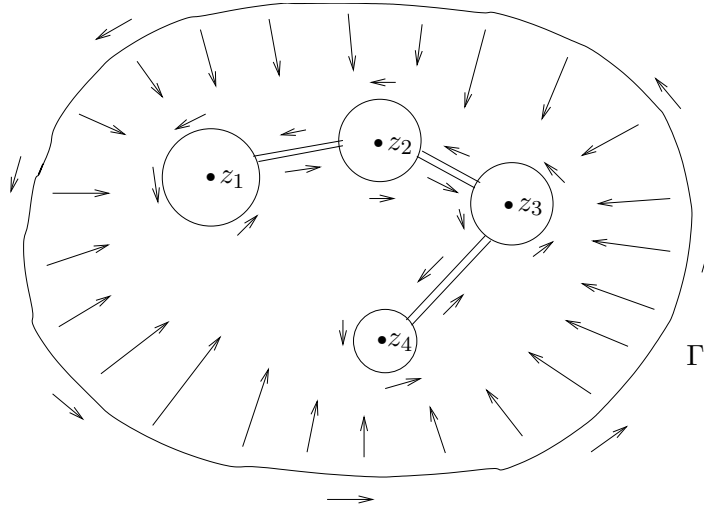
Satz 3.33: (Der Residuensatz)

Sei $f(z)$ eine meromorphe Funktion. Sei Γ eine geschlossene Kurve, die durch keine der Singularitäten von $f(z)$ führt. Dann gilt

$$\oint_{\Gamma} f(z) dz = 2 \cdot \pi \cdot i \cdot \sum_k \text{Res}_f(z_k),$$

wobei sich diese Summe über alle isolierten Singularitäten z_k von $f(z)$ erstreckt, die von Γ eingeschlossen werden.

Beweis: Mit dem Deformationsprinzip 3.17 kann die Kurve Γ zu Kreisen um die umfassten Singularitäten deformiert werden. Dies liefert die Residuen. Die Verbindungskurven zwischen den Kreisen werden jeweils zweimal in unterschiedlichen Richtungen durchlaufen und tragen daher zum Gesamtintegral nicht bei:



Q.E.D.

Bemerkung 3.34: Komplexe Kurvenintegrale sind bei geschlossenen Kurven also vollständig durch die Singularitäten des Integranden bestimmt, auch wenn diese weit von der Kurve entfernt liegen, über die integriert wird.

Bemerkung 3.35: Oft handelt es sich bei den betrachteten Singularitäten um Polstellen, deren Ordnung man kennt. In diesem Fall kann man die Residuen elementar berechnen, ohne eine Integration (über einen kleinen Kreis um die Polstelle) ausführen zu müssen. Ein Punkt z_0 heißt dabei „**Pol höchstens k -ter Ordnung**“ von $f(z)$, wenn

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^k}$$

mit einer bei $z = z_0$ analytischen Funktion $g(z)$ gilt. Die Polordnung ist genau k , wenn zusätzlich $g(z_0) \neq 0$ gilt:

$$f(z) \approx \frac{g(z_0)}{(z - z_0)^k} \quad \text{für } z \approx z_0.$$

An Polen höchstens k -ter Ordnung berechnet sich das Residuum durch:

$$\text{Res}_f(z_0) = \frac{g^{(k-1)}(z_0)}{(k-1)!} = \frac{1}{(k-1)!} \cdot \left(\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \left((z - z_0)^k \cdot f(z) \right) \right) \Big|_{z=z_0}.$$

Beweis: Taylor-Entwicklung $g(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{g^{(j)}(z_0)}{j!} \cdot (z - z_0)^j$ um z_0 liefert

$$f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{g^{(j)}(z_0)}{j!} \cdot (z - z_0)^{j-k}.$$

Es folgt

$$\operatorname{Res}_f(z_0) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{g^{(j)}(z_0)}{j!} \cdot \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot i} \cdot \oint \frac{dz}{(z - z_0)^{k-j}} = \frac{g^{(k-1)}(z_0)}{(k-1)!},$$

denn mit Beispiel 3.12.b) verschwinden in der Summe alle Terme außer dem mit $k - j = 1$.

Beispiel 3.36: Die Funktion $f(z) = e^z/z^2$ ist meromorph mit einem einzigen Pol zweiter Ordnung an der Stelle $z = 0$. Mit $g(z) = e^z$, $k = 2$ folgt

$$\operatorname{Res}_f(0) = \frac{g^{(k-1)}(0)}{(k-1)!} = g'(0) = e^0 = 1.$$

Damit gilt

$$\oint_{\Gamma} \frac{e^z}{z^2} dz = 2 \cdot \pi \cdot i \cdot \operatorname{Res}_f(0) = 2 \cdot \pi \cdot i$$

für jede geschlossene Kurve, die den Nullpunkt umschließt.

Bemerkung 3.37: An einer Polstelle $f(z) = g(z)/(z - z_0)^k$ höchstens k -ter Ordnung erhält man durch Taylor-Entwicklung des bei z_0 analytischen Nenners $g(z)$ eine Entwicklung der Form

$$f(z) = \frac{c_{-k}}{(z - z_0)^k} + \frac{c_{1-k}}{(z - z_0)^{k-1}} + \cdots + \frac{c_{-1}}{z - z_0} + c_0 + c_1 \cdot (z - z_0) + \cdots,$$

in der neben polynomialen Anteilen auch negative Potenzen von $z - z_0$ auftauchen. Man nennt diese Entwicklung eine „**Laurent-Reihe um den Entwicklungspunkt z_0** “. Mit Beispiel 3.12.b) gilt

$$\operatorname{Res}_f(z_0) = c_{-1}.$$

Mit diesen Vorbereitungen kann man viele komplexe Wegintegrale auf Residuen zurückführen, welche nach den obigen Überlegungen meist leicht ohne Integration zu berechnen sind. Es gibt einige Standardsituationen, in denen man (anwendungsrelevante) reelle Integrale als komplexe Integrale über gewisse Standardwege interpretieren und dann leicht über den Residuensatz 3.33 auswerten kann:

Satz 3.38: (Integrale vom Typ $\int_{-\infty}^{\infty} r(x) dx$)

Sei $r(x)$ eine rationale Funktion, die längs der reellen Achse für $x \rightarrow \pm\infty$ mindestens wie $O(1/x^2)$ abfällt und auf der reellen Achse keine Pole hat.

Dann gilt

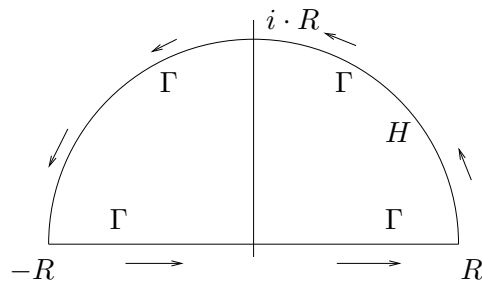
$$\int_{-\infty}^{\infty} r(x) dx = 2 \cdot \pi \cdot i \cdot \sum_k \operatorname{Res}_r(z_k),$$

wobei sich diese Summe über die Polstellen $z_k \in \mathbb{C}$ von $r(z)$ erstreckt, die in der oberen Halbebene liegen ($\Im(z_k) > 0$).

Beweis: Wir betrachten

$$\int_{-\infty}^{\infty} r(x) dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R r(x) dx$$

als Teil des komplexen Wegintegrals über die folgende geschlossene Kontur Γ :



Wir parametrisieren den Halbkreis H von $R \in \mathbb{R}$ nach $-R \in \mathbb{R}$ durch $z(t) = R \cdot e^{i \cdot t}$, $t \in [0, \pi]$ und erhalten

$$\int_{-R}^R r(z) dz = \int_0^\pi r(R \cdot e^{i \cdot t}) \cdot \underbrace{i \cdot R \cdot e^{i \cdot t}}_{\frac{dz(t)}{dt}} dt.$$

Die Forderung, dass $r(x)$ im Unendlichen mindestens wie $O(1/x^2)$ abfallen soll, läuft darauf hinaus, dass der Nennergrad des rationalen Ausdrucks mindestens um 2 größer ist als der Zählergrad. Damit gilt dieses Abfallverhalten überall in der komplexen Ebene:

$$|r(R \cdot e^{i \cdot t})| = O\left(\frac{1}{R^2}\right).$$

Es folgt

$$\left| \int_{-R}^R r(z) dz \right| \leq \int_0^\pi |r(R \cdot e^{i \cdot t})| \cdot R \cdot dt = O\left(\frac{1}{R}\right) \xrightarrow{(R \rightarrow \infty)} 0.$$

Damit gilt $\int_{-\infty}^{\infty} r(x) dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \oint_{\Gamma} r(z) dz$ und der Residuensatz 3.33 für $\oint_{\Gamma} r(z) dz$ liefert sofort als Ergebnis die Residuensumme.

Q.E.D.

Satz 3.39: (Fourier-Integrale vom Typ $\int_{-\infty}^{\infty} r(x) \cdot e^{i \cdot k \cdot x} dx$)

Sei $r(x)$ eine rationale Funktion, die längs der reellen Achse für $x \rightarrow \pm\infty$ gegen 0 konvergiert und auf der reellen Achse keine Pole hat. Für $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gilt³:

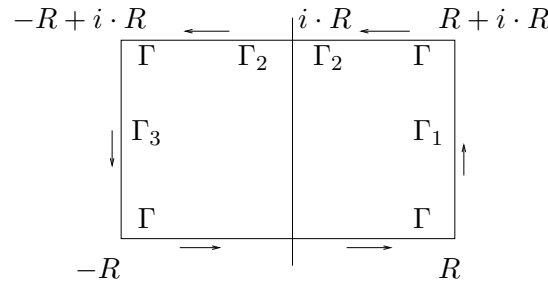
$$\int_{-\infty}^{\infty} r(x) \cdot e^{i \cdot k \cdot x} dx = \frac{2 \cdot \pi \cdot i}{|k|} \cdot \sum_j \operatorname{Res}_f(z_j) \quad \text{mit} \quad f(z) = r\left(\frac{z}{k}\right) \cdot e^{i \cdot z},$$

wobei sich diese Summe über die Polstellen $z_j \in \mathbb{C}$ von $f(z)$ erstreckt, die in der oberen Halbebene liegen. Für $k > 0$ sind dies die Polstellen von $r(z)$ in der oberen Halbebene, bzw. für $k < 0$ sind es die Polstellen von $r(z)$ in der unteren Halbebene.

Beweis: Mit der Substitution $y = k \cdot x$ erhält man

$$\int_{-\infty}^{\infty} r(x) \cdot e^{i \cdot k \cdot x} dx = \int_{-\operatorname{sign}(k) \cdot \infty}^{\operatorname{sign}(k) \cdot \infty} r\left(\frac{y}{k}\right) \cdot e^{i \cdot y} \frac{dy}{k} = \frac{1}{|k|} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f(y) dy.$$

Da wir hier etwas schwächere Abfallbedingungen für r haben, benutzen wir aus technischen Gründen eine etwas andere Kontur als im Beweis von Satz 3.38:



Es ist wiederum zu zeigen, daß im Grenzwert $R \rightarrow \infty$ die „störenden“ Wegintegrale über die Teilstücke Γ_1 , Γ_2 , Γ_3 verschwinden und das zu bestimmende Integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(y) dy$ nichts anderes ist als das gesamte Wegintegral $\oint_{\Gamma} f(z) dz$, das über den Residuensatz ausgewertet werden kann.

Der Weg Γ_1 von R nach $R + i \cdot R$ wird durch $z(t) = R + i \cdot t$, $t \in [0, R]$ parametrisiert:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_1}^{R+i \cdot R} f(z) dz &= \int_0^R r\left(\frac{R+i \cdot t}{k}\right) \cdot e^{i \cdot (R+i \cdot t)} dt \stackrel{(*)}{=} e^{i \cdot R} \cdot \int_0^R O\left(\frac{1}{R}\right) \cdot e^{-t} dt \\ &= e^{i \cdot R} \cdot O\left(\frac{1}{R}\right) \cdot \int_0^R e^{-t} dt = e^{i \cdot R} \cdot O\left(\frac{1}{R}\right) \cdot (1 - e^{-R}) \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

³Für $k = 0$ muss man für die Existenz des Integrals noch fordern, daß $r(x)$ im Unendlichen mindestens wie $O(1/x^2)$ abfällt. Dann hat man den vorigen Satz.

