Kapitel 4

Laplace–Transformation

Neben der Fourier–Transformation des Kapitels 1.4 spielt eine weitere Integraltransformation in (speziell technischen) Anwendungen eine große Rolle: die schon im Motivationsabschnitt 1.1 vorgestellte Laplace–Transformation. Es gibt zahllose Bücher zur Laplace–Transformation (die meisten für Ingenieure). Hier interessant sind z.B.: $\boxed{\downarrow 7.2.03}$

[Föl] Otto Föllinger, *Laplace–, Fourier– und z–Transformation*, Hüthig Verlag, 2000.

[Doe] Gustav Doetsch, *Einführung in Theorie und Anwendung der Laplace–Transformation*, Birkhäuser 1970.

[Mar] Jerrold E. Marsden, *Basic Complex Analysis*, Freeman 1987.

4.1 Strukturelles: Existenz und Eindeutigkeit

Wir betrachten Funktionen $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, die „lokal integrierbar" sind:

$$f \in L_{1loc}([0, \infty)) = \Big\{ f : [0, \infty) \to \mathbb{R};\ \int_a^b |f(x)|\, dx < \infty\ \forall\ 0 < a, b < \infty \Big\}.$$

Dies sind die Funktionen, die hinreichend glatt sind, so dass sie über beliebige **endliche** Bereiche integriert werden können. Es werden (zumindestens zunächst) jedoch keinerlei Voraussetzungen über das Verhalten bei ∞ gemacht, d.h., $\int_a^\infty f(x)\, dx$ braucht nicht zu existieren.

Definition 4.1: (Laplace–Transformation)

Für $f \in L_{1loc}([0, \infty))$ definieren wir die **„Laplace–Transformierte von f"** *als*

$$\mathcal{L}[f](s) = \int_0^\infty e^{-s \cdot x} \cdot f(x)\, dx, \quad s \in \mathbb{C}.$$

Für gegebenes $s \in \mathbb{C}$ nennt man das Laplace–Integral **absolut konvergent**, wenn das Integral $\int_0^\infty |e^{-s\cdot x} \cdot f(x)|\,dx$ im L_1-Sinne existiert. Man nennt es **bedingt konvergent**, wenn

$$\lim_{N\to\infty} \int_0^N e^{-s\cdot x} \cdot f(x)\,dx$$

existiert. Es ist zu klären, für welche $s \in \mathbb{C}$ die Laplace–Transformierte definiert ist. Auf diesem Bereich ist dann $\mathcal{L}[f](s)$ als komplexe Funktion von s aufzufassen. Mit der Laplace–Tranformierten ist die Abbildung $s \to \mathcal{L}[f](s)$ gemeint.

Bemerkung 4.2: *Für Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bemerkt das Laplace–Integral nichts von den Funktionswerten $f(x)$ mit $x < 0$. Die Laplace–Transformation macht also prinzipiell nur Aussagen über f auf der positiven Halbachse. Besteht man unbedingt darauf, Funktionen über $\mathbb{R}$ zu betrachten, so sollte man sich die Funktionen als mittels $f(x) = 0 \;\forall\; x < 0$ auf die ganze reelle Achse fortgesetzt vorstellen.*

Bemerkung 4.3: *Betrachte eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 0 \;\forall\; x < 0$. Betrachtet man formal die Fourier–Transformation mit* **komplexen** *Frequenzen $k = -i \cdot s$ auf der imaginären Achse, so ergibt sich die Laplace–Transformierte als Fourier–Transformierte:*

$$\mathcal{F}[f](-i\cdot s) = \frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot e^{-i\cdot(-i\cdot s)\cdot x}\,dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}} \cdot \int_0^{\infty} f(x) \cdot e^{-s\cdot x}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}} \cdot \mathcal{L}[f](s).$$

Dies läßt erwarten, das es viele (zumindestens formale) Ähnlichkeiten zwischen der Fourier– und der Laplace–Transformation gibt.

Zunächst zur Existenz der Transformation: für welche Werte von s existiert das Laplace–Integral? Die Konvergenzsituation bei (komplexen) Potenzreihen war sehr einfach: Konvergenz innerhalb von Kreisen, Divergenz außerhalb von Kreisen. Bei der Laplace–Transformation ist die Situation ähnlich einfach: Existenz der Transformation in einer „rechten Halbebene“, Nichtexistenz in einer „linken Halbebene“:

Satz 4.4: (Existenz des Laplace–Integrals)

Zu $f \in L_{1loc}([0,\infty))$ existiert eine eindeutige Zahl $-\infty \le \alpha_f \le \infty$ (die **„Abszisse absoluter Konvergenz“***), so dass $\int_0^\infty e^{-s\cdot x} \cdot f(x)\,dx$*

a) für jedes s mit $\Re(s) > \alpha_f$ absolut konvergiert,

b) für kein s mit $\Re(s) < \alpha_f$ absolut konvergiert.

Konvergiert das Integral für einen Wert s_0 mit $\Re(s_0) = \alpha_f$ absolut, dann konvergiert es für alle Werte s mit $\Re(s) = \alpha_f$.

Der Bereich absoluter Konvergenz der Laplace–Integrale ist entweder eine offene Halbebene $\{s \in \mathbb{C}; \Re(s) > \alpha_f\}$ oder eine geschlossene Halbebene $\{s \in \mathbb{C}; \Re(s) \geq \alpha_f\}$.

Beweis: Wenn das Integral für ein $s_0 \in \mathbb{C}$ absolut konvergiert, so konvergiert es für jedes $s \in \mathbb{C}$ mit $\Re(s) \geq \Re(s_0)$ absolut, denn

$$|e^{-s\cdot x} \cdot f(x)| = |e^{-(s-s_0)\cdot x} \cdot e^{-s_0\cdot x} \cdot f(x)|$$

$$= \underbrace{e^{-(\Re(s)-\Re(s_0))\cdot x}}_{\leq 1} \cdot |e^{-s_0\cdot x} \cdot f(x)| \leq |e^{-s_0\cdot x} \cdot f(x)|,$$

d.h., der Integrand für s wird durch den absolut integrierbaren Integranden für s_0 dominiert. Damit gilt

$$\alpha_f = \inf\Big\{\Re(s); \int_0^\infty |e^{-s\cdot x} \cdot f(x)|\, dx < \infty\Big\}.$$

Q.E.D.

Es gibt Funktionen $f(x)$ mit $\alpha_f = -\infty$ (die Laplace–Transformierte ist auf ganz $\mathbb{C}$ definiert) oder auch $\alpha_f = \infty$ (das Laplace–Integral konvergiert nirgends absolut). Der letzte Fall ist uninteressant: es gibt Funktionen, auf die die Laplace–Transformation nicht anwendbar ist. Beispiel: $f(x) = e^{(x^2)}$. Für die Klasse von Funktionen, die nicht stärker als exponentiell ansteigen, kann man einen Mindestkonvergenzbereich garantieren:

Definition und Satz 4.5:

Die Funktion $f \in L_{1loc}([0,\infty))$ heißt **„exponentiell beschränkt“**, *wenn Konstanten $C, A \in \mathbb{R}$ existieren, so dass $|f(x)| \leq C \cdot e^{A\cdot x}$ gilt für fast alle $x \in [0,\infty)$. Für die Abszisse absoluter Konvergenz gilt dann $\alpha_f \leq A$, d.h., die Laplace–Transformierte existiert in einer nichtleeren Halbebene.*

Beweis: Es gilt

$$|e^{-s\cdot x} \cdot f(x)| \leq e^{-\Re(s)\cdot x} \cdot C \cdot e^{A\cdot x} = C \cdot e^{-(\Re(s)-A)\cdot x}.$$

Für jedes $s \in \mathbb{C}$ mit $\Re(s) > A$ besitzt der Integrand damit die absolut integrierbare Majorante $A \cdot e^{-(\Re(s)-A)\cdot x}$.

Q.E.D.

In der Konvergenzhalbebene ist eine Laplace–Transformierte eine angenehme Funktion: sie ist „nach rechts“ beschränkt und analytisch:

Satz 4.6: (Die Laplace–Transformierte ist „nach rechts“ beschränkt)

Für jedes $f \in L_{1loc}([0,\infty))$ *mit Konvergenzabszisse* α_f *gilt*

$$|\mathcal{L}[f](s)| \leq \int_0^\infty |e^{-s_0 \cdot x} \cdot f(x)|\, dx$$

für jedes s, s_0 *mit* $\alpha_f < \Re(s_0) \leq \Re(s)$.

Beweis: Wie im Beweis von Satz 4.4: $|e^{-s\cdot x} \cdot f(x)| \leq |e^{-s_0\cdot x} \cdot f(x)|$.

Q.E.D.

Satz 4.7: (Die Laplace–Transformierte ist analytisch)

Für jedes $f \in L_{1loc}([0,\infty))$ *ist die Laplace–Transformierte im Inneren der Konvergenzhalbebene* $\{s \in \mathbb{C}; \Re(s) > \alpha_f\}$ *analytisch. Es gilt*

$$\frac{d}{ds}\, \mathcal{L}[f](s) = -\int_0^\infty e^{-s\cdot x} \cdot x \cdot f(x)\, dx = -\mathcal{L}[x \cdot f](s),$$

d.h., man darf unter dem Integral nach s *differenzieren.*

Beweis: Es gilt

$$\frac{\mathcal{L}[f](s+h) - \mathcal{L}[f](s)}{h} + \mathcal{L}[x\cdot f](s) = \int_0^\infty \frac{1}{h} \cdot \Big(e^{-(s+h)\cdot x} - e^{-s\cdot x} + x e^{-s\cdot x}\Big) \cdot f(x)\, dx$$

$$= \int_0^\infty \frac{e^{-h\cdot x} - 1 + h \cdot x}{h} \cdot e^{-s\cdot x} \cdot f(x)\, dx.$$

Die durch

$$\frac{e^{-h\cdot x} - 1 - h\cdot x}{h} = \frac{\frac{h^2}{2}\cdot x^2 - \frac{h^3}{3!}\cdot x^3 \mp \cdots}{h} = h \cdot \underbrace{\Big(\frac{1}{2}\cdot x^2 - \frac{h}{3!}\cdot x^3 \mp \cdots\Big)}_{g(h,x)}$$

eingeführte Funktion $g(h,x)$ ist „beliebig harmlos“ (absolute Konvergenz dieser Reihe, Beschränktheit von g etc.), so dass der Grenzwert $h \to 0$ unter das Integral geschoben werden darf:

$$\lim_{h\to\infty} \frac{\mathcal{L}[f](s+h) - \mathcal{L}[f](s)}{h} + \mathcal{L}[x\cdot f](s)$$

$$= \Big(\lim_{h\to 0} h\Big) \cdot \Big(\int_0^\infty \lim_{h\to 0} g(h,x) \cdot e^{-s\cdot x} \cdot f(x)\, dx\Big)$$

$$= \Big(\lim_{h\to 0} h\Big) \cdot \Big(\int_0^\infty \frac{x^2}{2} \cdot e^{-s\cdot x} \cdot f(x)\, dx\Big) = 0,$$

da $\int_0^\infty x^2 \cdot e^{-s\cdot x} \cdot f(x)\, dx$ absolut konvergiert (der Integrand wird dominiert durch $|x^2 \cdot e^{-s\cdot x} \cdot f(x)| \leq \text{const} \cdot |e^{-s_0\cdot x} \cdot f(x)|$ mit beliebigem s_0 mit $\alpha_f < \Re(s_0) < \Re(s)$).

Q.E.D.

Bemerkung 4.8: *Hat $f \in L_{1loc}([0,\infty))$ einen endlichen „Träger“ (also $f(x) = 0 \ \forall \ x > x_0$), so existiert die Laplace–Transformierte offensichtlich für jedes $s \in \mathbb{C}$ und ist damit eine auf ganz $\mathbb{C}$ analytische Funktion. Andererseits ist nach dem „Satz von Liouville“ (Blatt 13, Aufgabe 59.b) eine auf ganz $\mathbb{C}$ analytische Funktion entweder konstant[1] oder unbeschränkt. Für „weit links liegende“ Werte von s muss die Laplace–Transformierte also betragsmäßig beliebig hohe Werte annehmen.*

Satz 4.6 kann deutlich verfeinert werden. Für die Laplace–Transformation gilt ein Analogon des Riemann–Lebesgue–Lemmas 1.37 z.B. in der folgenden Form:

Satz 4.9: (Asymptotik der Laplace–Transformierten)
Für $f \in L_{1loc}([0,\infty))$ und jedes $\phi \in (-\pi/2, \pi/2)$ gilt $\lim\limits_{r\to\infty} \mathcal{L}[f](r \cdot e^{i\cdot\phi}) = 0.$

Beweis (technisch): Der Winkel $\phi \in (-\pi/2, \pi/2)$ ist als „Richtung“ zu interpretieren, in die wir vom Nullpunkt aus startend längs einer Geraden nach „Unendlich“ laufen wollen. Es gilt

$$|\mathcal{L}[f](r \cdot e^{i\cdot\phi})| = \left| \int_0^\infty e^{-r\cdot(\cos(\phi)+i\cdot\sin(\phi))\cdot x} \cdot f(x)\, dx \right|$$

$$\leq \int_0^\infty e^{-r\cdot\cos(\phi)\cdot x} \cdot \underbrace{|e^{-r\cdot\sin(\phi)\cdot i\cdot x}|}_{=1} \cdot |f(x)|\, dx = \int_0^\infty e^{-r\cdot\cos(\phi)\cdot x} \cdot |f(x)|\, dx.$$

Sei r hinreichend groß, so dass $r \cdot \cos(\phi) > \alpha_f$ gilt (also $s = r \cdot e^{i\cdot\phi}$ in der Konvergenzhalbebene liegt). Sei s_0 ein reeller Wert mit $\alpha_f < s_0 < r \cdot \cos(\phi)$. Es folgt

$$|\mathcal{L}[f](r \cdot e^{i\cdot\phi})| \leq \int_0^\infty e^{-r\cdot\cos(\phi)\cdot x} \cdot |f(x)|\, dx$$

$$= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{r\cdot\cos(\phi)-s_0}}} \underbrace{e^{-r\cdot\cos(\phi)\cdot x}}_{\leq 1} \cdot |f(x)|\, dx + \int_{\frac{1}{\sqrt{r\cdot\cos(\phi)-s_0}}}^\infty \overbrace{e^{-(r\cdot\cos(\phi)-s_0)\cdot x}}^{\leq e^{-\sqrt{r\cdot\cos(\phi)-s_0}}} \cdot e^{-s_0\cdot x} \cdot |f(x)|\, dx$$

$$\leq \int_0^{\frac{1}{\sqrt{r\cdot\cos(\phi)-s_0}}} |f(x)|\, dx + e^{-\sqrt{r\cdot\cos(\phi)-s_0}} \cdot \int_{\frac{1}{\sqrt{r\cdot\cos(\phi)-s_0}}}^\infty e^{-s_0\cdot x} \cdot |f(x)|\, dx.$$

Im Grenzwert $r \to \infty$ verschwindet das erste Integral, da die Intervalllänge gegen 0 geht. Das zweite Integral konvergiert für $r \to \infty$ gegen $\int_0^\infty e^{-s_0\cdot x} \cdot |f(x)|\, dx < \infty$ (beachte, dass s_0 in der Konvergenzhalbebene liegen soll). Der

[1] Die (formale) Laplace–Transformierte der Diracschen Delta–Function $\delta(x)$ ist konstant 1.

Vorfaktor $e^{-\sqrt{r\cdot\cos(\phi)-s_0}}$ drückt auch diesen Anteil gegen 0.

Q.E.D.

Nun die zentrale Aussage, dass die Laplace–Transformation eine Funktion eindeutig codiert. Da die Laplace–Integrale nichts davon merken, wenn die Ausgangsfunktion $f(x)$ an einzelnen Punkten umdefiniert wird, kann die Laplace–Transformierte die Ausgangsfunktion allerdings nur fast überall festlegen:

Satz 4.10: (Die Laplace–Transformierte bestimmt die Ausgangsfunktion eindeutig)

Sei $f \in L_{1loc}([0,\infty))$, $\alpha_f < \infty$. Gilt $\mathcal{L}[f](s) \equiv 0$ im Inneren der Konvergenzhalbebene, so folgt $f(x) \equiv 0$ für fast alle $x \in [0,\infty)$. Damit stimmen zwei Funktionen für fast alle $x \in [0,\infty)$ überein, wenn ihre Laplace–Transformierten übereinstimmen.

Statt diesen Satz zu beweisen, betrachten wir die stärkere Aussage:

Satz 4.11: (Die Laplace–Transformierte auf einem äquidistanten Gitter bestimmt die Ausgangsfunktion eindeutig)

Sei $f \in L_{1loc}([0,\infty))$, $\alpha_f < \infty$. Sei s_0 ein beliebiger Konvergenzpunkt des Laplace–Integrals (d.h., $\Re(s_0) > \alpha_f$). Wenn es ein $\Delta s > 0$ gibt, so dass $\mathcal{L}[f](s_0 + n\cdot\Delta s) = 0$ gilt für alle $n \in \mathbb{N}$, so folgt $f(x) \equiv 0$ für fast alle $x \in [0,\infty)$.

Stimmen zwei Laplace–Transformierte auf äquidistanten Punkten parallel zur reellen Achse überein, so müssen die Ausgangsfunktionen (fast überall) übereinstimmen.

11.2.03↓ **Beweis:** Zunächst eine Hilfsaussage:

Sei $g(x)$ eine stetige Funktion. Gilt $\int_0^1 x^n \cdot g(x)\,dx = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$, so folgt $g(x) = 0$ für alle $x \in [0,1]$.

Dies ist nach Kapitel 2 klar: zerlege $g(x)$ in eine verallgemeinerte Fourier–Reihe nach Legendre–Polynomen (genauer: nach den Polynomen Q_k aus Abschnitt 4.3.3). Die Fourier–Koeffizienten von g bzgl. der Legendre–Polynome verschwinden alle wegen $\int_0^1 x^n \cdot g(x)\,dx = 0$. Wegen der Vollständigkeit der Legendre–Polynome verschwindet damit g im L_2–Sinne. Da g zusätzlich noch als stetig voraussgesetzt wurde, gilt auch punktweise überall $g(x) = 0$.

Nun zum Eindeutigkeitssatz: Sei

$$\phi(x) = \int_0^x e^{-s_0\cdot\xi}\cdot f(\xi)\,d\xi.$$

Mit partieller Integration gilt für s mit $\Re(s) > \Re(s_0)$ die folgende Darstellung der Laplace–Transformierten:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f](s) &= \int_0^\infty \underbrace{e^{-(s-s_0)\cdot x}}_{u(x)} \cdot \underbrace{e^{-s_0\cdot x} \cdot f(x)}_{\phi'(x)}\, dx \\ &= \Big[e^{-(s-s_0)\cdot x} \cdot \phi(x)\Big]_{x=0}^{x=\infty} - \int_0^\infty \underbrace{-(s-s_0)\cdot e^{-(s-s_0)\cdot x}}_{u'(x)} \cdot \phi(x)\, dx \\ &= (s-s_0)\cdot \int_0^\infty e^{-(s-s_0)\cdot x} \cdot \phi(x)\, dx.\end{aligned}$$

Die Funktion ϕ ist stetig, und es gilt nach Voraussetzung

$$\mathcal{L}[f](s_0 + n\cdot\Delta s) = n\cdot\Delta s \cdot \int_0^\infty e^{-n\cdot\Delta s\cdot x} \cdot \phi(x)\, dx = 0$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Mit der Substitution $\xi = e^{-\Delta s\cdot x}$ folgt

$$\int_0^1 \xi^{n-1} \cdot \phi\Big(\frac{-\ln(\xi)}{\Delta s}\Big)\, d\xi = 0, \quad n = 1, 2, \cdots,$$

woraus mittels der obigen Hilfsaussage folgt, dass $\phi(x) \equiv 0$ gelten muß. Aus

$$\phi(x) = \int_0^x e^{-s_0\cdot\xi} \cdot f(\xi)\, d\xi = 0$$

folgt, dass fast überall $f(x) = 0$ gelten muss.

Q.E.D.