Man beachte in (*), daß $r(z)$ mindestens wie $O(1/|z|)$ im Unendlichen abfallen soll und somit $r((R+i \cdot t)/k) = O(1/R)$ gilt.

Der Weg Γ_3 von $-R+i \cdot R$ nach $-R$ wird durch $z(t) = -R+i \cdot (R-t)$, $t \in [0, R]$ parametrisiert:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_3}^{-R} f(z) dz &= \int_0^R \underbrace{r\left(\frac{-R+i \cdot (R-t)}{k}\right)}_{O\left(\frac{1}{R}\right)} \cdot e^{i \cdot (-R+i \cdot (R-t))} dt \\ &= e^{-i \cdot R} \cdot \int_0^R \overbrace{O\left(\frac{1}{R}\right)} \cdot e^{-(R-t)} dt \\ &= e^{-i \cdot R} \cdot O\left(\frac{1}{R}\right) \cdot \int_0^R e^{-(R-t)} dt \\ &= e^{-i \cdot R} \cdot O\left(\frac{1}{R}\right) \cdot (1 - e^{-R}) \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Der Weg Γ_2 von $R+i \cdot R$ nach $-R+i \cdot R$ wird durch $z(t) = R-t+i \cdot R$, $t \in [0, 2 \cdot R]$ parametrisiert:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_2}^{-R+i \cdot R} f(z) dz &= \int_0^{2 \cdot R} \underbrace{r\left(\frac{R-t+i \cdot R}{k}\right)}_{O\left(\frac{1}{R}\right)} \cdot e^{i \cdot (R-t+i \cdot R)} dt \\ &= e^{-R} \cdot \int_0^{2 \cdot R} \overbrace{O\left(\frac{1}{R}\right)} \cdot e^{i \cdot (R-t)} dt \\ &= e^{-R} \cdot O(1) \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir mit

$$\oint_{\Gamma} f(z) dz = \int_{-R}^R f(y) dy + \int_{\Gamma_1} f(z) dz + \int_{\Gamma_2} f(z) dz + \int_{\Gamma_3} f(z) dz$$

im Grenzwert $R \rightarrow \infty$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(y) dy = \lim_{R \rightarrow \infty} \oint_{\Gamma} f(z) dz.$$

Der Residuensatz 3.33 für $\oint_{\Gamma} f(z) dz$ liefert sofort als Ergebnis die Residuensumme.

Q.E.D.

Satz 3.40: (Trigonometrische Integrale vom Typ $\int_0^{2\pi} r(\cos(t), \sin(t)) dt$)

Sei $r(x, y)$ eine rationale Funktion in x und y , die für $r(\cos(t), \sin(t))$ mit $t \in [0, 2 \cdot \pi]$ keine Singularitäten hat. Dann gilt:

$$\int_0^{2\pi} r(\cos(t), \sin(t)) dt = 2 \cdot \pi \cdot i \cdot \sum_k \operatorname{Res}_f(z_k)$$

mit

$$f(z) = \frac{1}{i \cdot z} \cdot r\left(\frac{1}{2} \cdot \left(z + \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2 \cdot i} \cdot \left(z - \frac{1}{z}\right)\right),$$

wobei sich diese Summe über die Polstellen $z_k \in \mathbb{C}$ von $f(z)$ erstreckt, die im Inneren des Einheitskreises liegen.

Beweis: Betrachte als Kontur Γ den Einheitskreis um den Ursprung. Mit der Standardparametrisierung $z(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2 \cdot \pi]$ folgt

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} f(z) dz &= \int_0^{2\pi} \underbrace{\frac{1}{i \cdot e^{it}} \cdot r\left(\frac{1}{2} \cdot \overbrace{(e^{it} + e^{-it})}^{\cos(t)}, \frac{1}{2 \cdot i} \cdot \overbrace{(e^{it} - e^{-it})}^{\sin(t)}\right)}_{f(z(t))} \cdot \underbrace{i \cdot e^{it}}_{\frac{dz(t)}{dt}} dt \\ &= \int_0^{2\pi} r(\cos(t), \sin(t)) dt. \end{aligned}$$

Der Residuensatz 3.33 für $\oint_{\Gamma} f(z) dz$ liefert sofort als Ergebnis die Residuensumme.

Q.E.D.

Beispiel 3.41: Einige Beispiele sind in der Musterlösung von Blatt 14 ausgeführt.

Kapitel 4

Laplace–Transformation

↓7.2.03

Neben der Fourier–Transformation des Kapitels 1.4 spielt eine weitere Integraltransformation in (speziell technischen) Anwendungen eine große Rolle: die schon im Motivationsabschnitt 1.1 vorgestellte Laplace–Transformation. Es gibt zahllose Bücher zur Laplace–Transformation (die meisten für Ingenieure). Hier interessant sind z.B.:

- [Föll] OTTO FÖLLINGER, *Laplace-, Fourier- und z-Transformation*, Hüthig Verlag, 2000.
- [Doe] GUSTAV DOETSCH, *Einführung in Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation*, Birkhäuser 1970.
- [Mar] JERROLD E. MARSDEN, *Basic Complex Analysis*, Freeman 1987.

4.1 Strukturelles: Existenz und Eindeutigkeit

Wir betrachten Funktionen $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, die „lokal integrierbar“ sind:

$$f \in L_{1loc}([0, \infty)) = \left\{ f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}; \int_a^b |f(x)| dx < \infty \forall 0 < a, b < \infty \right\}.$$

Dies sind die Funktionen, die hinreichend glatt sind, so dass sie über beliebige **endliche** Bereiche integriert werden können. Es werden (zumindestens zunächst) jedoch keinerlei Voraussetzungen über das Verhalten bei ∞ gemacht, d.h., $\int_a^\infty f(x) dx$ braucht nicht zu existieren.

Definition 4.1: (Laplace–Transformation)

Für $f \in L_{1loc}([0, \infty))$ definieren wir die „**Laplace–Transformierte von f** “ als

$$\mathcal{L}[f](s) = \int_0^\infty e^{-s \cdot x} \cdot f(x) dx, \quad s \in \mathbb{C}.$$

Für gegebenes $s \in \mathbb{C}$ nennt man das Laplace-Integral **absolut konvergent**, wenn das Integral $\int_0^\infty |e^{-s \cdot x} \cdot f(x)| dx$ im L_1 -Sinne existiert. Man nennt es **bedingt konvergent**, wenn

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^N e^{-s \cdot x} \cdot f(x) dx$$

existiert. Es ist zu klären, für welche $s \in \mathbb{C}$ die Laplace-Transformierte definiert ist. Auf diesem Bereich ist dann $\mathcal{L}[f](s)$ als komplexe Funktion von s aufzufassen. Mit der Laplace-Transformierten ist die Abbildung $s \rightarrow \mathcal{L}[f](s)$ gemeint.

Bemerkung 4.2: Für Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ bemerkt das Laplace-Integral nichts von den Funktionswerten $f(x)$ mit $x < 0$. Die Laplace-Transformation macht also prinzipiell nur Aussagen über f auf der positiven Halbachse. Besteht man unbedingt darauf, Funktionen über \mathbb{R} zu betrachten, so sollte man sich die Funktionen als mittels $f(x) = 0 \forall x < 0$ auf die ganze reelle Achse fortgesetzt vorstellen.

Bemerkung 4.3: Betrachte eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = 0 \forall x < 0$. Betrachtet man formal die Fourier-Transformation mit **komplexen** Frequenzen $k = -i \cdot s$ auf der imaginären Achse, so ergibt sich die Laplace-Transformierte als Fourier-Transformierte:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f](-i \cdot s) &= \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot e^{-i \cdot (-i \cdot s) \cdot x} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \int_0^{\infty} f(x) \cdot e^{-s \cdot x} dx = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \mathcal{L}[f](s). \end{aligned}$$

Dies läßt erwarten, das es viele (zumindestens formale) Ähnlichkeiten zwischen der Fourier- und der Laplace-Transformation gibt.

Zunächst zur Existenz der Transformation: für welche Werte von s existiert das Laplace-Integral? Die Konvergenzsituation bei (komplexen) Potenzreihen war sehr einfach: Konvergenz innerhalb von Kreisen, Divergenz außerhalb von Kreisen. Bei der Laplace-Transformation ist die Situation ähnlich einfach: Existenz der Transformation in einer „rechten Halbebene“, Nichtexistenz in einer „linken Halbebene“:

Satz 4.4: (Existenz des Laplace-Integrals)

Zu $f \in L_{1loc}([0, \infty))$ existiert eine eindeutige Zahl $-\infty \leq \alpha_f \leq \infty$ (die „**Abszisse absoluter Konvergenz**“), so dass $\int_0^\infty e^{-s \cdot x} \cdot f(x) dx$

- a) für jedes s mit $\Re(s) > \alpha_f$ absolut konvergiert,
- b) für kein s mit $\Re(s) < \alpha_f$ absolut konvergiert.

Konvergiert das Integral für einen Wert s_0 mit $\Re(s_0) = \alpha_f$ absolut, dann konvergiert es für alle Werte s mit $\Re(s) = \alpha_f$.

Der Bereich absoluter Konvergenz der Laplace-Integrale ist entweder eine offene Halbebene $\{s \in \mathbb{C}; \Re(s) > \alpha_f\}$ oder eine geschlossene Halbebene $\{s \in \mathbb{C}; \Re(s) \geq \alpha_f\}$.

Beweis: Wenn das Integral für ein $s_0 \in \mathbb{C}$ absolut konvergiert, so konvergiert es für jedes $s \in \mathbb{C}$ mit $\Re(s) \geq \Re(s_0)$ absolut, denn

$$\begin{aligned} |e^{-s \cdot x} \cdot f(x)| &= |e^{-(s-s_0) \cdot x} \cdot e^{-s_0 \cdot x} \cdot f(x)| \\ &= \underbrace{e^{-(\Re(s)-\Re(s_0)) \cdot x}}_{\leq 1} \cdot |e^{-s_0 \cdot x} \cdot f(x)| \leq |e^{-s_0 \cdot x} \cdot f(x)|, \end{aligned}$$

d.h., der Integrand für s wird durch den absolut integrierbaren Integranden für s_0 dominiert. Damit gilt

$$\alpha_f = \inf \left\{ \Re(s); \int_0^\infty |e^{-s \cdot x} \cdot f(x)| dx < \infty \right\}.$$

Q.E.D.

Es gibt Funktionen $f(x)$ mit $\alpha_f = -\infty$ (die Laplace-Transformierte ist auf ganz \mathbb{C} definiert) oder auch $\alpha_f = \infty$ (das Laplace-Integral konvergiert nirgends absolut). Der letzte Fall ist uninteressant: es gibt Funktionen, auf die die Laplace-Transformation nicht anwendbar ist. Beispiel: $f(x) = e^{(x^2)}$. Für die Klasse von Funktionen, die nicht stärker als exponentiell ansteigen, kann man einen Mindestkonvergenzbereich garantieren:

Definition und Satz 4.5:

Die Funktion $f \in L_{loc}([0, \infty))$ heißt „**exponentiell beschränkt**“, wenn Konstanten $C, A \in \mathbb{R}$ existieren, so dass $|f(x)| \leq C \cdot e^{A \cdot x}$ gilt für fast alle $x \in [0, \infty)$. Für die Abszisse absoluter Konvergenz gilt dann $\alpha_f \leq A$, d.h., die Laplace-Transformierte existiert in einer nichtleeren Halbebene.

Beweis: Es gilt

$$|e^{-s \cdot x} \cdot f(x)| \leq e^{-\Re(s) \cdot x} \cdot C \cdot e^{A \cdot x} = C \cdot e^{-(\Re(s)-A) \cdot x}.$$

Für jedes $s \in \mathbb{C}$ mit $\Re(s) > A$ besitzt der Integrand damit die absolut integrierbare Majorante $A \cdot e^{-(\Re(s)-A) \cdot x}$.

Q.E.D.

In der Konvergenzhalbebene ist eine Laplace-Transformierte eine angenehme Funktion: sie ist „nach rechts“ beschränkt und analytisch:

Satz 4.6: (Die Laplace-Transformierte ist „nach rechts“ beschränkt)

Für jedes $f \in L_{1loc}([0, \infty))$ mit Konvergenzabszisse α_f gilt

$$|\mathcal{L}[f](s)| \leq \int_0^\infty |e^{-s_0 \cdot x} \cdot f(x)| dx$$

für jedes s, s_0 mit $\alpha_f < \Re(s_0) \leq \Re(s)$.

Beweis: Wie im Beweis von Satz 4.4: $|e^{-s \cdot x} \cdot f(x)| \leq |e^{-s_0 \cdot x} \cdot f(x)|$.

Q.E.D.

Satz 4.7: (Die Laplace-Transformierte ist analytisch)

Für jedes $f \in L_{1loc}([0, \infty))$ ist die Laplace-Transformierte im Inneren der Konvergenzhalbebene $\{s \in \mathbb{C}; \Re(s) > \alpha_f\}$ analytisch. Es gilt

$$\frac{d}{ds} \mathcal{L}[f](s) = - \int_0^\infty e^{-s \cdot x} \cdot x \cdot f(x) dx = -\mathcal{L}[x \cdot f](s),$$

d.h., man darf unter dem Integral nach s differenzieren.

Beweis: Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{L}[f](s+h) - \mathcal{L}[f](s)}{h} + \mathcal{L}[x \cdot f](s) &= \int_0^\infty \frac{1}{h} \cdot (e^{-(s+h) \cdot x} - e^{-s \cdot x} + x e^{-s \cdot x}) \cdot f(x) dx \\ &= \int_0^\infty \frac{e^{-h \cdot x} - 1 + h \cdot x}{h} \cdot e^{-s \cdot x} \cdot f(x) dx. \end{aligned}$$

Die durch

$$\frac{e^{-h \cdot x} - 1 - h \cdot x}{h} = \frac{\frac{h^2}{2} \cdot x^2 - \frac{h^3}{3!} \cdot x^3 \mp \dots}{h} = h \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{2} \cdot x^2 - \frac{h}{3!} \cdot x^3 \mp \dots \right)}_{g(h,x)}$$

eingeführte Funktion $g(h, x)$ ist „beliebig harmlos“ (absolute Konvergenz dieser Reihe, Beschränktheit von g etc.), so dass der Grenzwert $h \rightarrow 0$ unter das Integral geschoben werden darf:

$$\begin{aligned} &\lim_{h \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{L}[f](s+h) - \mathcal{L}[f](s)}{h} + \mathcal{L}[x \cdot f](s) \\ &= \left(\lim_{h \rightarrow 0} h \right) \cdot \left(\int_0^\infty \lim_{h \rightarrow 0} g(h, x) \cdot e^{-s \cdot x} \cdot f(x) dx \right) \\ &= \left(\lim_{h \rightarrow 0} h \right) \cdot \left(\int_0^\infty \frac{x^2}{2} \cdot e^{-s \cdot x} \cdot f(x) dx \right) = 0, \end{aligned}$$

da $\int_0^\infty x^2 \cdot e^{-s \cdot x} \cdot f(x) dx$ absolut konvergiert (der Integrand wird dominiert durch $|x^2 \cdot e^{-s \cdot x} \cdot f(x)| \leq \text{const} \cdot |e^{-s_0 \cdot x} \cdot f(x)|$ mit beliebigem s_0 mit $\alpha_f < \Re(s_0) < \Re(s)$).

Q.E.D.

Bemerkung 4.8: Hat $f \in L_{1loc}([0, \infty))$ einen endlichen „Träger“ (also $f(x) = 0 \forall x > x_0$), so existiert die Laplace-Transformierte offensichtlich für jedes $s \in \mathbb{C}$ und ist damit eine auf ganz \mathbb{C} analytische Funktion. Andererseits ist nach dem „Satz von Liouville“ (Blatt 13, Aufgabe 59.b) eine auf ganz \mathbb{C} analytische Funktion entweder konstant¹ oder unbeschränkt. Für „weit links liegende“ Werte von s muss die Laplace-Transformierte also betragsmäßig beliebig hohe Werte annehmen.

Satz 4.6 kann deutlich verfeinert werden. Für die Laplace-Transformation gilt ein Analogon des Riemann-Lebesgue-Lemmas 1.37 z.B. in der folgenden Form:

Satz 4.9: (Asymptotik der Laplace-Transformierten)

Für $f \in L_{1loc}([0, \infty))$ und jedes $\phi \in (-\pi/2, \pi/2)$ gilt $\lim_{r \rightarrow \infty} \mathcal{L}[f](r \cdot e^{i\phi}) = 0$.

Beweis (technisch): Der Winkel $\phi \in (-\pi/2, \pi/2)$ ist als „Richtung“ zu interpretieren, in die wir vom Nullpunkt aus startend längs einer Geraden nach „Unendlich“ laufen wollen. Es gilt

$$\begin{aligned} |\mathcal{L}[f](r \cdot e^{i\phi})| &= \left| \int_0^\infty e^{-r \cdot (\cos(\phi) + i \sin(\phi)) \cdot x} \cdot f(x) dx \right| \\ &\leq \int_0^\infty e^{-r \cdot \cos(\phi) \cdot x} \cdot \underbrace{|e^{-r \cdot \sin(\phi) \cdot i \cdot x}|}_{=1} \cdot |f(x)| dx = \int_0^\infty e^{-r \cdot \cos(\phi) \cdot x} \cdot |f(x)| dx. \end{aligned}$$

Sei r hinreichend groß, so dass $r \cdot \cos(\phi) > \alpha_f$ gilt (also $s = r \cdot e^{i\phi}$ in der Konvergenzhalbebene liegt). Sei s_0 ein reeller Wert mit $\alpha_f < s_0 < r \cdot \cos(\phi)$. Es folgt

$$\begin{aligned} |\mathcal{L}[f](r \cdot e^{i\phi})| &\leq \int_0^\infty e^{-r \cdot \cos(\phi) \cdot x} \cdot |f(x)| dx \\ &= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{r \cdot \cos(\phi) - s_0}}} \underbrace{e^{-r \cdot \cos(\phi) \cdot x}}_{\leq 1} \cdot |f(x)| dx \\ &\quad + \int_{\frac{1}{\sqrt{r \cdot \cos(\phi) - s_0}}}^\infty \underbrace{e^{-(r \cdot \cos(\phi) - s_0) \cdot x}}_{\leq e^{-\sqrt{r \cdot \cos(\phi) - s_0}}} \cdot e^{-s_0 \cdot x} \cdot |f(x)| dx \\ &\leq \int_0^{\frac{1}{\sqrt{r \cdot \cos(\phi) - s_0}}} |f(x)| dx + e^{-\sqrt{r \cdot \cos(\phi) - s_0}} \cdot \int_{\frac{1}{\sqrt{r \cdot \cos(\phi) - s_0}}}^\infty e^{-s_0 \cdot x} \cdot |f(x)| dx. \end{aligned}$$

Im Grenzwert $r \rightarrow \infty$ verschwindet das erste Integral, da die Intervalllänge gegen 0 geht. Das zweite Integral konvergiert für $r \rightarrow \infty$ gegen $\int_0^\infty e^{-s_0 \cdot x} \cdot |f(x)| dx < \infty$ (beachte, dass s_0 in der Konvergenzhalbebene liegen soll). Der

¹Die (formale) Laplace-Transformierte der Diracschen Delta-Funktion $\delta(x)$ ist konstant 1.

Vorfaktor $e^{-\sqrt{r \cdot \cos(\phi) - s_0}}$ drückt auch diesen Anteil gegen 0.

Q.E.D.

Nun die zentrale Aussage, dass die Laplace-Transformation eine Funktion eindeutig codiert. Da die Laplace-Integrale nichts davon merken, wenn die Ausgangsfunktion $f(x)$ an einzelnen Punkten umdefiniert wird, kann die Laplace-Transformierte die Ausgangsfunktion allerdings nur fast überall festlegen:

Satz 4.10: (Die Laplace-Transformierte bestimmt die Ausgangsfunktion eindeutig)

Sei $f \in L_{1loc}([0, \infty))$, $\alpha_f < \infty$. Gilt $\mathcal{L}[f](s) \equiv 0$ im Inneren der Konvergenzhalbebene, so folgt $f(x) \equiv 0$ für fast alle $x \in [0, \infty)$. Damit stimmen zwei Funktionen für fast alle $x \in [0, \infty)$ überein, wenn ihre Laplace-Transformierten übereinstimmen.

Statt diesen Satz zu beweisen, betrachten wir die stärkere Aussage:

Satz 4.11: (Die Laplace-Transformierte auf einem äquidistanten Gitter bestimmt die Ausgangsfunktion eindeutig)

Sei $f \in L_{1loc}([0, \infty))$, $\alpha_f < \infty$. Sei s_0 ein beliebiger Konvergenzpunkt des Laplace-Integrals (d.h., $\Re(s_0) > \alpha_f$). Wenn es ein $\Delta s > 0$ gibt, so dass $\mathcal{L}[f](s_0 + n \cdot \Delta s) = 0$ gilt für alle $n \in \mathbb{N}$, so folgt $f(x) \equiv 0$ für fast alle $x \in [0, \infty)$.

Stimmen zwei Laplace-Transformierte auf äquidistanten Punkten parallel zur reellen Achse überein, so müssen die Ausgangsfunktionen (fast überall) übereinstimmen.

11.2.03↓ **Beweis:** Zunächst eine Hilfsaussage:

Sei $g(x)$ eine stetige Funktion. Gilt $\int_0^1 x^n \cdot g(x) dx = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$, so folgt $g(x) = 0$ für alle $x \in [0, 1]$.

Dies ist nach Kapitel 2 klar: zerlege $g(x)$ in eine verallgemeinerte Fourier-Reihe nach Legendre-Polynomen (genauer: nach den Polynomen Q_k aus Abschnitt 4.3.3). Die Fourier-Koeffizienten von g bzgl. der Legendre-Polynome verschwinden alle wegen $\int_0^1 x^n \cdot g(x) dx = 0$. Wegen der Vollständigkeit der Legendre-Polynome verschwindet damit g im L_2 -Sinne. Da g zusätzlich noch als stetig vorausgesetzt wurde, gilt auch punktweise überall $g(x) = 0$.

Nun zum Eindeutigkeitsatz: Sei

$$\phi(x) = \int_0^x e^{-s_0 \cdot \xi} \cdot f(\xi) d\xi.$$

Mit partieller Integration gilt für s mit $\Re(s) > \Re(s_0)$ die folgende Darstellung der Laplace-Transformierten:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f](s) &= \int_0^\infty \underbrace{e^{-(s-s_0)\cdot x}}_{u(x)} \cdot \underbrace{e^{-s_0\cdot x} \cdot f(x)}_{\phi'(x)} dx \\ &= \left[e^{-(s-s_0)\cdot x} \cdot \phi(x) \right]_{x=0}^{x=\infty} - \int_0^\infty \underbrace{-(s-s_0) \cdot e^{-(s-s_0)\cdot x}}_{u'(x)} \cdot \phi(x) dx \\ &= (s-s_0) \cdot \int_0^\infty e^{-(s-s_0)\cdot x} \cdot \phi(x) dx.\end{aligned}$$

Die Funktion ϕ ist stetig, und es gilt nach Voraussetzung

$$\mathcal{L}[f](s_0 + n \cdot \Delta s) = n \cdot \Delta s \cdot \int_0^\infty e^{-n \cdot \Delta s \cdot x} \cdot \phi(x) dx = 0$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Mit der Substitution $\xi = e^{-\Delta s \cdot x}$ folgt

$$\int_0^1 \xi^{n-1} \cdot \phi\left(\frac{-\ln(\xi)}{\Delta s}\right) d\xi = 0, \quad n = 1, 2, \dots,$$

woraus mittels der obigen Hilfsaussage folgt, dass $\phi(x) \equiv 0$ gelten muß. Aus

$$\phi(x) = \int_0^x e^{-s_0 \cdot \xi} \cdot f(\xi) d\xi = 0$$

folgt, dass fast überall $f(x) = 0$ gelten muss.