Bemerkung 4.12: *Die äquidistante Verteilung der Stützpunkte, an denen die Laplace–Transformierte ausgewertet wird, ist dabei wesentlich. Betrachte etwa*

$$\mathcal{L}\Big[\frac{\cos(1/x)}{\sqrt{\pi\cdot x}}\Big](s) = \frac{1}{\sqrt{s}} \cdot e^{-\sqrt{2\cdot s}} \cdot \cos(\sqrt{2\cdot s})$$

oder auch

$$\mathcal{L}\Big[\frac{\sin(1/x)}{\sqrt{\pi\cdot x}}\Big](s) = \frac{1}{\sqrt{s}} \cdot e^{-\sqrt{2\cdot s}} \cdot \sin(\sqrt{2\cdot s}).$$

Beide Laplace–Transformierten haben jeweils unendlich viele (aber nicht äquidistante) Nullstellen längs der reellen Achse, obwohl die Ausgangsfunktionen nicht verschwinden.

4.2 Rechenregeln

Zunächst eine (kleine) Liste von „Grundtransformationen“, die durch elementares Berechnen der Laplace–Integrale zu verifizieren ist:

Einfache Laplace–Transformationen 4.13:

$$a_0)\qquad \mathcal{L}[1](s) = \frac{1}{s}, \qquad \Re(s) > 0,$$

$$a)\qquad \mathcal{L}[x^n](s) = \frac{n!}{s^{n+1}}, \qquad \Re(s) > 0,\ n > -1,$$

$$b)\qquad \mathcal{L}[e^{\alpha\cdot x}](s) = \frac{1}{s-\alpha}, \qquad \Re(s) > \alpha \in \mathbb{C},$$

$$c)\qquad \mathcal{L}[\sin(\alpha\cdot x)](s) = \frac{\alpha}{s^2+\alpha^2}, \qquad \Re(s) > 0,$$

$$d)\qquad \mathcal{L}[\cos(\alpha\cdot x)](s) = \frac{s}{s^2+\alpha^2}, \qquad \Re(s) > 0,$$

$$e)\qquad \mathcal{L}[\sinh(\alpha\cdot x)](s) = \frac{\alpha}{s^2-\alpha^2}, \qquad \Re(s) > |\alpha|,\ \alpha \in \mathbb{C},$$

$$f)\qquad \mathcal{L}[\cosh(\alpha\cdot x)](s) = \frac{s}{s^2-\alpha^2}, \qquad \Re(s) > |\alpha|,\ \alpha \in \mathbb{C},$$

$$g)\qquad \mathcal{L}[H(x-\alpha)](s) = \frac{e^{-\alpha\cdot s}}{s}, \qquad \Re(s) > 0,\ 0 \le \alpha \in \mathbb{R}$$

mit der Heavisideschen Sprungfunktion

$$H(x-\alpha) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < \alpha, \\ 1 & \text{für } x \ge \alpha. \end{cases}$$

Als Beispielrechnung:

$$\int_0^\infty e^{-s\cdot x}\cdot H(x-\alpha)\,dx = \int_\alpha^\infty e^{-s\cdot x}\,dx = \Big[\frac{e^{-s\cdot x}}{-s}\Big]_{x=\alpha}^{x=\infty} \overset{(\Re(s)>0)}{=} \frac{e^{-\alpha\cdot s}}{s}.$$

Hieraus können leicht die Transformationen für zahlreiche komplexere Funktionen zusammengebaut werden, indem man eine Reihe von Rechenregeln für die Laplace–Transformation benutzt. Diese sollen nun vorgestellt werden:

Satz 4.14: (Laplace–Transformation von Ableitungen)

Sei $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $f' \in L_{1loc}([0,\infty))$. Für $\Re(s) > 0$ gilt:

$$\mathcal{L}[f'](s) = s\cdot\mathcal{L}[f](s) - f(0).$$

Beweis: Partielle Integration:

$$\int_0^\infty e^{-s\cdot x}\cdot f'(x)\,dx = \Big[e^{-s\cdot x}\cdot f(x)\Big]_{x=0}^{x=\infty} - \int_0^\infty \underbrace{(-s)\cdot e^{-s\cdot x}}_{\frac{d}{dx}\,e^{-s\cdot x}}\cdot f(x)\,dx$$

$$\overset{(\Re(s)>0)}{=} -f(0) + s\cdot\int_0^\infty e^{-s\cdot x}\cdot f(x)\,dx.$$

Q.E.D.

Mehrfache Anwendung dieser Regel liefert:

Satz 4.15: (Laplace–Transformation höherer Ableitungen)
Sei $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ n-fach differenzierbar und $f^{(n)}\in L_{1loc}([0,\infty))$. Es gilt für $\Re(s)>0$:

$$\mathcal{L}[f^{(n)}](s) = s^n\cdot\mathcal{L}[f](s) - s^{n-1}\cdot f(0) - s^{n-2}\cdot f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0).$$

Beweis: Wiederholte Anwendung von Satz 4.14:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f^{(n)}](s) &= s\cdot\mathcal{L}[f^{(n-1)}](s) - f^{(n-1)}(0)\\ &= s\cdot\Big(s\cdot\mathcal{L}[f^{(n-2)}](s) - f^{(n-2)}(0)\Big) - f^{(n-1)}(0)\\ &= s^2\cdot\mathcal{L}[f^{(n-2)}](s) - s\cdot f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)\\ &\vdots\\ &= s^n\cdot\mathcal{L}[f](s) - s^{n-1}\cdot f(0) - s^{n-2}\cdot f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0).\end{aligned}$$

Q.E.D.

Bemerkung 4.16: *Wie bei der Fourier–Transformation (Bemerkung 1.46) gilt als fundamentales Prinzip:*

Das Ableiten wird für die Laplace–Transformierte zu einer algebraischen Operation (Multiplikation mit s). Laplace–Transformation verwandelt daher Differentialgleichungen in algebraische Gleichungen. Hierbei fließen (im Gegensatz zur Fourier–Transformation) die Anfangsbedingungen der DGL in die Laplace–Transformierte ein.

Dies ist einer der Gründe, warum bei den Ingenieuren die Laplace–Transformation eine Standardmethode zur Lösung (einfacher linearer) DGLen ist.

Bemerkung 4.17: *Nach 4.13.a) gilt $\mathcal{L}[x^k](s) = k!/s^{k+1}$. Es folgt*

$$\mathcal{L}[f^{(n)}](s) = s^n \cdot \mathcal{L}\Big[f(x) - f(0) - f'(0) \cdot x - \frac{f''(0)}{2!} \cdot x^2 - \cdots - \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!} \cdot x^{n-1}\Big](s),$$

oder auch

$$\mathcal{L}[f](s) = \frac{f(0)}{s} + \frac{f'(0)}{s^2} + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)! \cdot s^{n-1}} + \frac{\mathcal{L}[f^{(n)}](s)}{s^n}.$$

Die letzte Darstellung liefert eine interessante Information über das asymptotische Verhalten für große Werte von $\Re(s)$. Auf dem Konvergenzbereich ist $\mathcal{L}[f^{(n)}](s)$ „nach rechts beschränkt". Gilt $f(0) = f'(0) = \cdots = f^{(n-1)}(0) = 0$, so folgt

$$\mathcal{L}[f](s) = O\Big(\frac{1}{|s|^n}\Big)$$

bzw., wenn man gemäß Satz 4.9 in einem Winkelbereich $\phi \in (-\pi/2, \pi/2)$ „nach rechts" läuft, sogar

$$\mathcal{L}[f](s) = o\Big(\frac{1}{|s|^n}\Big).$$

Dies sollte man sich so vorstellen: Wie bei der Fourier–Transformation gilt, dass das asymptotische Abklingverhalten der Laplace–Transformierten für $\Re(s) \to \infty$ durch die Glattheit der Funktion bestimmt ist. Wenn man nur $f(x)$ mit $x \geq 0$ betrachtet, sieht man einen eventuell nicht differenzierbaren Übergang bei $x = 0$ nicht: man muss sich f für $x < 0$ durch $f(x) = 0$ fortgesetzt denken. Je mehr Ableitungen bei $x = 0$ verschwinden, um so glatter ist der Übergang von $x < 0$ zu $x \geq 0$.

> **Merke:** *Das asymptotische Abklingverhalten der Laplace–Transformierten für $\Re(s) \to \infty$ ist (bei glatten Funktionen) durch das Verhalten der Funktion am Nullpunkt bestimmt.*

Beispiel 4.18: Betrachte das inhomogene Anfangswertproblem

$$y'(x) + c \cdot y(x) = h(x), \quad y(0) = y_0$$

für $y(x)$ mit einer gegebenen „rechten Seite" $h(x)$. Laplace–Transformation verwandelt diese DGL in die algebraische Gleichung

$$\mathcal{L}[y'](s) + c \cdot \mathcal{L}[y](s) = \mathcal{L}[h](s) \quad \Rightarrow \quad s \cdot \mathcal{L}[y](s) - y(0) + c \cdot \mathcal{L}[y](s) = \mathcal{L}[h](s)$$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{L}[y](s) = \frac{\mathcal{L}[h](s) + y(0)}{s + c}.$$

Um die Lösung der DGL zu erhalten, müssen wir „nur noch"

- $\mathcal{L}[h](s)$ für das gegebene $h(x)$ berechnen (zur Not numerisch),
- die Funktion finden, deren Laplace–Transformierte $(\mathcal{L}[h](s) + y(0))/(s + c)$ ist (Rücktransformation).

Ableiten im „Ortsraum" ist i.W. Multiplikation mit s. Dementsprechend sollte Integration im Ortsraum Division durch s sein:

Satz 4.19: (Laplace–Transformation von Stammfunktionen)
Sei $f \in L_{1loc}([0,\infty))$. Für $\Re(s) > 0$ gilt:

$$\mathcal{L}\Big[\int_0^x f(\xi)\,d\xi\Big](s) = \frac{\mathcal{L}[f](s)}{s}.$$

Beweis: Partielle Integration:

$$\int_0^\infty \underbrace{e^{-s\cdot x}}_{u'(x)} \cdot \underbrace{\int_0^x f(\xi)\,d\xi}_{v(x)}\;dx = \Big[\underbrace{\frac{e^{-s\cdot x}}{-s}}_{u(x)} \cdot \underbrace{\int_0^x f(\xi)\,d\xi}_{v(x)}\Big]_{x=0}^{x=\infty} - \int_0^\infty \underbrace{\frac{e^{-s\cdot x}}{-s}}_{u(x)} \cdot \underbrace{f(x)}_{v'(x)}\;dx$$

$$\overset{(\Re(s)>0)}{=} \;\frac{1}{s} \cdot \int_0^\infty e^{-s\cdot x} \cdot f(x)\,dx.$$

Q.E.D.