Q.E.D.

Bemerkung 4.12: Die äquidistante Verteilung der Stützpunkte, an denen die Laplace-Transformierte ausgewertet wird, ist dabei wesentlich. Betrachte etwa

$$\mathcal{L}\left[\frac{\cos(1/x)}{\sqrt{\pi \cdot x}}\right](s) = \frac{1}{\sqrt{s}} \cdot e^{-\sqrt{2 \cdot s}} \cdot \cos(\sqrt{2 \cdot s})$$

oder auch

$$\mathcal{L}\left[\frac{\sin(1/x)}{\sqrt{\pi \cdot x}}\right](s) = \frac{1}{\sqrt{s}} \cdot e^{-\sqrt{2 \cdot s}} \cdot \sin(\sqrt{2 \cdot s}).$$

Beide Laplace-Transformierten haben jeweils unendlich viele (aber nicht äquidistante) Nullstellen längs der reellen Achse, obwohl die Ausgangsfunktionen nicht verschwinden.

4.2 Rechenregeln

Zunächst eine (kleine) Liste von „Grundtransformationen“, die durch elementares Berechnen der Laplace-Integrale zu verifizieren ist:

Einfache Laplace-Transformationen 4.13:

$$\begin{aligned}
 a_0) \quad & \mathcal{L}[1](s) = \frac{1}{s}, & \Re(s) > 0, \\
 a) \quad & \mathcal{L}[x^n](s) = \frac{n!}{s^{n+1}}, & \Re(s) > 0, \quad n > -1, \\
 b) \quad & \mathcal{L}[e^{\alpha x}](s) = \frac{1}{s - \alpha}, & \Re(s) > \alpha \in \mathbb{C}, \\
 c) \quad & \mathcal{L}[\sin(\alpha \cdot x)](s) = \frac{\alpha}{s^2 + \alpha^2}, & \Re(s) > 0, \\
 d) \quad & \mathcal{L}[\cos(\alpha \cdot x)](s) = \frac{s}{s^2 + \alpha^2}, & \Re(s) > 0, \\
 e) \quad & \mathcal{L}[\sinh(\alpha \cdot x)](s) = \frac{\alpha}{s^2 - \alpha^2}, & \Re(s) > |\alpha|, \quad \alpha \in \mathbb{C}, \\
 f) \quad & \mathcal{L}[\cosh(\alpha \cdot x)](s) = \frac{s}{s^2 - \alpha^2}, & \Re(s) > |\alpha|, \quad \alpha \in \mathbb{C}, \\
 g) \quad & \mathcal{L}[H(x - \alpha)](s) = \frac{e^{-\alpha \cdot s}}{s}, & \Re(s) > 0, \quad 0 \leq \alpha \in \mathbb{R}
 \end{aligned}$$

mit der Heavisideschen Sprungfunktion

$$H(x - \alpha) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < \alpha, \\ 1 & \text{für } x \geq \alpha. \end{cases}$$

Als Beispielrechnung:

$$\int_0^\infty e^{-s \cdot x} \cdot H(x - \alpha) \, dx = \int_\alpha^\infty e^{-s \cdot x} \, dx = \left[\frac{e^{-s \cdot x}}{-s} \right]_{x=\alpha}^{x=\infty} \quad (\Re(s) > 0) \quad \frac{e^{-\alpha \cdot s}}{s}.$$

Hieraus können leicht die Transformationen für zahlreiche komplexere Funktionen zusammgebaut werden, indem man eine Reihe von Rechenregeln für die Laplace-Transformation benutzt. Diese sollen nun vorgestellt werden:

Satz 4.14: (Laplace-Transformation von Ableitungen)

Sei $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar und $f' \in L_{1loc}([0, \infty))$. Für $\Re(s) > 0$ gilt:

$$\mathcal{L}[f'](s) = s \cdot \mathcal{L}[f](s) - f(0).$$

Beweis: Partielle Integration:

$$\int_0^{\infty} e^{-s \cdot x} \cdot f'(x) \, dx = \left[e^{-s \cdot x} \cdot f(x) \right]_{x=0}^{x=\infty} - \int_0^{\infty} \underbrace{(-s) \cdot e^{-s \cdot x}}_{\frac{d}{dx} e^{-s \cdot x}} \cdot f(x) \, dx$$

$$\stackrel{(\Re(s) > 0)}{=} -f(0) + s \cdot \int_0^{\infty} e^{-s \cdot x} \cdot f(x) \, dx.$$

Q.E.D.

Mehrfache Anwendung dieser Regel liefert:

Satz 4.15: (Laplace–Transformation höherer Ableitungen)

Sei $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ n -fach differenzierbar und $f^{(n)} \in L_{1loc}([0, \infty))$. Es gilt für $\Re(s) > 0$:

$$\mathcal{L}[f^{(n)}](s) = s^n \cdot \mathcal{L}[f](s) - s^{n-1} \cdot f(0) - s^{n-2} \cdot f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0).$$

Beweis: Wiederholte Anwendung von Satz 4.14:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f^{(n)}](s) &= s \cdot \mathcal{L}[f^{(n-1)}](s) - f^{(n-1)}(0) \\ &= s \cdot \left(s \cdot \mathcal{L}[f^{(n-2)}](s) - f^{(n-2)}(0) \right) - f^{(n-1)}(0) \\ &= s^2 \cdot \mathcal{L}[f^{(n-2)}](s) - s \cdot f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0) \\ &\vdots \\ &= s^n \cdot \mathcal{L}[f](s) - s^{n-1} \cdot f(0) - s^{n-2} \cdot f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0). \end{aligned}$$

Q.E.D.

Bemerkung 4.16: Wie bei der Fourier–Transformation (Bemerkung 1.46) gilt als fundamentales Prinzip:

Das Ableiten wird für die Laplace–Transformierte zu einer algebraischen Operation (Multiplikation mit s). Laplace–Transformation verwandelt daher Differentialgleichungen in algebraische Gleichungen. Hierbei fließen (im Gegensatz zur Fourier–Transformation) die Anfangsbedingungen der DGL in die Laplace–Transformierte ein.

Dies ist einer der Gründe, warum bei den Ingenieuren die Laplace–Transformation eine Standardmethode zur Lösung (einfacher linearer) DGLen ist.

Bemerkung 4.17: Nach 4.13.a) gilt $\mathcal{L}[x^k](s) = k!/s^{k+1}$. Es folgt

$$\mathcal{L}[f^{(n)}](s) = s^n \cdot \mathcal{L}\left[f(x) - f(0) - f'(0) \cdot x - \frac{f''(0)}{2!} \cdot x^2 - \dots - \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!} \cdot x^{n-1}\right](s),$$

oder auch

$$\mathcal{L}[f](s) = \frac{f(0)}{s} + \frac{f'(0)}{s^2} + \dots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)! \cdot s^{n-1}} + \frac{\mathcal{L}[f^{(n)}](s)}{s^n}.$$

Die letzte Darstellung liefert eine interessante Information über das asymptotische Verhalten für große Werte von $\Re(s)$. Auf dem Konvergenzbereich ist $\mathcal{L}[f^{(n)}](s)$ „nach rechts beschränkt“. Gilt $f(0) = f'(0) = \dots = f^{(n-1)}(0) = 0$, so folgt

$$\mathcal{L}[f](s) = O\left(\frac{1}{|s|^n}\right)$$

bzw., wenn man gemäß Satz 4.9 in einem Winkelbereich $\phi \in (-\pi/2, \pi/2)$ „nach rechts“ läuft, sogar

$$\mathcal{L}[f](s) = o\left(\frac{1}{|s|^n}\right).$$

Dies sollte man sich so vorstellen: Wie bei der Fourier-Transformation gilt, dass das asymptotische Abklingverhalten der Laplace-Transformierten für $\Re(s) \rightarrow \infty$ durch die Glattheit der Funktion bestimmt ist. Wenn man nur $f(x)$ mit $x \geq 0$ betrachtet, sieht man einen eventuell nicht differenzierbaren Übergang bei $x = 0$ nicht: man muss sich f für $x < 0$ durch $f(x) = 0$ fortgesetzt denken. Je mehr Ableitungen bei $x = 0$ verschwinden, um so glatter ist der Übergang von $x < 0$ zu $x \geq 0$.

Merke: Das asymptotische Abklingverhalten der Laplace-Transformierten für $\Re(s) \rightarrow \infty$ ist (bei glatten Funktionen) durch das Verhalten der Funktion am Nullpunkt bestimmt.

Beispiel 4.18: Betrachte das inhomogene Anfangswertproblem

$$y'(x) + c \cdot y(x) = h(x), \quad y(0) = y_0$$

für $y(x)$ mit einer gegebenen „rechten Seite“ $h(x)$. Laplace-Transformation verwandelt diese DGL in die algebraische Gleichung

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[y'](s) + c \cdot \mathcal{L}[y](s) &= \mathcal{L}[h](s) \quad \Rightarrow \quad s \cdot \mathcal{L}[y](s) - y(0) + c \cdot \mathcal{L}[y](s) = \mathcal{L}[h](s) \\ \Rightarrow \quad \mathcal{L}[y](s) &= \frac{\mathcal{L}[h](s) + y(0)}{s + c}. \end{aligned}$$

Um die Lösung der DGL zu erhalten, müssen wir „nur noch“

- $\mathcal{L}[h](s)$ für das gegebene $h(x)$ berechnen (zur Not numerisch),
- die Funktion finden, deren Laplace-Transformierte $(\mathcal{L}[h](s) + y(0))/(s + c)$ ist (Rücktransformation).

Ableiten im „Ortsraum“ ist i.W. Multiplikation mit s . Dementsprechend sollte Integration im Ortsraum Division durch s sein:

Satz 4.19: (Laplace–Transformation von Stammfunktionen)

Sei $f \in L_{1loc}([0, \infty))$. Für $\Re(s) > 0$ gilt:

$$\mathcal{L}\left[\int_0^x f(\xi) d\xi\right](s) = \frac{\mathcal{L}[f](s)}{s}.$$

Beweis: Partielle Integration:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \underbrace{e^{-s \cdot x}}_{u'(x)} \cdot \underbrace{\int_0^x f(\xi) d\xi}_{v(x)} dx &= \left[\underbrace{\frac{e^{-s \cdot x}}{-s}}_{u(x)} \cdot \underbrace{\int_0^x f(\xi) d\xi}_{v(x)} \right]_{x=0}^{x=\infty} - \int_0^\infty \underbrace{\frac{e^{-s \cdot x}}{-s}}_{u(x)} \cdot \underbrace{f(x)}_{v'(x)} dx \\ &\stackrel{(\Re(s) > 0)}{=} \frac{1}{s} \cdot \int_0^\infty e^{-s \cdot x} \cdot f(x) dx. \end{aligned}$$

Q.E.D.

Differentiation/Integration im Ortsraum ist Multiplikation/Division im Laplace–Raum. Auch die Umkehrung gilt:

Satz 4.20: (Multiplikation mit x /Division durch x im Ortsraum)

a) Für $x \cdot f(x)$ in $L_{1loc}([0, \infty))$ gilt:

$$\mathcal{L}[x \cdot f](s) = -\frac{d}{ds} \mathcal{L}[f](s).$$

b) Für $f(x)/x$ in $L_{1loc}([0, \infty))$ gilt:

$$\mathcal{L}\left[\frac{f(x)}{x}\right](s) = \int_{\Re(s)}^\infty \mathcal{L}[f](t + i \cdot \Im(s)) dt.$$

Speziell für reelles s : $\mathcal{L}\left[\frac{f(x)}{x}\right](s) = \int_s^\infty \mathcal{L}[f](t) dt.$

Beweis: a) wurde schon in Satz 4.7 gezeigt.

b) Natürlich ist $\Re(s) \geq \alpha_f$ impliziert. Wir betrachten ein (komplexes) Kurvenintegral, dass bei $s = \Re(s) + i \cdot \Im(s)$ startet und längs der durch $z(t) = t + i \cdot \Im(s)$, $t \in [\Re(s), R)$ gegebenen Geraden Γ nach rechts zum Punkt $S = R + i \cdot \Im(s)$ läuft. Nach a) gilt $\frac{d}{ds} \mathcal{L}[f/x](s) = -\mathcal{L}[f](s)$, also

$$\int_\Gamma^S \mathcal{L}[f](\xi) d\xi = \mathcal{L}[f/x](s) - \mathcal{L}[f/x](S)$$

für jedes s, S im Holomorphie-Gebiet von $\mathcal{L}[f]$ und jede Kurve Γ von s nach S , also

$$\mathcal{L}[f/x](s) = \mathcal{L}[f/x](S) + \int_s^S \mathcal{L}[f](\xi) d\xi.$$

Für $R \rightarrow \infty$ verschwindet $\mathcal{L}[f](S)$ nach Satz 4.9, also

$$\mathcal{L}[f/x](s) = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_s^S \mathcal{L}[f](\xi) d\xi = \int_{\Re(s)}^{\infty} \mathcal{L}[f](t + i \cdot \Im(s)) dt.$$

Q.E.D.