Differentiation/Integration im Ortsraum ist Multiplikation/Division im Laplace–Raum. Auch die Umkehrung gilt:

Satz 4.20: (Multiplikation mit x/Division durch x im Ortsraum)
a) Für $x \cdot f(x)$ in $L_{1loc}([0,\infty))$ gilt:

$$\mathcal{L}[x\cdot f](s) = -\frac{d}{ds}\,\mathcal{L}[f](s).$$

b) Für $f(x)/x$ in $L_{1loc}([0,\infty))$ gilt:

$$\mathcal{L}\Big[\frac{f(x)}{x}\Big](s) = \int_{\Re(s)}^\infty \mathcal{L}[f](t + i\cdot\Im(s))\,dt.$$

Speziell für reelles s: $\quad \mathcal{L}\Big[\frac{f(x)}{x}\Big](s) = \int_s^\infty \mathcal{L}[f](t)\,dt.$

Beweis: a) wurde schon in Satz 4.7 gezeigt.
b) Natürlich ist $\Re(s) \geq \alpha_f$ impliziert. Wir betrachten ein (komplexes) Kurvenintegral, dass bei $s = \Re(s) + i\cdot\Im(s)$ startet und längs der durch $z(t) = t + i\cdot\Im(s)$, $t \in [\Re(s), R)$ gegebenen Geraden Γ nach rechts zum Punkt $S = R + i\cdot\Im(s)$ läuft. Nach a) gilt $\frac{d}{ds}\mathcal{L}[f/x](s) = -\mathcal{L}[f](s)$, also

$$\int_{s\;\Gamma}^S \mathcal{L}[f](\xi)\,d\xi = \mathcal{L}[f/x](s) - \mathcal{L}[f/x](S)$$

für jedes s, S im Holomorphie–Gebiet von $\mathcal{L}[f]$ und jede Kurve Γ von s nach S, also

$$\mathcal{L}[f/x](s) = \mathcal{L}[f/x](S) + \int_{s\,\Gamma}^{S} \mathcal{L}[f](\xi)\,d\xi.$$

Für $R \to \infty$ verschwindet $\mathcal{L}[f](S)$ nach Satz 4.9, also

$$\mathcal{L}[f/x](s) = \lim_{R\to\infty} \int_{s\,\Gamma}^{S} \mathcal{L}[f](\xi)\,d\xi = \int_{\Re(s)}^{\infty} \mathcal{L}[f](t + i\cdot\Im(s))\,dt.$$

Q.E.D.

Einige weitere nützliche Rechenregeln:

Rechenregeln für die Laplace–Transformation 4.21:

a) *Linearität:*

$$\mathcal{L}[\alpha\cdot f + \beta\cdot g](s) = \alpha\cdot\mathcal{L}[f](s) + \beta\cdot\mathcal{L}[g](s), \quad \alpha,\beta\in\mathbb{C}.$$

b) *Skalierung:*

$$\mathcal{L}[f(\lambda\cdot x)](s) = \frac{1}{\lambda}\cdot\mathcal{L}[f(x)]\Big(\frac{s}{\lambda}\Big), \quad 0<\lambda\in\mathbb{R}.$$

c) *Multiplikation mit exp-Funktionen:*

$$\mathcal{L}[e^{\alpha\cdot x}\cdot f](s) = \mathcal{L}[f](s-\alpha), \quad \alpha\in\mathbb{C}.$$

d) *Verschiebung im Ortsraum:*

$$\mathcal{L}[f_{cut}(x-\alpha)](s) = e^{-\alpha\cdot s}\cdot\mathcal{L}[f](s), \quad 0\le\alpha\in\mathbb{R},$$

wobei

$$f_{cut}(x-\alpha) = \begin{cases} 0 & \text{für } x<\alpha, \\ f(x-\alpha) & \text{für } \alpha\le x. \end{cases}$$

e) *Ableitung im Ortsraum:*

$$\mathcal{L}[f^{(n)}](s) = s^n\cdot\mathcal{L}[f](s) - s^{n-1}\cdot f(0) - s^{n-2}\cdot f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0).$$

f) *Stammfunktion:*

$$\mathcal{L}\Big[\int_0^x f(\xi)\,d\xi\Big](s) = \frac{1}{s}\cdot\mathcal{L}[f](s).$$

g) *Multiplikation mit Polynomen:*

$$\mathcal{L}[x^n\cdot f](s) = (-1)^n\cdot\frac{d^n}{ds^n}\,\mathcal{L}[f](s).$$

h) Division durch x:

$$\mathcal{L}[f/x](s) = \int_s^\infty \mathcal{L}[f](t)\,dt.$$

i) Faltung:

$$\mathcal{L}[f \otimes g](s) = \mathcal{L}[f](s) \cdot \mathcal{L}[g](s)$$

mit

$$(f \otimes g)(x) = \int_0^x f(x-\xi) \cdot g(\xi)\,d\xi.$$

Alle diese Rechenregeln sind entweder durch die früheren Sätze schon bewiesen oder lassen sich als einfache Übungsaufgaben nachrechnen. Z.B. der Faltungssatz i):

$$\int_0^\infty e^{-s\cdot x} \cdot (f \otimes g)(x)\,dx = \int_0^\infty \int_0^x e^{-s\cdot(x-\xi)} \cdot e^{-s\cdot\xi} \cdot f(x-\xi) \cdot g(\xi)\;d\xi\;dx$$

$$\stackrel{(y=x-\xi)}{=} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-s\cdot y} \cdot f(y) \cdot e^{-s\cdot\xi} \cdot g(\xi)\;d\xi\;dy$$

$$= \Big(\int_0^\infty e^{-s\cdot y} \cdot f(y)\;dy\Big) \cdot \Big(\int_0^\infty e^{-s\cdot\xi} \cdot g(\xi)\;d\xi\Big).$$

Bemerkung 4.22: *Mit diesen Regeln lassen sich zusammen mit den „Grundtransformationen“ 4.13 viele komplexere Laplace–Transformationen einfach ohne Integration bestimmen, z.B.:*

$$\mathcal{L}[x \cdot e^{\alpha\cdot x}](s) \stackrel{(4.21.g)}{=} -\frac{d}{ds}\,\mathcal{L}[e^{\alpha\cdot x}](s) \stackrel{(4.13.b)}{=} -\frac{d}{ds}\,\frac{1}{s-\alpha} = \frac{1}{(s-\alpha)^2}.$$

Bemerkung 4.23: *Eine einfache Anwendung der Rechenregeln: eine Laplace–Transformierte, die nicht identisch 0 ist, kann nicht periodisch sein. Gäbe es eine (eventuell komplexe) Periode $\Delta s \in \mathbb{C}$ mit $\mathcal{L}[f](s) = \mathcal{L}[f](s+\Delta s)$, so würde gelten:*

$$0 = \mathcal{L}[f(x)](s) - \mathcal{L}[f(x)](s+\Delta s) \stackrel{(*)}{=} \mathcal{L}\Big[(1-e^{-\Delta\cdot x}) \cdot f(x)\Big](s)$$

$$\stackrel{(4.10)}{\Longrightarrow} f(x) \equiv 0 \text{ (fast überall).}$$

Hierbei haben wir in $(*)$ die Rechenregel 4.21.c) benutzt.

Hiermit sieht man z.B., dass die Funktion $F(s) = e^{-\alpha\cdot s}$ mit $0 \neq \alpha \in \mathbb{C}$ keine Laplace–Transformierte einer $L_{1loc}([0,\infty))$–Funktion sein kann, denn sie hat *die Periode $2 \cdot \pi \cdot i/\alpha$.*

Anmerkung: diese Funktion ist allerdings die (formale) Laplace–Transformierte des Dirac–Impulses $\delta(x-\alpha)$:

$$\mathcal{L}[\delta(x-\alpha)](s) = \int_0^\infty e^{-s \cdot x} \cdot \delta(x-\alpha)\, dx = e^{-s\cdot\alpha}, \quad 0 \le \alpha \in \mathbb{R}.$$

4.3 Rücktransformation

12.2.03↓

Nach Satz 4.10 bzw. 4.11 bestimmt eine Laplace–Transformierte $F(s) = \mathcal{L}[f(x)](s)$ die Ausgangsfunktion

$$f(x) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)](x)$$

(fast überall) eindeutig für $x \ge 0$. Es verbleibt die Frage, wie man $f(x)$ aus $F(s)$ effektiv und (halbwegs) systematisch rekonstruieren kann. Man hat i.W. folgende Möglichkeiten:

- (Die klassische Methode) Schlage in dicken Tabellenwerken nach.
- (Etwas moderner) Benutze ein „automatisiertes Tabellenwerk", sprich: ein Computeralgebrasystem.
- (Halb–systematisch) Benutze Rechenregeln, um komplizierte Laplace–Transformierte auf einfachere zurückzuführen, dann verfahre wie oben.
- (Systematisch) Konstruiere die Ausgangsfunktion durch ein komplexes Kurvenintegral.
- (Numerisch) Konstruiere die Ausgangsfunktion durch eine numerische Approximation (dies ist prinzipiell jedoch eine recht instabile Sache).

4.3.1 Vereinfachungen über Rechenregeln

Die Rechenregeln 4.21 können von „rechts nach links" gelesen werden und liefern so Rechenregeln für die inverse Laplace–Transformation $\mathcal{L}^{-1}$:

Rechenregeln für die inverse Laplace–Transformation 4.24:

a) Linearität (für $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$):

$$\mathcal{L}^{-1}[\alpha \cdot F(s) + \beta \cdot G(s)](x) = \alpha \cdot \mathcal{L}^{-1}[F(s)](x) + \beta \cdot \mathcal{L}^{-1}[G(s)](x).$$

b) *Skalierung:*

$$\mathcal{L}^{-1}[F(\lambda \cdot s)](x) = \frac{1}{\lambda} \cdot \mathcal{L}^{-1}[F(s)]\Big(\frac{x}{\lambda}\Big), \quad 0 < \lambda \in \mathbb{R}.$$

c) *Verschiebung im Laplace–Raum = Multiplikation mit exp–Funktionen im Ortsraum:*

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s-\alpha)](x) = e^{\alpha \cdot x} \cdot \mathcal{L}^{-1}[F(s)](x), \quad \alpha \in \mathbb{C}.$$

d) *Multiplikation mit exp-Funktionen im Laplace–Raum = Verschiebung im Ortsraum:*

$$\mathcal{L}^{-1}[e^{-\alpha \cdot s} \cdot F(s)](x) = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \leq x < \alpha, \\ \mathcal{L}^{-1}[F(s)](x-\alpha) & \text{für } x \geq \alpha. \end{cases}$$

e) *Multiplikation mit Polynomen = Ableitung im Ortsraum:*

$$\mathcal{L}^{-1}[s^n \cdot F(s)](x) = \frac{d^n}{dx^n}\mathcal{L}^{-1}[F(s)](x),$$

falls

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)](0) = (\mathcal{L}^{-1}[F(s)])'(0) = \cdots = (\mathcal{L}^{-1}[F(s)])^{(n-1)}(0) = 0$$

(ohne diese Zusatzbedingung kann $s^n \cdot F(s)$ nicht Laplace–Transformierte einer $L_{1loc}([0,\infty))$–Funktion sein).

f) *Division durch s = Integration im Ortsraum:*

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)/s](x) = \int_0^x \mathcal{L}^{-1}[F(s)](\xi)\, d\xi.$$

g) *Ableitung im Laplace-Raum = Multiplikation mit Polynomen im Ortsraum:*

$$\frac{d^n}{ds^n}\, \mathcal{L}^{-1}[F(s)](x) = (-x)^n \cdot \mathcal{L}^{-1}[F(s)](x).$$

h) *Integration im Laplace–Raum = Division durch x im Ortsraum:*

$$\mathcal{L}^{-1}\Big[\int_s^\infty F(\xi)\, d\xi\Big](x) = \frac{1}{x} \cdot \mathcal{L}^{-1}[F(s)](x).$$

i) *Multiplikation im Laplace–Raum = Faltung im Ortsraum*

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}[F(s) \cdot G(s)](x) &= \mathcal{L}^{-1}[F(s)](x) \otimes \mathcal{L}^{-1}[G(s)](x) \\ &= \int_0^x \mathcal{L}^{-1}[F(s)](x-\xi) \cdot \mathcal{L}^{-1}[G(s)](\xi)\, d\xi.\end{aligned}$$

Aus der Liste 4.13 einfacher Laplace–Transformationen erhält man eine entsprechende Liste einfacher Rücktransformationen:

Einfache Laplace–Rücktransformationen 4.25:

$$
\begin{array}{lll}
a_0) & \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right](x) = 1, & \\
a) & \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^n}\right](x) = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}, & n > 0, \\
b) & \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-\alpha}\right](x) = e^{\alpha\cdot x}, & \alpha \in \mathbb{C}, \\
c) & \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+\alpha^2}\right](x) = \frac{\sin(\alpha\cdot x)}{\alpha}, & \alpha \in \mathbb{C}, \\
d) & \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+\alpha^2}\right](x) = \cos(\alpha\cdot x), & \\
e) & \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\alpha}{s^2-\alpha^2}\right](x) = \frac{\sinh(\alpha\cdot x)}{\alpha}, & \alpha \in \mathbb{C}, \\
f) & \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2-\alpha^2}\right](x) = \cosh(\alpha\cdot x), & \alpha \in \mathbb{C}, \\
g) & \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-\alpha\cdot s}}{s}\right](x) = H(x-\alpha), & 0 \le \alpha \in \mathbb{R}
\end{array}
$$

mit der Heavisideschen Sprungfunktion $H(x-\alpha) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < \alpha, \\ 1 & \text{für } x \ge \alpha. \end{cases}$

Mit den Rechenregeln 4.24 erhält man sofort weitere Rücktransformationen, z.B.:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-\alpha)^n}\right](x) = \frac{x^{n-1}\cdot e^{\alpha\cdot x}}{(n-1)!},$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-\beta\cdot s}}{s^2+\alpha^2}\right](x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < \beta \\ \frac{1}{\alpha}\cdot\sin(\alpha\cdot(x-\beta)) & \text{für } \beta \le x, \end{cases}$$

mit $\alpha \in \mathbb{C}$ *und* $0 \le \beta \in \mathbb{R}$.

Usw.

Beispiel 4.26: In Beispiel 4.18 hatten wir festgestellt, dass die Lösung des inhomogenen Anfangswertproblems

$$y'(x) + c\cdot y(x) = h(x), \quad y(0) = y_0$$

per Laplace–Transformation durch

$$\mathcal{L}[y](s) = \frac{y_0 + \mathcal{L}[h](s)}{s + c}$$

gegeben ist. Mit

$$\mathcal{L}^{-1}\Big[\frac{1}{s+c}\Big](x) = e^{-c\cdot x}$$

für $x \geq 0$ erhält man über die Rechenregeln

$$y(x) = y_0 \cdot e^{-c\cdot x} + \mathcal{L}^{-1}\Big[\mathcal{L}[e^{-c\cdot x}](s) \cdot \mathcal{L}[h(x)](s)\Big](x).$$

Das Produkt der Laplace–Transformierten entspricht einer Faltung im Ortsraum. Man erhält so eine Integraldarstellung der Gesamtlösung, wie sie sich z.B. auch durch Variation der Konstanten ergeben würde:

$$y(x) = y_0 \cdot e^{-c\cdot x} + \int_0^x e^{c\cdot(\xi - x)} \cdot h(\xi)\, d\xi.$$

4.3.2 Systematische Rücktransformation

Die bisherige Technik über „Rechenregeln“ funktioniert nur für sehr einfache Fälle. Wie kann man das Urbild einer Laplace–Transformierten systematisch finden? Ein Hinweis, dass (und wie) dies möglich ist, liefert der Zusammenhang 4.3 mit der Fourier–Transformation:

$$\mathcal{L}[f](s) = \sqrt{2\cdot\pi} \cdot \mathcal{F}[f_{cut}](-i\cdot s), \quad f_{cut}(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0, \\ f(x) & \text{für } x \geq 0. \end{cases}$$

Sei $\alpha_f < \infty$ die Konvergenzabszisse von f, wähle ein beliebiges $\xi_0 > \alpha_f$. Setzen wir $s = \xi_0 + i\cdot k$, so gilt

$$\mathcal{F}[f_{cut}](-i\cdot\xi_0 + k) = \frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}} \cdot \mathcal{L}[f](\xi_0 + i\cdot k),$$

wobei

$$\mathcal{F}[f_{cut}](-i\cdot\xi_0 + k) = \frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f_{cut}(x) \cdot e^{-i\cdot(-i\cdot\xi_0 + k)\cdot x}\, dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \Big(f_{cut}(x) \cdot e^{-\xi_0\cdot x}\Big) \cdot e^{-i\cdot k\cdot x}\, dx = \mathcal{F}\Big[e^{-\xi_0\cdot x} \cdot f_{cut}(x)\Big](k)$$

gilt. Mit $\xi_0 > \alpha_f$ gilt $\int_0^\infty |e^{-\xi_0 \cdot x} \cdot f(x)|\,dx < \infty$, also $e^{-\xi_0 \cdot x} \cdot f_{cut}(x) \in L_1(\mathbb{R})$, und wir können $e^{-\xi_0 \cdot x} \cdot f_{cut}(x)$ durch Fourier–Rücktransformation ermitteln:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\Big[e^{-\xi_0 \cdot x} \cdot f_{cut}(x)\Big](k) &= \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \mathcal{L}[f](\xi_0 + i \cdot k) \\
\Rightarrow \quad e^{-\xi_0 \cdot x} \cdot f_{cut}(x) &= \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \mathcal{F}^{-1}\Big[\mathcal{L}[f](\xi_0 + i \cdot k)\Big](x) \\
&= \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{L}[f](\xi_0 + i \cdot k) \cdot e^{i \cdot k \cdot x}\,dk.
\end{aligned}$$

Nach Multiplikation mit $e^{\xi_0 \cdot x}$ erhalten wir damit folgende Umkehrformel:

$$\boxed{f_{cut}(x) = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{L}[f](\xi_0 + i \cdot k) \cdot e^{(\xi_0 + i \cdot k) \cdot x}\,dk.}$$

Satz 4.27: (Laplace–Rücktransformation durch komplexe Integration)
Sei $F(s) : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analytisch auf einer Halbebene $\{s \in \mathbb{C};\ \Re(s) > \alpha\}$. Sei $\lim_{\Re(s) \to \infty} F(s) = 0$ auf allen Winkelbereichen der Form $s = r \cdot e^{i\phi}$ mit $\phi \in [-\phi_0, \phi_0] \subset (-\pi/2, \pi/2)$. Es gelte $\int_{-\infty}^{\infty} |F(\xi_0 + i \cdot k)|\,dk < \infty$ für alle $\xi_0 > \alpha$. Dann ist $F(s)$ für $\Re(s) > \alpha$ die Laplace–Transformierte der Funktion

$$f(x) = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{(\xi_0 + i \cdot k) \cdot x} \cdot F(\xi_0 + i \cdot k)\,dk,$$

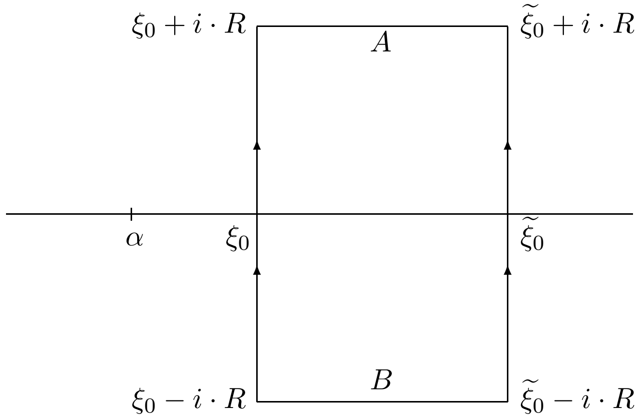
wobei $\xi_0 > \alpha$ beliebig wählbar ist.

a) Dieses Integral ist unabhängig von ξ_0.

b) Der Integralwert ist 0 für jedes $x \leq 0$, also $f(x) = 0\ \forall\ x \leq 0$.

c) Die Funktion $f(x)$ ist stetig und exponentiell beschränkt: es gilt $f(x) = o(e^{\xi_0 \cdot x})$ im Limes $x \to \infty$ für jedes $\xi_0 > \alpha$.