Einige weitere nützliche Rechenregeln:

Rechenregeln für die Laplace-Transformation 4.21:

a) *Linearität:*

$$\mathcal{L}[\alpha \cdot f + \beta \cdot g](s) = \alpha \cdot \mathcal{L}[f](s) + \beta \cdot \mathcal{L}[g](s), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}.$$

b) *Skalierung:*

$$\mathcal{L}[f(\lambda \cdot x)](s) = \frac{1}{\lambda} \cdot \mathcal{L}[f(x)]\left(\frac{s}{\lambda}\right), \quad 0 < \lambda \in \mathbb{R}.$$

c) *Multiplikation mit exp-Funktionen:*

$$\mathcal{L}[e^{\alpha x} \cdot f](s) = \mathcal{L}[f](s - \alpha), \quad \alpha \in \mathbb{C}.$$

d) *Verschiebung im Ortsraum:*

$$\mathcal{L}[f_{cut}(x - \alpha)](s) = e^{-\alpha s} \cdot \mathcal{L}[f](s), \quad 0 \leq \alpha \in \mathbb{R},$$

wobei

$$f_{cut}(x - \alpha) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < \alpha, \\ f(x - \alpha) & \text{für } \alpha \leq x. \end{cases}$$

e) *Ableitung im Ortsraum:*

$$\mathcal{L}[f^{(n)}](s) = s^n \cdot \mathcal{L}[f](s) - s^{n-1} \cdot f(0) - s^{n-2} \cdot f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0).$$

f) *Stammfunktion:*

$$\mathcal{L}\left[\int_0^x f(\xi) d\xi\right](s) = \frac{1}{s} \cdot \mathcal{L}[f](s).$$

g) *Multiplikation mit Polynomen:*

$$\mathcal{L}[x^n \cdot f](s) = (-1)^n \cdot \frac{d^n}{ds^n} \mathcal{L}[f](s).$$

h) Division durch x :

$$\mathcal{L}[f/x](s) = \int_s^\infty \mathcal{L}[f](t) dt.$$

i) Faltung:

$$\mathcal{L}[f \otimes g](s) = \mathcal{L}[f](s) \cdot \mathcal{L}[g](s)$$

mit

$$(f \otimes g)(x) = \int_0^x f(x-\xi) \cdot g(\xi) d\xi.$$

Alle diese Rechenregeln sind entweder durch die früheren Sätze schon bewiesen oder lassen sich als einfache Übungsaufgaben nachrechnen. Z.B. der Faltungssatz i):

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-s \cdot x} \cdot (f \otimes g)(x) dx &= \int_0^\infty \int_0^x e^{-s \cdot (x-\xi)} \cdot e^{-s \cdot \xi} \cdot f(x-\xi) \cdot g(\xi) d\xi dx \\ &\stackrel{(y=x-\xi)}{=} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-s \cdot y} \cdot f(y) \cdot e^{-s \cdot \xi} \cdot g(\xi) d\xi dy \\ &= \left(\int_0^\infty e^{-s \cdot y} \cdot f(y) dy \right) \cdot \left(\int_0^\infty e^{-s \cdot \xi} \cdot g(\xi) d\xi \right). \end{aligned}$$

Bemerkung 4.22: Mit diesen Regeln lassen sich zusammen mit den „Grundtransformationen“ 4.13 viele komplexere Laplace-Transformationen einfach ohne Integration bestimmen, z.B.:

$$\mathcal{L}[x \cdot e^{\alpha \cdot x}](s) \stackrel{(4.21.g)}{=} -\frac{d}{ds} \mathcal{L}[e^{\alpha \cdot x}](s) \stackrel{(4.13.b)}{=} -\frac{d}{ds} \frac{1}{s-\alpha} = \frac{1}{(s-\alpha)^2}.$$

Bemerkung 4.23: Eine einfache Anwendung der Rechenregeln: eine Laplace-Transformierte, die nicht identisch 0 ist, kann nicht periodisch sein. Gäbe es eine (eventuell komplexe) Periode $\Delta s \in \mathbb{C}$ mit $\mathcal{L}[f](s) = \mathcal{L}[f](s + \Delta s)$, so würde gelten:

$$\begin{aligned} 0 &= \mathcal{L}[f(x)](s) - \mathcal{L}[f(x)](s + \Delta s) \stackrel{(*)}{=} \mathcal{L}[(1 - e^{-\Delta \cdot x}) \cdot f(x)](s) \\ &\stackrel{(4.10)}{\implies} f(x) \equiv 0 \text{ (fast überall)}. \end{aligned}$$

Hierbei haben wir in (*) die Rechenregel 4.21.c) benutzt.

Hiermit sieht man z.B., dass die Funktion $F(s) = e^{-\alpha \cdot s}$ mit $0 \neq \alpha \in \mathbb{C}$ keine Laplace-Transformierte einer $L_{loc}([0, \infty))$ -Funktion sein kann, denn sie hat

die Periode $2 \cdot \pi \cdot i/\alpha$.

Anmerkung: diese Funktion ist allerdings die (formale) Laplace-Transformierte des Dirac-Impulses $\delta(x - \alpha)$:

$$\mathcal{L}[\delta(x - \alpha)](s) = \int_0^{\infty} e^{-s \cdot x} \cdot \delta(x - \alpha) dx = e^{-s \cdot \alpha}, \quad 0 \leq \alpha \in \mathbb{R}.$$

4.3 Rücktransformation

12.2.03↓

Nach Satz 4.10 bzw. 4.11 bestimmt eine Laplace-Transformierte $F(s) = \mathcal{L}[f(x)](s)$ die Ausgangsfunktion

$$f(x) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)](x)$$

(fast überall) eindeutig für $x \geq 0$. Es verbleibt die Frage, wie man $f(x)$ aus $F(s)$ effektiv und (halbwegs) systematisch rekonstruieren kann. Man hat i.W. folgende Möglichkeiten:

- (Die klassische Methode) Schlage in dicken Tabellenwerken nach.
- (Etwas moderner) Benutze ein „automatisiertes Tabellenwerk“, sprich: ein Computeralgebrasystem.
- (Halb-systematisch) Benutze Rechenregeln, um komplizierte Laplace-Transformierte auf einfachere zurückzuführen, dann verfare wie oben.
- (Systematisch) Konstruiere die Ausgangsfunktion durch ein komplexes Kurvenintegral.
- (Numerisch) Konstruiere die Ausgangsfunktion durch eine numerische Approximation (dies ist prinzipiell jedoch eine recht instabile Sache).

4.3.1 Vereinfachungen über Rechenregeln

Die Rechenregeln 4.21 können von „rechts nach links“ gelesen werden und liefern so Rechenregeln für die inverse Laplace-Transformation \mathcal{L}^{-1} :

Rechenregeln für die inverse Laplace-Transformation 4.24:

a) *Linearität* (für $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$):

$$\mathcal{L}^{-1}[\alpha \cdot F(s) + \beta \cdot G(s)](x) = \alpha \cdot \mathcal{L}^{-1}[F(s)](x) + \beta \cdot \mathcal{L}^{-1}[G(s)](x).$$

b) Skalierung:

$$\mathcal{L}^{-1}[F(\lambda \cdot s)](x) = \frac{1}{\lambda} \cdot \mathcal{L}^{-1}[F(s)]\left(\frac{x}{\lambda}\right), \quad 0 < \lambda \in \mathbb{R}.$$

c) Verschiebung im Laplace-Raum = Multiplikation mit exp-Funktionen im Ortsraum:

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s - \alpha)](x) = e^{\alpha \cdot x} \cdot \mathcal{L}^{-1}[F(s)](x), \quad \alpha \in \mathbb{C}.$$

d) Multiplikation mit exp-Funktionen im Laplace-Raum = Verschiebung im Ortsraum:

$$\mathcal{L}^{-1}[e^{-\alpha \cdot s} \cdot F(s)](x) = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \leq x < \alpha, \\ \mathcal{L}^{-1}[F(s)](x - \alpha) & \text{für } x \geq \alpha. \end{cases}$$

e) Multiplikation mit Polynomen = Ableitung im Ortsraum:

$$\mathcal{L}^{-1}[s^n \cdot F(s)](x) = \frac{d^n}{dx^n} \mathcal{L}^{-1}[F(s)](x),$$

falls

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)](0) = (\mathcal{L}^{-1}[F(s)])'(0) = \dots = (\mathcal{L}^{-1}[F(s)])^{(n-1)}(0) = 0$$

(ohne diese Zusatzbedingung kann $s^n \cdot F(s)$ nicht Laplace-Transformierte einer $L_{1loc}([0, \infty))$ -Funktion sein).

f) Division durch s = Integration im Ortsraum:

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)/s](x) = \int_0^x \mathcal{L}^{-1}[F(s)](\xi) d\xi.$$

g) Ableitung im Laplace-Raum = Multiplikation mit Polynomen im Ortsraum:

$$\frac{d^n}{ds^n} \mathcal{L}^{-1}[F(s)](x) = (-x)^n \cdot \mathcal{L}^{-1}[F(s)](x).$$

h) Integration im Laplace-Raum = Division durch x im Ortsraum:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\int_s^\infty F(\xi) d\xi\right](x) = \frac{1}{x} \cdot \mathcal{L}^{-1}[F(s)](x).$$

i) Multiplikation im Laplace-Raum = Faltung im Ortsraum

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}[F(s) \cdot G(s)](x) &= \mathcal{L}^{-1}[F(s)](x) \otimes \mathcal{L}^{-1}[G(s)](x) \\ &= \int_0^x \mathcal{L}^{-1}[F(s)](x - \xi) \cdot \mathcal{L}^{-1}[G(s)](\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Aus der Liste 4.13 einfacher Laplace-Transformationen erhält man eine entsprechende Liste einfacher Rücktransformationen:

Einfache Laplace-Rücktransformationen 4.25:

$$\begin{aligned}
 a_0) \quad & \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right](x) = 1, \\
 a) \quad & \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^n}\right](x) = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}, \quad n > 0, \\
 b) \quad & \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-\alpha}\right](x) = e^{\alpha \cdot x}, \quad \alpha \in \mathbb{C}, \\
 c) \quad & \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2 + \alpha^2}\right](x) = \frac{\sin(\alpha \cdot x)}{\alpha}, \quad \alpha \in \mathbb{C}, \\
 d) \quad & \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2 + \alpha^2}\right](x) = \cos(\alpha \cdot x), \\
 e) \quad & \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\alpha}{s^2 - \alpha^2}\right](x) = \frac{\sinh(\alpha \cdot x)}{\alpha}, \quad \alpha \in \mathbb{C}, \\
 f) \quad & \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2 - \alpha^2}\right](x) = \cosh(\alpha \cdot x), \quad \alpha \in \mathbb{C}, \\
 g) \quad & \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-\alpha \cdot s}}{s}\right](x) = H(x - \alpha), \quad 0 \leq \alpha \in \mathbb{R}
 \end{aligned}$$

mit der Heavisideschen Sprungfunktion $H(x - \alpha) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < \alpha, \\ 1 & \text{für } x \geq \alpha. \end{cases}$

Mit den Rechenregeln 4.24 erhält man sofort weitere Rücktransformationen, z.B.:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-\alpha)^n}\right](x) &= \frac{x^{n-1} \cdot e^{\alpha \cdot x}}{(n-1)!}, \\
 \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-\beta \cdot s}}{s^2 + \alpha^2}\right](x) &= \begin{cases} 0 & \text{für } x < \beta \\ \frac{1}{\alpha} \cdot \sin(\alpha \cdot (x - \beta)) & \text{für } \beta \leq x, \end{cases}
 \end{aligned}$$

mit $\alpha \in \mathbb{C}$ und $0 \leq \beta \in \mathbb{R}$.