Beweisskizze (nur die groben Ideen): Das $f(x)$ definierende Integral ist ein komplexes Kurvenintegral über die auf der Halbebene $\Re(s) > \alpha$ analytische Funktion $e^{s \cdot x} \cdot F(s)$ längs der Geraden $s(k) = \xi_0 + i \cdot k$, $k \in (-\infty, \infty)$.
a) Zeige, dass das Integral unabhängig von ξ_0 ist, solange $\xi_0 > \alpha$ gilt:
Betrachte dazu den Streifen $\alpha < \xi_0 \leq \Re(s) \leq \widetilde{\xi_0}$ mit Imaginärteilen zwischen $-R$ und R:



Im Grenzwert $R \to \infty$ verschwinden die Integrale über $e^{s \cdot x} \cdot F(s)$ längs der Geradenstücke A und B, z.B. für A:

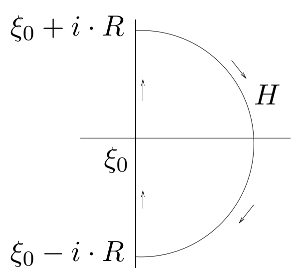
$$\Big| \int_{\xi_0 + i \cdot R \, A}^{\widetilde{\xi}_0 + i \cdot R} e^{s \cdot x} \cdot F(s) \; ds \Big| = \Big| \int_{\xi_0}^{\widetilde{\xi}_0} e^{(t + i \cdot R) \cdot x} \cdot F(t + i \cdot R) \; dt \Big|$$

$$\leq e^{\widetilde{\xi}_0 \cdot x} \cdot \int_{\xi_0}^{\widetilde{\xi}_0} |F(t + i \cdot R)| \; dt \leq e^{\widetilde{\xi}_0 \cdot x} \cdot (\widetilde{\xi}_0 - \xi_0) \cdot \max_{\widetilde{\xi}_0 \leq t \leq \xi_0} |F(t + i \cdot R)|.$$

Diese Schranke verschwindet für $R \to \infty$, denn es soll $\int_{-\infty}^{\infty} |F(t + i \cdot k)| \; dk < \infty$ für jedes t gelten. Das Deformationsprinzip für komplexe Kurvenintegrale liefert damit die Unabhängigkeit von ξ_0.

b) Zeige: das Integral ist 0 für $x \leq 0$:

Betrachte dazu die geschlossene Kontur, die aus der Geraden $\Re(s) = \xi_0$, $\Im(s) \in [-R, R]$ und einem Halbkreis H besteht:



Da diese Kontur vollständig im Analytizitätsgebiet von $e^{s \cdot x} \cdot F(s)$ liegt, verschwindet das Gesamtintegral über den Cauchyschen Integralsatz:

$$\int_{-R}^{R} e^{(\xi_0 + i \cdot k) \cdot x} \cdot F(\xi_0 + i \cdot k) \; dk \; + \; \int_{\xi_0 + i \cdot R \, H}^{\xi_0 - i \cdot R} e^{s \cdot x} \cdot F(s) \; ds = 0.$$

Benutzt man, dass $F(R \cdot e^{i\cdot\phi})$ auf Winkelbereichen $\phi \in (-\pi/2, \pi/2)$ für $R \to \infty$ verschwindet, so kann man zeigen, dass im Grenzwert $R \to \infty$ das Integral über H für $x \leq 0$ verschwindet. Es folgt $\int_{-\infty}^{\infty} e^{(\xi_0 + i\cdot k)\cdot x} \cdot F(\xi_0 + i \cdot k)\, dk = 0$ für $x \leq 0$.
c) Zeige, dass $F(s)$ die Laplace–Transformierte von $f(x)$ ist:
Die Funktion $\sqrt{2\cdot\pi} \cdot e^{-\xi_0\cdot x} \cdot f(x)$ ist definiert als Fourier–Rücktransformierte von $F(\xi_0 + i\cdot k) \in L_1(\mathbb{R})$ und somit stetig und beschränkt ($\Rightarrow\ f(x) = o(e^{\xi_0\cdot x})$). Da $\xi_0 > \alpha$ beliebig ist, gilt auch $f(x) = o(e^{\xi_1\cdot x})$ für jedes ξ_1 mit $\alpha < \xi_1 < \xi_0$. Damit fällt $e^{-\xi_0\cdot x} \cdot |f(x)| = e^{-(\xi_0-\xi_1)\cdot x} \cdot e^{-\xi_1\cdot x} \cdot |f(x)| \leq \text{const} \cdot e^{-(\xi_0-\xi_1)\cdot x}$ für $x \to \infty$ exponentiell ab. Zusammen mit $f(x) = 0$ für $x \leq 0$ folgt $e^{-\xi_0\cdot x} \cdot f(x) \in L_1(\mathbb{R})$. Da $\sqrt{2\cdot\pi} \cdot e^{-\xi_0\cdot x} \cdot f(x)$ die Fourier–Rücktransformierte von $F(\xi_0 + i\cdot k)$ ist und sowohl $e^{-\xi_0\cdot x} \cdot f(x)$ als auch $F(\xi_0 + i\cdot k)$ in $L_1(\mathbb{R})$ liegen, ist F als Fourier–Transformierte darstellbar, d.h.

$$F(\xi_0 + i\cdot k) = \frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{2\cdot\pi} \cdot e^{-\xi_0\cdot x} \cdot f(x) \cdot e^{-i\cdot k\cdot x}\, dx$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-(\xi_0 + i\cdot k)\cdot x} \cdot f(x)\, dx = \mathcal{L}[f(x)](\xi_0 + i\cdot k).$$

Q.E.D.

Bemerkung 4.28: *Der letzte Satz ist offensichtlich nicht auf alle Laplace–Transformierten $F(s)$ anwendbar, sondern höchstens auf diejenigen, die durch Fourier–Transformation darstellbar sind. Speziell ist die Fourier–Rücktransformierte $f(x)$ stetig. Bei Laplace–Transformierten, die unstetigen Urbildfunktionen $f(x)$ mit Sprungstellen entsprechen, würde typischerweise die Integrabilitätsforderung $\int_{-\infty}^{\infty} |F(\xi_0 + i\cdot k)|\, dk < \infty$ verletzt sein.*

Beispiel 4.29: Betrachte $F(s) = e^{-\sqrt{s}}$. Diese Funktion ist analytisch für $\Re(s) > 0$ (in der Tat ist sie analytisch für alle s, die nicht auf der negativen reellen Halbachse liegen). In Polarkoordinaten gilt (mit $\phi \in (-\pi/2, \pi/2]$ für $\Re(s) \geq 0$):

$$s = r \cdot e^{i\cdot\phi} \quad \to \quad F(s) = e^{-\sqrt{r}\cdot e^{i\cdot\phi/2}} = e^{-\sqrt{r}\cdot(\cos(\phi/2) + i\cdot\sin(\phi/2))},$$

also

$$|F(s)| = e^{-\sqrt{r}\cdot\cos(\phi/2)}.$$

Für jedes ϕ mit $|\phi| \leq \pi/2$ gilt also $F(s) \to 0$ für $r \to \infty$. Weiterhin gilt für jedes $\xi_0 > 0$ mit $\xi_0 + i\cdot k = r\cdot e^{i\cdot\phi}$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(\xi_0 + i\cdot k)|\, dk = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\sqrt{r}\cdot\cos(\phi/2)}\, dk \leq \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\sqrt{r}\cdot\cos(\pi/4)}\, dk$$

$$\leq \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\sqrt{|k|}\cdot\cos(\pi/4)}\, dk < \infty$$

(beachte $r = |\xi_0 + i \cdot k| \geq |k|$ für $\xi_0 > 0$). Damit sind alle Voraussetzungen von Satz 4.27 erfüllt und man erhält die folgende Integraldarstellung für die Rücktransformierte

$$f(x) = \mathcal{L}^{-1}[e^{-\sqrt{s}}] = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{(\xi_0 + i \cdot k) \cdot x} \cdot e^{-\sqrt{\xi_0 + i \cdot k}} \, dk$$

mit beliebigem $\xi_0 > 0$. Es verbleibt, dieses Integral zu berechnen. Es gilt

$$\frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{(\xi_0 + i \cdot k) \cdot x} \cdot e^{-\sqrt{\xi_0 + i \cdot k}} \, dk = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{x^{3/2}} \cdot e^{-\frac{1}{4 \cdot x}}.$$

Woher bekommt man diesen Integralwert? Durch komplexe Integration (Residuensatz)!

Bemerkung 4.30: *Eine wesentliche Beobachtung ist, dass eine Laplace–Transformierte zwar prinzipiell auf einer rechten Halbebene analytisch ist, aber meist auf einen wesentlich größeren Bereich der komplexen Ebene „analytisch fortgesetzt“ werden kann. Beispiel:*

$$\mathcal{L}[e^{\alpha \cdot x}](x) = \int_0^{\infty} e^{-s \cdot x} \cdot e^{\alpha \cdot x} \, dx = \frac{1}{s - \alpha}.$$

Zwar konvergiert das Integral nur für $\Re(s) > \alpha$, die Laplace–Transformierte ist aber für alle $s \in \mathbb{C}$ außer der Polstelle $s = \alpha$ definiert und analytisch!