Usw.

Beispiel 4.26: In Beispiel 4.18 hatten wir festgestellt, dass die Lösung des inhomogenen Anfangswertproblems

$$y'(x) + c \cdot y(x) = h(x), \quad y(0) = y_0$$

per Laplace-Transformation durch

$$\mathcal{L}[y](s) = \frac{y_0 + \mathcal{L}[h](s)}{s + c}$$

gegeben ist. Mit

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s + c}\right](x) = e^{-c \cdot x}$$

für $x \geq 0$ erhält man über die Rechenregeln

$$y(x) = y_0 \cdot e^{-c \cdot x} + \mathcal{L}^{-1}\left[\mathcal{L}[e^{-c \cdot x}](s) \cdot \mathcal{L}[h(x)](s)\right](x).$$

Das Produkt der Laplace-Transformierten entspricht einer Faltung im Ortsraum. Man erhält so eine Integraldarstellung der Gesamtlösung, wie sie sich z.B. auch durch Variation der Konstanten ergeben würde:

$$y(x) = y_0 \cdot e^{-c \cdot x} + \int_0^x e^{c \cdot (\xi - x)} \cdot h(\xi) d\xi.$$

4.3.2 Systematische Rücktransformation

Die bisherige Technik über „Rechenregeln“ funktioniert nur für sehr einfache Fälle. Wie kann man das Urbild einer Laplace-Transformierten systematisch finden? Ein Hinweis, dass (und wie) dies möglich ist, liefert der Zusammenhang 4.3 mit der Fourier-Transformation:

$$\mathcal{L}[f](s) = \sqrt{2 \cdot \pi} \cdot \mathcal{F}[f_{cut}](-i \cdot s), \quad f_{cut}(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0, \\ f(x) & \text{für } x \geq 0. \end{cases}$$

Sei $\alpha_f < \infty$ die Konvergenzabszisse von f , wähle ein beliebiges $\xi_0 > \alpha_f$. Setzen wir $s = \xi_0 + i \cdot k$, so gilt

$$\mathcal{F}[f_{cut}](-i \cdot \xi_0 + k) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \mathcal{L}[f](\xi_0 + i \cdot k),$$

wobei

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f_{cut}](-i \cdot \xi_0 + k) &= \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f_{cut}(x) \cdot e^{-i \cdot (-i \cdot \xi_0 + k) \cdot x} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \left(f_{cut}(x) \cdot e^{-\xi_0 \cdot x} \right) \cdot e^{-i \cdot k \cdot x} dx = \mathcal{F}\left[e^{-\xi_0 \cdot x} \cdot f_{cut}(x)\right](k) \end{aligned}$$

gilt. Mit $\xi_0 > \alpha_f$ gilt $\int_0^\infty |e^{-\xi_0 \cdot x} \cdot f(x)| dx < \infty$, also $e^{-\xi_0 \cdot x} \cdot f_{cut}(x) \in L_1(\mathbb{R})$, und wir können $e^{-\xi_0 \cdot x} \cdot f_{cut}(x)$ durch Fourier-Rücktransformation ermitteln:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\left[e^{-\xi_0 \cdot x} \cdot f_{cut}(x)\right](k) &= \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \mathcal{L}[f](\xi_0 + i \cdot k) \\ \Rightarrow e^{-\xi_0 \cdot x} \cdot f_{cut}(x) &= \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \mathcal{F}^{-1}\left[\mathcal{L}[f](\xi_0 + i \cdot k)\right](x) \\ &= \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{L}[f](\xi_0 + i \cdot k) \cdot e^{i \cdot k \cdot x} dk. \end{aligned}$$

Nach Multiplikation mit $e^{\xi_0 \cdot x}$ erhalten wir damit folgende Umkehrformel:

$$f_{cut}(x) = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{L}[f](\xi_0 + i \cdot k) \cdot e^{(\xi_0 + i \cdot k) \cdot x} dk.$$

Satz 4.27: (Laplace-Rücktransformation durch komplexe Integration)

Sei $F(s) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ analytisch auf einer Halbebene $\{s \in \mathbb{C}; \Re(s) > \alpha\}$. Sei $\lim_{\Re(s) \rightarrow \infty} F(s) = 0$ auf allen Winkelbereichen der Form $s = r \cdot e^{i\phi}$ mit $\phi \in [-\phi_0, \phi_0] \subset (-\pi/2, \pi/2)$. Es gelte $\int_{-\infty}^{\infty} |F(\xi_0 + i \cdot k)| dk < \infty$ für alle $\xi_0 > \alpha$. Dann ist $F(s)$ für $\Re(s) > \alpha$ die Laplace-Transformierte der Funktion

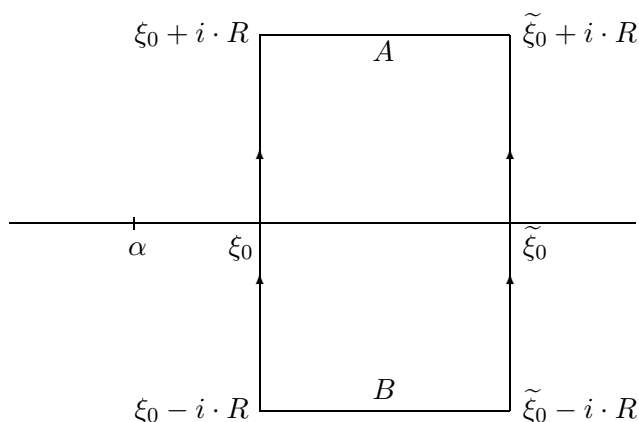
$$f(x) = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{(\xi_0 + i \cdot k) \cdot x} \cdot F(\xi_0 + i \cdot k) dk,$$

wobei $\xi_0 > \alpha$ beliebig wählbar ist.

- Dieses Integral ist unabhängig von ξ_0 .
- Der Integralwert ist 0 für jedes $x \leq 0$, also $f(x) = 0 \forall x \leq 0$.
- Die Funktion $f(x)$ ist stetig und exponentiell beschränkt: es gilt $f(x) = o(e^{\xi_0 \cdot x})$ im Limes $x \rightarrow \infty$ für jedes $\xi_0 > \alpha$.

Beweisskizze (nur die groben Ideen): Das $f(x)$ definierende Integral ist ein komplexes Kurvenintegral über die auf der Halbebene $\Re(s) > \alpha$ analytische Funktion $e^{s \cdot x} \cdot F(s)$ längs der Geraden $s(k) = \xi_0 + i \cdot k$, $k \in (-\infty, \infty)$.

a) Zeige, dass das Integral unabhängig von ξ_0 ist, solange $\xi_0 > \alpha$ gilt: Betrachte dazu den Streifen $\alpha < \xi_0 \leq \Re(s) \leq \xi_0$ mit Imaginärteilen zwischen $-R$ und R :



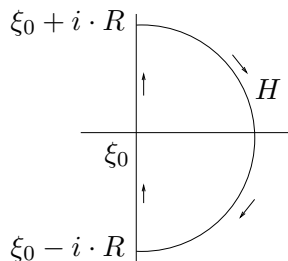
Im Grenzwert $R \rightarrow \infty$ verschwinden die Integrale über $e^{s \cdot x} \cdot F(s)$ längs der Geradenstücke A und B , z.B. für A :

$$\begin{aligned} \left| \int_A^{\xi_0 + i \cdot R} e^{s \cdot x} \cdot F(s) ds \right| &= \left| \int_{\xi_0}^{\xi_0} e^{(t+i \cdot R) \cdot x} \cdot F(t + i \cdot R) dt \right| \\ &\leq e^{\xi_0 \cdot x} \cdot \int_{\xi_0}^{\xi_0} |F(t + i \cdot R)| dt \leq e^{\xi_0 \cdot x} \cdot (\xi_0 - \xi_0) \cdot \max_{\xi_0 \leq t \leq \xi_0} |F(t + i \cdot R)|. \end{aligned}$$

Diese Schranke verschwindet für $R \rightarrow \infty$, denn es soll $\int_{-\infty}^{\infty} |F(t + i \cdot k)| dk < \infty$ für jedes t gelten. Das Deformationsprinzip für komplexe Kurvenintegrale liefert damit die Unabhängigkeit von ξ_0 .

b) Zeige: das Integral ist 0 für $x \leq 0$:

Betrachte dazu die geschlossene Kontur, die aus der Geraden $\Re(s) = \xi_0$, $\Im(s) \in [-R, R]$ und einem Halbkreis H besteht:



Da diese Kontur vollständig im Analytizitätsgebiet von $e^{s \cdot x} \cdot F(s)$ liegt, verschwindet das Gesamtintegral über den Cauchyschen Integralsatz:

$$\int_{-R}^R e^{(\xi_0 + i \cdot k) \cdot x} \cdot F(\xi_0 + i \cdot k) dk + \int_H^{\xi_0 - i \cdot R} e^{s \cdot x} \cdot F(s) ds = 0.$$

Benutzt man, dass $F(R \cdot e^{i \cdot \phi})$ auf Winkelbereichen $\phi \in (-\pi/2, \pi/2)$ für $R \rightarrow \infty$ verschwindet, so kann man zeigen, dass im Grenzwert $R \rightarrow \infty$ das Integral über H für $x \leq 0$ verschwindet. Es folgt $\int_{-\infty}^{\infty} e^{(\xi_0 + i \cdot k) \cdot x} \cdot F(\xi_0 + i \cdot k) dk = 0$ für $x \leq 0$.

c) Zeige, dass $F(s)$ die Laplace-Transformierte von $f(x)$ ist:

Die Funktion $\sqrt{2 \cdot \pi} \cdot e^{-\xi_0 \cdot x} \cdot f(x)$ ist definiert als Fourier-Rücktransformierte von $F(\xi_0 + i \cdot k) \in L_1(\mathbb{R})$ und somit stetig und beschränkt ($\Rightarrow f(x) = o(e^{\xi_0 \cdot x})$). Da $\xi_0 > \alpha$ beliebig ist, gilt auch $f(x) = o(e^{\xi_1 \cdot x})$ für jedes ξ_1 mit $\alpha < \xi_1 < \xi_0$. Damit fällt $e^{-\xi_0 \cdot x} \cdot |f(x)| = e^{-(\xi_0 - \xi_1) \cdot x} \cdot e^{-\xi_1 \cdot x} \cdot |f(x)| \leq \text{const} \cdot e^{-(\xi_0 - \xi_1) \cdot x}$ für $x \rightarrow \infty$ exponentiell ab. Zusammen mit $f(x) = 0$ für $x \leq 0$ folgt $e^{-\xi_0 \cdot x} \cdot f(x) \in L_1(\mathbb{R})$. Da $\sqrt{2 \cdot \pi} \cdot e^{-\xi_0 \cdot x} \cdot f(x)$ die Fourier-Rücktransformierte von $F(\xi_0 + i \cdot k)$ ist und sowohl $e^{-\xi_0 \cdot x} \cdot f(x)$ als auch $F(\xi_0 + i \cdot k)$ in $L_1(\mathbb{R})$ liegen, ist F als Fourier-Transformierte darstellbar, d.h.

$$\begin{aligned} F(\xi_0 + i \cdot k) &= \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{2 \cdot \pi} \cdot e^{-\xi_0 \cdot x} \cdot f(x) \cdot e^{-i \cdot k \cdot x} dx \\ &= \int_0^{\infty} e^{-(\xi_0 + i \cdot k) \cdot x} \cdot f(x) dx = \mathcal{L}[f(x)](\xi_0 + i \cdot k). \end{aligned}$$

Q.E.D.