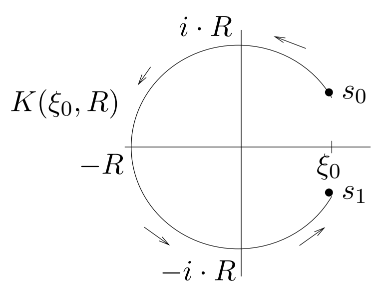
Ist eine Laplace–Transformierte meromorph mit endlich vielen isolierten Singularitäten, so bietet sich der Residuensatz an, um das Umkehrintegral zu berechnen:

Satz 4.31: (Das Umkehrintegral über Residuen)

Sei $F(s)$ meromorph und für $\Re(s) > \alpha$ eine Laplace–Transformierte. Für jedes $\xi_0 > \alpha$ gilt

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)](x) = \sum_j Res_{e^{s \cdot x} \cdot F(s)}(s_j) - \lim_{R \to \infty} \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot i} \cdot \int_{s_0}^{s_1}{}_{K(\xi_0, R)} \; e^{s \cdot x} \cdot F(s) \, ds,$$

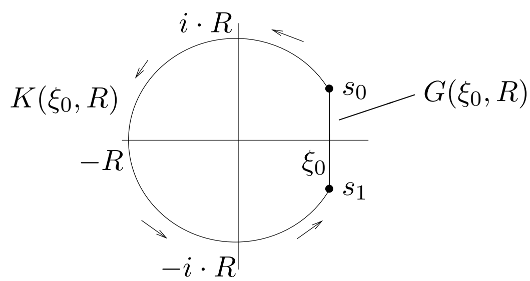
wobei die Residuensumme sich über alle Residuen s_j von $e^{s \cdot x} \cdot F(s)$ erstreckt und $K(\xi_0, R)$ ein Kreissegment um den Nullpunkt mit Radius R ist:



Beweis: Zusammen mit dem Geradenstück

$$G(\xi_0, R) = \Big\{ s \in \mathbb{C};\ \Re(s) = \xi_0,\ |\Im(s)| \le \sqrt{R^2 - \xi_0^2}\ \Big\}$$

ergibt sich eine geschlossene Kontur (die sogenannte „Bromwich–Kontur“), die für $R \to \infty$ sämtliche Residuen enthält (für $\Re(s) \ge \xi_0 > \alpha$ ist $F(s)$ analytisch):



Im Grenzwert $R \to \infty$ ist das Integral längs $G(\xi_0, R)$ das die Rücktransformierte definierende Integral aus Satz 4.27.

Q.E.D.

Klingt die Laplace–Transformierte insgesamt für $|z| \to \infty$ in alle Richtungen ab, so verschwindet der Beitrag des Kreissegments $K(\xi_0, R)$, und es ergibt sich
14.2.03↓ eine reine Residuenformel:

Satz 4.32: (Das Umkehrintegral über Residuen)

Sei $F(s)$ meromorph und für $\Re(s) > \alpha$ eine Laplace–Transformierte. Gilt für ein $k > 0$

$$|F(z)| = O\Big(\frac{1}{|z|^k}\Big)$$

für $|z| \to \infty$, so gilt für jedes $\xi_0 > \alpha$

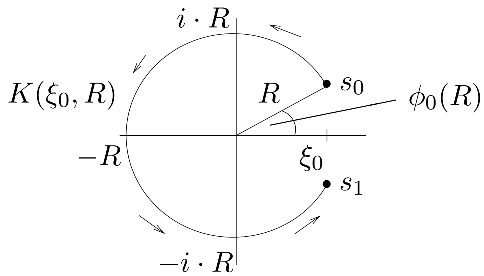
$$\lim_{R \to \infty} \int_{s_0}^{s_1}{}_{K(\xi_0,R)}\ e^{s \cdot x} \cdot F(s)\, ds = 0 \quad \textit{für alle } x > 0$$

und damit

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)](x) = \textstyle\sum_j \mathrm{Res}_{e^{s \cdot x} \cdot F(s)}(s_j),$$

wobei sich diese Summe über alle Residuen s_j der Funktion $e^{s \cdot x} \cdot F(s)$ erstreckt.

Beweis: (technisch) Für den halben Öffnungswinkel $\phi_0(R) = \arccos(\xi_0/R)$ des Kreissegments $K(\xi_0, R)$ gilt $\phi_0(R) \in (0, \pi]$ und $\lim_{R\to\infty} \phi_0(R) = \pi/2$.



Mit der Parametrisierung $s(\phi) = R \cdot e^{i\cdot\phi}$, $\phi \in [\phi_0, 2\cdot\pi - \phi_0]$ von $K(\xi_0, R)$ und der Abschätzung $F(R\cdot e^{i\cdot\phi}) \le c/R^k$ (mit einer geeigneten Konstanten c) gilt:

$$\Big| \int_{K(\xi_0,R)} e^{s\cdot x} \cdot F(s)\, ds \Big|$$

$$= \left| \int_{\phi_0(R)}^{2\cdot\pi-\phi_0(R)} e^{(R\cdot\cos(\phi)+i\cdot R\cdot\sin(\phi))\cdot x} \cdot F(R\cdot e^{i\cdot\phi}) \cdot i \cdot R \cdot e^{i\cdot\phi}\, d\phi \right|$$

$$\le \int_{\phi_0(R)}^{2\cdot\pi-\phi_0(R)} e^{R\cdot\cos(\phi)\cdot x} \cdot \frac{c}{R^k} \cdot R\, d\phi = \frac{2\cdot c}{R^{k-1}} \cdot \int_{\phi_0(R)}^{\pi} e^{R\cdot\cos(\phi)\cdot x}\, d\phi$$

$$= \underbrace{\frac{2\cdot c}{R^{k-1}} \cdot \int_{\phi_0(R)}^{3\cdot\pi/4} e^{R\cdot\cos(\phi)\cdot x}\, d\phi}_{(1)} + \underbrace{\frac{2\cdot c}{R^{k-1}} \cdot \int_{3\cdot\pi/4}^{\pi} e^{R\cdot\cos(\phi)\cdot x}\, d\phi}_{(2)}.$$

Für das zweite Integral gilt mit $\cos(\phi) \le \cos(\frac{3\cdot\pi}{4}) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ die Abschätzung

$$\frac{2\cdot c}{R^{k-1}} \cdot \int_{3\cdot\pi/4}^{\pi} e^{R\cdot\cos(\phi)\cdot x}\, d\phi \le \frac{2\cdot c\cdot e^{-R\cdot x/\sqrt{2}}}{R^{k-1}} \cdot \int_{3\cdot\pi/4}^{\pi} d\phi \quad \stackrel{(R\to\infty)}{\longrightarrow} 0.$$

Mit der Transformation $\xi = R\cdot\cos(\phi)$ gilt für das erste Integral die Abschätzung

$$\frac{2\cdot c}{R^{k-1}} \cdot \int_{\phi_0(R)}^{3\cdot\pi/4} e^{R\cdot\cos(\phi)\cdot x}\, d\phi = \frac{2\cdot c}{R^k} \cdot \int_{-R/\sqrt{2}}^{\xi_0} \frac{e^{\xi\cdot x}\, d\xi}{\sin(\phi(\xi))}$$

$$\stackrel{(*)}{\le} \frac{2\cdot\sqrt{2}\cdot c}{R^k} \cdot \int_{-R/\sqrt{2}}^{\xi_0} e^{\xi\cdot x}\, d\xi \le \frac{2\cdot\sqrt{2}\cdot c}{R^k} \cdot \int_{-\infty}^{\xi_0} e^{\xi\cdot x}\, d\xi \quad \stackrel{(R\to\infty)}{\longrightarrow} 0$$

(beachte in $(*)$: $\phi \in [\phi_0(R), \frac{3\cdot\pi}{4}] \Rightarrow \sin(\phi) > \sin(\frac{3\cdot\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, wenn R nur groß genug ist, also $\phi_0(R) \approx \frac{\pi}{2}$ gilt).

Q.E.D.

Beispiel 4.33: Betrachte eine rationale Funktion

$$F(s) = \frac{Z(s)}{N(s)}$$

mit Polynomen $Z(s)$, $N(s)$ vom Grad $\mathrm{grad}(Z(s)) < \mathrm{grad}(N(s))$. Es folgt

$$\boxed{\mathcal{L}^{-1}[F(s)](x) = \textstyle\sum_j \mathrm{Res}_{f(s)}(s_j), \quad f(s) = e^{s\cdot x} \cdot \dfrac{Z(s)}{N(s)},}$$

wobei sich die Summe über alle Nullstellen des Nenners $N(s)$ erstreckt.

Beispiel:

$$F(s) = \frac{1}{s-\alpha} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}^{-1}[F(s)](x) = \mathrm{Res}_{e^{s\cdot x}/(s-\alpha)}(\alpha) = e^{\alpha\cdot x}.$$

4.3.3 Numerische Rücktransformation: Entwicklung nach Legendre–Polynomen

Siehe z.B.

> R.E. Bellmann and R.S. Roth, *The Laplace Transform*, World Scientific 1984.

Im Zweifelsfalle wird man eine numerische Rücktransformation durchführen müssen. Als Vorbemerkung stellen wir jedoch fest, dass die Rücktransformation prinzipiell instabil sein kann: bei der Laplace–Transformation brauchen die Urbilder $f(x)$ für $x \to \infty$ nicht abzufallen, daher hat man i.A. keine der üblichen Integralnormen zur Verfügung, bezüglich der man eine stetige Abhängigkeit der Rücktransformierten $f(x)$ von der Laplace–Funktion $F(s)$ garantieren kann.