Bemerkung 4.28: Der letzte Satz ist offensichtlich nicht auf alle Laplace-Transformierten $F(s)$ anwendbar, sondern höchstens auf diejenigen, die durch Fourier-Transformation darstellbar sind. Speziell ist die Fourier-Rücktransformierte $f(x)$ stetig. Bei Laplace-Transformierten, die unstetigen Urbildfunktionen $f(x)$ mit Sprungstellen entsprechen, würde typischerweise die Integrierbarkeitsforderung $\int_{-\infty}^{\infty} |F(\xi_0 + i \cdot k)| dk < \infty$ verletzt sein.

Beispiel 4.29: Betrachte $F(s) = e^{-\sqrt{s}}$. Diese Funktion ist analytisch für $\Re(s) > 0$ (in der Tat ist sie analytisch für alle s , die nicht auf der negativen reellen Halbachse liegen). In Polarkoordinaten gilt (mit $\phi \in (-\pi/2, \pi/2]$ für $\Re(s) \geq 0$):

$$s = r \cdot e^{i \cdot \phi} \quad \rightarrow \quad F(s) = e^{-\sqrt{r} \cdot e^{i \cdot \phi/2}} = e^{-\sqrt{r} \cdot (\cos(\phi/2) + i \cdot \sin(\phi/2))},$$

also

$$|F(s)| = e^{-\sqrt{r} \cdot \cos(\phi/2)}.$$

Für jedes ϕ mit $|\phi| \leq \pi/2$ gilt also $F(s) \rightarrow 0$ für $r \rightarrow \infty$. Weiterhin gilt für jedes $\xi_0 > 0$ mit $\xi_0 + i \cdot k = r \cdot e^{i \cdot \phi}$:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\xi_0 + i \cdot k)| dk &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\sqrt{r} \cdot \cos(\phi/2)} dk \leq \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\sqrt{r} \cdot \cos(\pi/4)} dk \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\sqrt{|k|} \cdot \cos(\pi/4)} dk < \infty \end{aligned}$$

(beachte $r = |\xi_0 + i \cdot k| \geq |k|$ für $\xi_0 > 0$). Damit sind alle Voraussetzungen von Satz 4.27 erfüllt und man erhält die folgende Integraldarstellung für die Rücktransformierte

$$f(x) = \mathcal{L}^{-1}[e^{-\sqrt{s}}] = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{(\xi_0 + i \cdot k) \cdot x} \cdot e^{-\sqrt{\xi_0 + i \cdot k}} dk$$

mit beliebigem $\xi_0 > 0$. Es verbleibt, dieses Integral zu berechnen. Es gilt

$$\frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{(\xi_0 + i \cdot k) \cdot x} \cdot e^{-\sqrt{\xi_0 + i \cdot k}} dk = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{x^{3/2}} \cdot e^{-\frac{1}{4x}}.$$

Woher bekommt man diesen Integralwert? Durch komplexe Integration (Residuensatz)!

Bemerkung 4.30: Eine wesentliche Beobachtung ist, dass eine Laplace-Transformierte zwar prinzipiell auf einer rechten Halbebene analytisch ist, aber meist auf einen wesentlich größeren Bereich der komplexen Ebene „analytisch fortgesetzt“ werden kann. Beispiel:

$$\mathcal{L}[e^{\alpha \cdot x}](x) = \int_0^{\infty} e^{-s \cdot x} \cdot e^{\alpha \cdot x} dx = \frac{1}{s - \alpha}.$$

Zwar konvergiert das Integral nur für $\Re(s) > \alpha$, die Laplace-Transformierte ist aber für alle $s \in \mathbb{C}$ außer der Polstelle $s = \alpha$ definiert und analytisch!

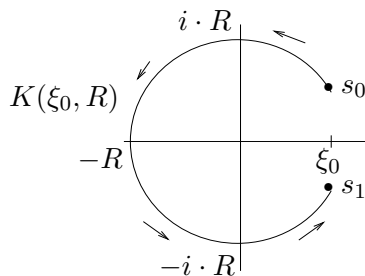
Ist eine Laplace-Transformierte meromorph mit endlich vielen isolierten Singularitäten, so bietet sich der Residuensatz an, um das Umkehrintegral zu berechnen:

Satz 4.31: (Das Umkehrintegral über Residuen)

Sei $F(s)$ meromorph und für $\Re(s) > \alpha$ eine Laplace-Transformierte. Für jedes $\xi_0 > \alpha$ gilt

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)](x) = \sum_j \operatorname{Res}_{e^{s \cdot x} \cdot F(s)}(s_j) - \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot i} \cdot \int_{K(\xi_0, R)}^{s_1} e^{s \cdot x} \cdot F(s) ds,$$

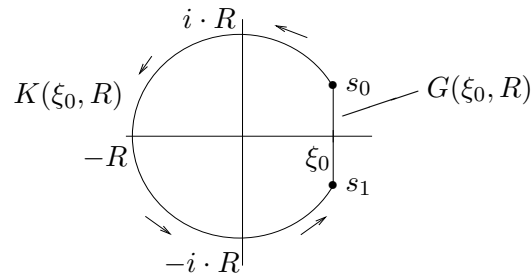
wobei die Residuensumme sich über alle Residuen s_j von $e^{s \cdot x} \cdot F(s)$ erstreckt und $K(\xi_0, R)$ ein Kreissegment um den Nullpunkt mit Radius R ist:



Beweis: Zusammen mit dem Geradenstück

$$G(\xi_0, R) = \left\{ s \in \mathbb{C}; \Re(s) = \xi_0, |\Im(s)| \leq \sqrt{R^2 - \xi_0^2} \right\}$$

ergibt sich eine geschlossene Kontur (die sogenannte „Bromwich-Kontur“), die für $R \rightarrow \infty$ sämtliche Residuen enthält (für $\Re(s) \geq \xi_0 > \alpha$ ist $F(s)$ analytisch):



Im Grenzwert $R \rightarrow \infty$ ist das Integral längs $G(\xi_0, R)$ das die Rücktransformierte definierende Integral aus Satz 4.27.

Q.E.D.

Klingt die Laplace-Transformierte insgesamt für $|z| \rightarrow \infty$ in alle Richtungen ab, so verschwindet der Beitrag des Kreissegments $K(\xi_0, R)$, und es ergibt sich eine reine Residuenformel:

14.2.03↓

Satz 4.32: (Das Umkehrintegral über Residuen)

Sei $F(s)$ meromorph und für $\Re(s) > \alpha$ eine Laplace-Transformierte. Gilt für ein $k > 0$

$$|F(z)| = O\left(\frac{1}{|z|^k}\right)$$

für $|z| \rightarrow \infty$, so gilt für jedes $\xi_0 > \alpha$

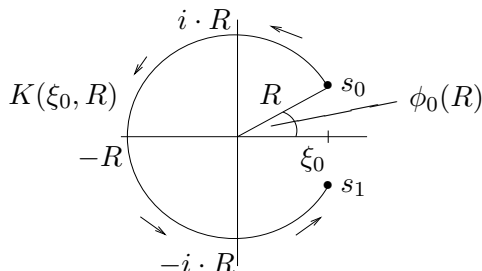
$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{s_0}^{s_1} e^{s \cdot x} \cdot F(s) ds = 0 \quad \text{für alle } x > 0$$

und damit

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)](x) = \sum_j \text{Res}_{e^{s \cdot x} \cdot F(s)}(s_j),$$

wobei sich diese Summe über alle Residuen s_j der Funktion $e^{s \cdot x} \cdot F(s)$ erstreckt.

Beweis: (technisch) Für den halben Öffnungswinkel $\phi_0(R) = \arccos(\xi_0/R)$ des Kreissegments $K(\xi_0, R)$ gilt $\phi_0(R) \in (0, \pi]$ und $\lim_{R \rightarrow \infty} \phi_0(R) = \pi/2$.



Mit der Parametrisierung $s(\phi) = R \cdot e^{i \cdot \phi}$, $\phi \in [\phi_0, 2 \cdot \pi - \phi_0]$ von $K(\xi_0, R)$ und der Abschätzung $F(R \cdot e^{i \cdot \phi}) \leq c/R^k$ (mit einer geeigneten Konstanten c) gilt:

$$\begin{aligned} & \left| \int_{K(\xi_0, R)} e^{s \cdot x} \cdot F(s) \, ds \right| \\ &= \left| \int_{\phi_0(R)}^{2 \cdot \pi - \phi_0(R)} e^{(R \cdot \cos(\phi) + i \cdot R \cdot \sin(\phi)) \cdot x} \cdot F(R \cdot e^{i \cdot \phi}) \cdot i \cdot R \cdot e^{i \cdot \phi} \, d\phi \right| \\ &\leq \int_{\phi_0(R)}^{2 \cdot \pi - \phi_0(R)} e^{R \cdot \cos(\phi) \cdot x} \cdot \frac{c}{R^k} \cdot R \, d\phi = \frac{2 \cdot c}{R^{k-1}} \cdot \int_{\phi_0(R)}^{\pi} e^{R \cdot \cos(\phi) \cdot x} \, d\phi \\ &= \underbrace{\frac{2 \cdot c}{R^{k-1}} \cdot \int_{\phi_0(R)}^{3 \cdot \pi/4} e^{R \cdot \cos(\phi) \cdot x} \, d\phi}_{(1)} + \underbrace{\frac{2 \cdot c}{R^{k-1}} \cdot \int_{3 \cdot \pi/4}^{\pi} e^{R \cdot \cos(\phi) \cdot x} \, d\phi}_{(2)}. \end{aligned}$$

Für das zweite Integral gilt mit $\cos(\phi) \leq \cos(\frac{3 \cdot \pi}{4}) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ die Abschätzung

$$\frac{2 \cdot c}{R^{k-1}} \cdot \int_{3 \cdot \pi/4}^{\pi} e^{R \cdot \cos(\phi) \cdot x} \, d\phi \leq \frac{2 \cdot c \cdot e^{-R \cdot x / \sqrt{2}}}{R^{k-1}} \cdot \int_{3 \cdot \pi/4}^{\pi} d\phi \xrightarrow{(R \rightarrow \infty)} 0.$$

Mit der Transformation $\xi = R \cdot \cos(\phi)$ gilt für das erste Integral die Abschätzung

$$\begin{aligned} & \frac{2 \cdot c}{R^{k-1}} \cdot \int_{\phi_0(R)}^{3 \cdot \pi/4} e^{R \cdot \cos(\phi) \cdot x} \, d\phi = \frac{2 \cdot c}{R^k} \cdot \int_{-R/\sqrt{2}}^{\xi_0} \frac{e^{\xi \cdot x} \, d\xi}{\sin(\phi(\xi))} \\ & \stackrel{(*)}{\leq} \frac{2 \cdot \sqrt{2} \cdot c}{R^k} \cdot \int_{-R/\sqrt{2}}^{\xi_0} e^{\xi \cdot x} \, d\xi \leq \frac{2 \cdot \sqrt{2} \cdot c}{R^k} \cdot \int_{-\infty}^{\xi_0} e^{\xi \cdot x} \, d\xi \xrightarrow{(R \rightarrow \infty)} 0 \end{aligned}$$

(beachte in (*): $\phi \in [\phi_0(R), \frac{3 \cdot \pi}{4}] \Rightarrow \sin(\phi) > \sin(\frac{3 \cdot \pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, wenn R nur groß genug ist, also $\phi_0(R) \approx \frac{\pi}{2}$ gilt).

Q.E.D.

Beispiel 4.33: Betrachte eine rationale Funktion

$$F(s) = \frac{Z(s)}{N(s)}$$

mit Polynomen $Z(s)$, $N(s)$ vom Grad $\text{grad}(Z(s)) < \text{grad}(N(s))$. Es folgt

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)](x) = \sum_j \text{Res}_{f(s)}(s_j), \quad f(s) = e^{s \cdot x} \cdot \frac{Z(s)}{N(s)},$$

wobei sich die Summe über alle Nullstellen des Nenners $N(s)$ erstreckt.

Beispiel:

$$F(s) = \frac{1}{s - \alpha} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}^{-1}[F(s)](x) = \text{Res}_{e^{s \cdot x}/(s - \alpha)}(\alpha) = e^{\alpha \cdot x}.$$

4.3.3 Numerische Rücktransformation: Entwicklung nach Legendre-Polynomen

Siehe z.B.