Beispiel 4.34: Wir betrachten die Laplace–Paare

$$F(s) = \mathcal{L}[f(x)](s) = \frac{1}{s^2+a^2}, \quad f(x) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)](x) = \frac{\sin(\alpha\cdot x)}{\alpha},$$

$$\tilde{F}(s) = \mathcal{L}[\tilde{f}(x)](s) = \frac{1}{s^2+\tilde{a}^2}, \quad \tilde{f}(x) = \mathcal{L}^{-1}[\tilde{F}(s)](x) = \frac{\sin(\tilde{\alpha}\cdot x)}{\tilde{\alpha}}.$$

Man stelle sich vor, dass $\tilde{a}$ eine z.B. durch numerische Rundungsfehler verfälschte Approximation von a ist. Mit $\tilde{a} \approx a$ liegen die Fourier–Transformierten $F(s)$ und $\tilde{F}(s)$ für alle s „dicht beieinander", während die Urbilder $f(x)$ und $\tilde{f}(x)$ für große x „weit auseinander" liegen (z.B. ist für $x \approx \pi/(\tilde{a}-a)$ die Sinus–Schwingung $\tilde{f}(x)$ um π gegen die Sinus–Schwingung $f(x)$ phasenverschoben.

$$\boxed{\text{Die numerische Rücktransformation ist schwierig!}}$$

Hier ein möglicher Lösungsweg, der sowohl als symbolische Reihenentwicklung nach Legendre–Polynomen eine Darstellung der Rücktransformierten erlaubt als auch numerisch einfach auszuwerten ist:

Wir starten mit der Beobachtung, dass nach Satz 4.11 die Ausgangsfunktion $f(x)$ eindeutig aus den Werten der Laplace–Transformierten $F(s)$ auf äquidistanten Punkten parallel zur reellen Achse bestimmt ist und daraus rekonstruierbar sein sollte. Wir wählen ein reelles s_0 im Konvergenzbereich von $F(s)$ (das also größer als die Realteile aller Singularitäten von $F(s)$ ist) und betrachten die reellen Stützstellen

$$\{s_0 + n \cdot \Delta s; n \in \mathbb{N}\} = \{s_0 + 1, s_0 + 2, s_0 + 3, \ldots\}$$

mit dem Abstand $\Delta s = 1$. Setze

$$\xi = e^{-x}, \quad x = -\ln(\xi)$$

und

$$g(\xi) = \xi^{s_0} \cdot f(-\ln(\xi)), \quad f(x) = e^{s_0 \cdot x} \cdot g(e^{-x}).$$

Mit der Substitution $\xi = e^{-x}$ folgt

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-s \cdot x} \cdot f(x)\, dx = \int_0^\infty e^{-(s-s_0)\cdot x} \cdot e^{-s_0 \cdot x} \cdot f(x)\, dx$$

$$= \int_0^1 \xi^{s-s_0-1} \cdot \underbrace{\xi^{s_0} \cdot f(-\ln(\xi))}_{g(\xi)}\, d\xi = \int_0^1 \xi^{s-s_0-1} \cdot g(\xi)\, d\xi.$$

Auswertung an den Stützstellen liefert die Gleichungen

$$\boxed{\int_0^1 \xi^{k-1} \cdot g(\xi)\, d\xi = \langle \xi^{k-1}, g\rangle \;=\; F(s_0 + k), \quad k = 1, 2, 3, \ldots} \qquad (\#)$$

zur Bestimmung von $g(\xi)$. Diese Integralgleichung für $g(\xi)$ wird durch eine Reihenentwicklung

$$g(\xi) = c_0 \cdot Q_0(\xi) + c_1 \cdot Q_1(\xi) + c_2 \cdot Q_2(\xi) + \cdots$$

nach den rekursiv definierten Polynomen

$$
\begin{aligned}
Q_0(\xi) &= 1,\\
Q_1(\xi) &= \xi - \frac{1}{2},\\
Q_2(\xi) &= \xi^2 - \xi + \frac{1}{6},\\
Q_3(\xi) &= \xi^3 - \frac{3\cdot\xi^2}{2} + \frac{3\cdot\xi}{5} - \frac{1}{10},\\
&\;\vdots\\
Q_k(\xi) &= \xi^k \;-\; \sum_{j=0}^{k-1} \frac{\langle \xi^k, Q_j\rangle}{\langle Q_j, Q_j\rangle}\cdot Q_j(\xi) \quad \Big(\text{mit } \langle a, b\rangle = \int_0^1 a(\xi)\cdot b(\xi)\; d\xi\Big)
\end{aligned}
$$

gelöst. Dies ist die Gram–Schmidt–Orthogonalisierung 1.16 der Polynome auf dem Raum $L_2([0,1])$. Mit der linearen Transformation $\xi \in [0,1] \to y(\xi) = 2\cdot\xi - 1 \in [-1,1]$ stimmen diese Polynome bis auf irrelevante Skalierungskonstanten mit den Legendre–Polynomen $P_k(y)$ (siehe Beispiel 1.17) überein:

$$Q_k(\xi) \sim P_k(2\cdot\xi - 1), \quad \xi \in [0,1].$$

Wegen der Orthogonalität dieser Polynome gilt

$$\langle \xi^{k-1}, Q_j\rangle = 0 \quad \text{für } j \geq k$$

(beachte, dass sich das Monom ξ^{k-1} als Linearkombination von $Q_0(\xi), \ldots, Q_{k-1}(\xi)$ schreiben läßt). Damit ergibt sich aus (#) das System von Gleichungen

$$
\begin{aligned}
F(s_0+1) &= \langle \xi^0, g\rangle = c_0\cdot\langle 1, Q_0\rangle,\\
F(s_0+2) &= \langle \xi^1, g\rangle = c_0\cdot\langle \xi, Q_0\rangle + c_1\cdot\langle \xi, Q_1\rangle,\\
F(s_0+3) &= \langle \xi^2, g\rangle = c_0\cdot\langle \xi^2, Q_0\rangle + c_1\cdot\langle \xi^2, Q_1\rangle + c_2\cdot\langle \xi^2, Q_2\rangle,
\end{aligned}
$$

usw., aus dem sich die Entwicklungskoeffizienten c_0, c_1, …leicht rekursiv berechnen lassen:

$$
\begin{aligned}
c_0 &= \frac{1}{\langle 1, Q_0\rangle}\cdot F(s_0+1) = F(s_0+1),\\
c_1 &= \frac{1}{\langle \xi, Q_1\rangle}\cdot\Big(F(s_0+2) - c_0\cdot\langle \xi, Q_0\rangle\Big),\\
c_2 &= \frac{1}{\langle \xi^2, Q_2\rangle}\cdot\Big(F(s_0+3) - c_0\cdot\langle \xi^2, Q_0\rangle - c_1\cdot\langle \xi^2, Q_1\rangle\Big),\\
&\;\vdots
\end{aligned}
$$

Man erhält so die Reihendarstellung

$$\boxed{f(x) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)](x) = e^{s_0 \cdot x} \cdot \sum_{k \geq 0} c_k \cdot Q_k(e^{-x}),}$$

mit der man durch Wahl endlich vieler Terme eine (typischerweise numerische) Approximation von $f(x)$ ermitteln kann.

Beispiel 4.35: Hier ein Beispiel mit MuPAD 2.5. Wir betrachten $F(s) = e^{-s}/(s+2)$, dessen Rücktransformierte sich mit den Rechenregeln problemlos als

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 1, \\ e^{-2\cdot(x-1)} & \text{für } x \geq 1 \end{cases}$$

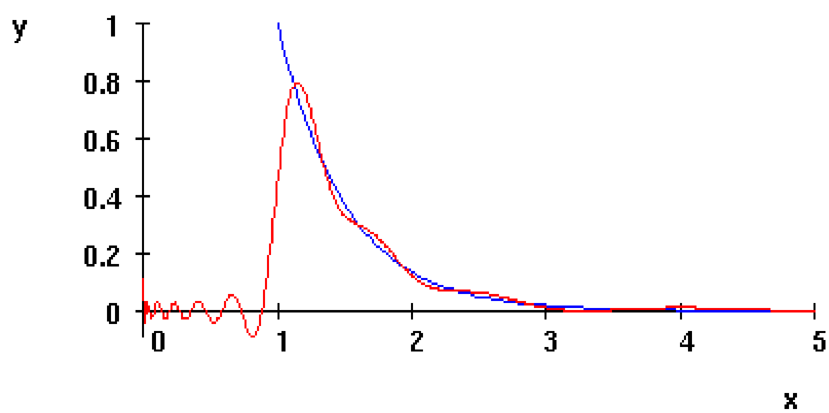
ermitteln läßt. Der von MuPAD erzeugte Plot zeigte die exakte Rücktransformation zusammen mit der numerischen Approximation

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{20} c_k \cdot Q_k(e^{-x}).$$

```
>> s0:= 0:
>> F:= s -> exp(-s)/(s + 2):
>> Q:= (k, x) -> expand(orthpoly::legendre(k, 2*x - 1)):
>> K:= 20: // Benutze Q(0,x) bis Q(K, x) zur Darstellung.

>> // Berechne die Koeffizienten <x^k, Q.j(x)> des Gleichungssystems
>> for k from 0 to K do
&>  for j from 0 to k do
&>     q[k, j]:= int(x^k * Q(j, x), x = 0 .. 1);
&>  end_for:
&> end_for:

>> // Loese das Gleichungssystem fuer die Fourier--Koeffizienten
>> for k from 0 to K do
&>   c[k]:= float((F(s0+k+1) - _plus(c[j]*q[k,j] $ j=0..k-1))/q[k,k]);
&> end_for:

>> // Die numerische Legendre-Reihe:
>> f_n:= float(exp(s0*x)*_plus(c[k]*Q(k, exp(-x)) $ k=0..K)):
>> f_n:= combine(f_n)

839.8394661 exp(-2 x) - 3.702991665 exp(-x) -

   60038.75388 exp(-3 x) + 2102945.0 exp(-4 x) -

   42831092.79 exp(-5 x) + 561271017.5 exp(-6 x) -
```

```
   5045554435.0 exp(-7 x) + 3.249335486e10 exp(-8 x) -

   1.545145703e11 exp(-9 x) + 5.541281592e11 exp(-10 x) -

   1.520051011e12 exp(-11 x) + 3.215842006e12 exp(-12 x) -

   5.26149179e12 exp(-13 x) + 6.637253345e12 exp(-14 x) -

   6.392487343e12 exp(-15 x) + 4.612539949e12 exp(-16 x) -

   2.412944658e12 exp(-17 x) + 8.639586896e11 exp(-18 x) -

   1.893583101e11 exp(-19 x) + 1.915724972e10 exp(-20 x) -

   0.0004694259567

// Plotte das exakte Urbild zusammen mit der numerischen
// Approximation f_n:
>> plot(
&>   plot::Function2d(exp(-2*(x-1)), x = 1..5, Color = RGB::Blue),
&>   plot::Function2d(f_n, x= 0..5, Color = RGB::Red, Grid = [500]),
&>   Ticks = [6, 6], FontSize = 12)
```

Nicht unerwartet: man erkennt deutlich ein Gibbsches Phänomen an der Unstetigkeitsstelle $x = 1$:



4.4 Anwendung: die „Systemtheorie“ der Ingenieure

Hiefür reicht leider die Zeit nicht mehr ...