R.E. BELLMANN AND R.S. ROTH, *The Laplace Transform*, World Scientific 1984.

Im Zweifelsfalle wird man eine numerische Rücktransformation durchführen müssen. Als Vorbemerkung stellen wir jedoch fest, dass die Rücktransformation prinzipiell instabil sein kann: bei der Laplace-Transformation brauchen die Urbilder $f(x)$ für $x \rightarrow \infty$ nicht abzufallen, daher hat man i.A. keine der üblichen Integralnormen zur Verfügung, bezüglich der man eine stetige Abhängigkeit der Rücktransformierten $f(x)$ von der Laplace-Funktion $F(s)$ garantieren kann.

Beispiel 4.34: Wir betrachten die Laplace-Paare

$$F(s) = \mathcal{L}[f(x)](s) = \frac{1}{s^2 + a^2}, \quad f(x) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)](x) = \frac{\sin(\alpha \cdot x)}{\alpha},$$

$$\tilde{F}(s) = \mathcal{L}[\tilde{f}(x)](s) = \frac{1}{s^2 + \tilde{a}^2}, \quad \tilde{f}(x) = \mathcal{L}^{-1}[\tilde{F}(s)](x) = \frac{\sin(\tilde{\alpha} \cdot x)}{\tilde{\alpha}}.$$

Man stelle sich vor, dass \tilde{a} eine z.B. durch numerische Rundungsfehler verfälschte Approximation von a ist. Mit $\tilde{a} \approx a$ liegen die Fourier-Transformierten $F(s)$ und $\tilde{F}(s)$ für alle s „dicht beieinander“, während die Urbilder $f(x)$ und $\tilde{f}(x)$ für große x „weit auseinander“ liegen (z.B. ist für $x \approx \pi/(\tilde{a} - a)$ die Sinus-Schwingung $\tilde{f}(x)$ um π gegen die Sinus-Schwingung $f(x)$ phasenverschoben.

Die numerische Rücktransformation ist schwierig!

Hier ein möglicher Lösungsweg, der sowohl als symbolische Reihenentwicklung nach Legendre–Polynomen eine Darstellung der Rücktransformierten erlaubt als auch numerisch einfach auszuwerten ist:

Wir starten mit der Beobachtung, dass nach Satz 4.11 die Ausgangsfunktion $f(x)$ eindeutig aus den Werten der Laplace–Transformierten $F(s)$ auf äquidistanten Punkten parallel zur reellen Achse bestimmt ist und daraus rekonstruierbar sein sollte. Wir wählen ein reelles s_0 im Konvergenzbereich von $F(s)$ (das also größer als die Realteile aller Singularitäten von $F(s)$ ist) und betrachten die reellen Stützstellen

$$\{s_0 + n \cdot \Delta s; n \in \mathbb{N}\} = \{s_0 + 1, s_0 + 2, s_0 + 3, \dots\}$$

mit dem Abstand $\Delta s = 1$. Setze

$$\xi = e^{-x}, \quad x = -\ln(\xi)$$

und

$$g(\xi) = \xi^{s_0} \cdot f(-\ln(\xi)), \quad f(x) = e^{s_0 \cdot x} \cdot g(e^{-x}).$$

Mit der Substitution $\xi = e^{-x}$ folgt

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_0^\infty e^{-s \cdot x} \cdot f(x) \, dx = \int_0^\infty e^{-(s-s_0) \cdot x} \cdot e^{-s_0 \cdot x} \cdot f(x) \, dx \\ &= \int_0^1 \xi^{s-s_0-1} \cdot \underbrace{\xi^{s_0} \cdot f(-\ln(\xi))}_{g(\xi)} \, d\xi = \int_0^1 \xi^{s-s_0-1} \cdot g(\xi) \, d\xi. \end{aligned}$$

Auswertung an den Stützstellen liefert die Gleichungen

$$\boxed{\int_0^1 \xi^{k-1} \cdot g(\xi) \, d\xi = \langle \xi^{k-1}, g \rangle = F(s_0 + k), \quad k = 1, 2, 3, \dots} \quad (\#)$$

zur Bestimmung von $g(\xi)$. Diese Integralgleichung für $g(\xi)$ wird durch eine Reihenentwicklung

$$g(\xi) = c_0 \cdot Q_0(\xi) + c_1 \cdot Q_1(\xi) + c_2 \cdot Q_2(\xi) + \dots$$

nach den rekursiv definierten Polynomen

$$\begin{aligned}
 Q_0(\xi) &= 1, \\
 Q_1(\xi) &= \xi - \frac{1}{2}, \\
 Q_2(\xi) &= \xi^2 - \xi + \frac{1}{6}, \\
 Q_3(\xi) &= \xi^3 - \frac{3 \cdot \xi^2}{2} + \frac{3 \cdot \xi}{5} - \frac{1}{10}, \\
 &\vdots \\
 Q_k(\xi) &= \xi^k - \sum_{j=0}^{k-1} \frac{\langle \xi^k, Q_j \rangle}{\langle Q_j, Q_j \rangle} \cdot Q_j(\xi) \quad \left(\text{mit } \langle a, b \rangle = \int_0^1 a(\xi) \cdot b(\xi) \, d\xi \right)
 \end{aligned}$$

gelöst. Dies ist die Gram-Schmidt-Orthogonalisierung 1.16 der Polynome auf dem Raum $L_2([0, 1])$. Mit der linearen Transformation $\xi \in [0, 1] \rightarrow y(\xi) = 2 \cdot \xi - 1 \in [-1, 1]$ stimmen diese Polynome bis auf irrelevante Skalierungskonstanten mit den Legendre-Polynomen $P_k(y)$ (siehe Beispiel 1.17) überein:

$$Q_k(\xi) \sim P_k(2 \cdot \xi - 1), \quad \xi \in [0, 1].$$

Wegen der Orthogonalität dieser Polynome gilt

$$\langle \xi^{k-1}, Q_j \rangle = 0 \quad \text{für } j \geq k$$

(beachte, dass sich das Monom ξ^{k-1} als Linearkombination von $Q_0(\xi), \dots, Q_{k-1}(\xi)$ schreiben läßt). Damit ergibt sich aus (#) das System von Gleichungen

$$\begin{aligned}
 F(s_0 + 1) &= \langle \xi^0, g \rangle = c_0 \cdot \langle 1, Q_0 \rangle, \\
 F(s_0 + 2) &= \langle \xi^1, g \rangle = c_0 \cdot \langle \xi, Q_0 \rangle + c_1 \cdot \langle \xi, Q_1 \rangle, \\
 F(s_0 + 3) &= \langle \xi^2, g \rangle = c_0 \cdot \langle \xi^2, Q_0 \rangle + c_1 \cdot \langle \xi^2, Q_1 \rangle + c_2 \cdot \langle \xi^2, Q_2 \rangle,
 \end{aligned}$$

usw., aus dem sich die Entwicklungskoeffizienten c_0, c_1, \dots leicht rekursiv berechnen lassen:

$$\begin{aligned}
 c_0 &= \frac{1}{\langle 1, Q_0 \rangle} \cdot F(s_0 + 1) = F(s_0 + 1), \\
 c_1 &= \frac{1}{\langle \xi, Q_1 \rangle} \cdot \left(F(s_0 + 2) - c_0 \cdot \langle \xi, Q_0 \rangle \right), \\
 c_2 &= \frac{1}{\langle \xi^2, Q_2 \rangle} \cdot \left(F(s_0 + 3) - c_0 \cdot \langle \xi^2, Q_0 \rangle - c_1 \cdot \langle \xi^2, Q_1 \rangle \right), \\
 &\vdots
 \end{aligned}$$

Man erhält so die Reihendarstellung

$$f(x) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)](x) = e^{s_0 \cdot x} \cdot \sum_{k \geq 0} c_k \cdot Q_k(e^{-x}),$$

mit der man durch Wahl endlich vieler Terme eine (typischerweise numerische) Approximation von $f(x)$ ermitteln kann.

Beispiel 4.35: Hier ein Beispiel mit MuPAD 2.5. Wir betrachten $F(s) = e^{-s}/(s+2)$, dessen Rücktransformierte sich mit den Rechenregeln problemlos als

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 1, \\ e^{-2 \cdot (x-1)} & \text{für } x \geq 1 \end{cases}$$

ermitteln läßt. Der von MuPAD erzeugte Plot zeigte die exakte Rücktransformation zusammen mit der numerischen Approximation

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{20} c_k \cdot Q_k(e^{-x}).$$

```
>> s0:= 0:
>> F:= s -> exp(-s)/(s + 2):
>> Q:= (k, x) -> expand(orthpoly::legendre(k, 2*x - 1)):
>> K:= 20: // Benutze Q(0,x) bis Q(K, x) zur Darstellung.

>> // Berechne die Koeffizienten <x^k, Q.j(x)> des Gleichungssystems
>> for k from 0 to K do
&>   for j from 0 to k do
&>     q[k, j]:= int(x^k * Q(j, x), x = 0 .. 1);
&>   end_for:
&> end_for:

>> // Loese das Gleichungssystem fuer die Fourier--Koeffizienten
>> for k from 0 to K do
&>   c[k]:= float((F(s0+k+1) - _plus(c[j]*q[k,j] $ j=0..k-1))/q[k,k]);
&> end_for:

>> // Die numerische Legendre-Reihe:
>> f_n:= float(exp(s0*x)*_plus(c[k]*Q(k, exp(-x)) $ k=0..K)):
>> f_n:= combine(f_n)
```

```
839.8394661 exp(-2 x) - 3.702991665 exp(-x) -
60038.75388 exp(-3 x) + 2102945.0 exp(-4 x) -
42831092.79 exp(-5 x) + 561271017.5 exp(-6 x) -
```

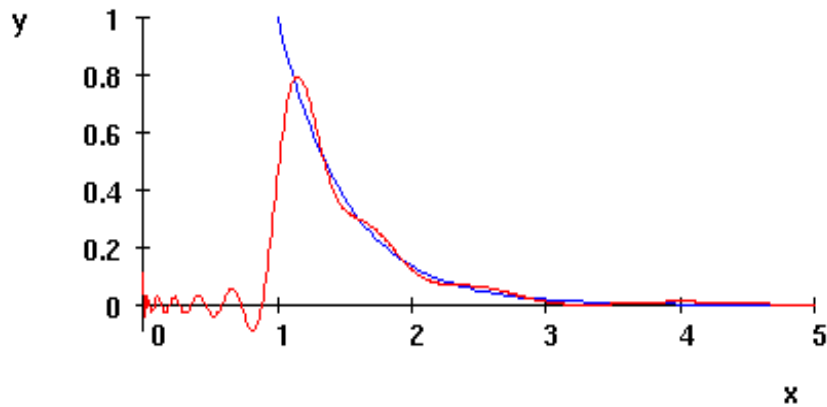
```

5045554435.0 exp(-7 x) + 3.249335486e10 exp(-8 x) -
1.545145703e11 exp(-9 x) + 5.541281592e11 exp(-10 x) -
1.520051011e12 exp(-11 x) + 3.215842006e12 exp(-12 x) -
5.26149179e12 exp(-13 x) + 6.637253345e12 exp(-14 x) -
6.392487343e12 exp(-15 x) + 4.612539949e12 exp(-16 x) -
2.412944658e12 exp(-17 x) + 8.639586896e11 exp(-18 x) -
1.893583101e11 exp(-19 x) + 1.915724972e10 exp(-20 x) -
0.0004694259567

// Plote das exakte Urbild zusammen mit der numerischen
// Approximation f_n:
>> plot(
&> plot::Function2d(exp(-2*(x-1)), x = 1..5, Color = RGB::Blue),
&> plot::Function2d(f_n, x = 0..5, Color = RGB::Red, Grid = [500]),
&> Ticks = [6, 6], FontSize = 12)

```

Nicht unerwartet: man erkennt deutlich ein Gibbsches Phänomen an der Unstetigkeitsstelle $x = 1$:



4.4 Anwendung: die „Systemtheorie“ der Ingenieure

Hiefür reicht leider die Zeit nicht mehr ...