Kapitel 3

Komplexe Funktionen

$\boxed{\downarrow 22.1.03}$

Die Theorie differenzierbarer (analytischer) komplexer Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist eine der schönsten Teildisziplinen der Analysis. Von den zahlreichen Anwendungen beschränken wir uns hier auf den „Residuen-Satz", mit dem man die speziellen Werte vieler bestimmter Integral berechnen kann. Als Literatur zu diesem Kapitel empfehle ich wärmstens

[Jän] Klaus Jänich: *Funktionentheorie – Eine Einführung*, Springer, 1999.

Es handelt sich um ein sehr gut lesbares, recht elementares Büchlein mit nur 123 Seiten, in dem die wichtigsten Tatsachen der Funktionentheorie übersichtlich dargelegt werden.

3.1 Differenzierbarkeit in $\mathbb{C}$

Definition 3.1: (Komplexe Differenzierbarkeit)

Eine Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ heißt **„am Punkt $z \in \mathbb{C}$ (komplex) differenzierbar"**, *wenn der Grenzwert*

$$\frac{d}{dz} f(z) = f'(z) := \lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$

existiert (wobei für den Grenzwert $h \in \mathbb{C}$ betrachtet wird). Eine in allen Punkten eines offenen[1] Gebiets $U \subset \mathbb{C}$ differenzierbare Funktion heißt **„auf U analytisch"** *(oder auch* **„holomorph"***). Das Gebiet U wird als* **„Holomorphie–Gebiet"** *von $f(z)$ bezeichnet.*

[1]Intuitiv bedeutet „offenes Gebiet", dass der Rand des Gebiets nicht Teil des Gebiets ist. Genauer: zu jedem $z \in U$ gibt es eine Kreisscheibe um z, die komplett in U enthalten ist.

Beispiel 3.2: Wegen der analogen Definition der Ableitung gelten alle für Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ bekannten Rechenregeln (Summenregel, Produktregel, Quotientenregel, Kettenregel) auch in $\mathbb{C}$. Damit sind Polynome und rationale Funktionen überall in $\mathbb{C}$ differenzierbar (außer, bei rationalen Funktionen, an den Polstellen). Weiterhin sind die Exponentialfunktion und die trigonometrischen Funktionen

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}, \quad \sin(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot z^{2\cdot k+1}}{(2\cdot k+1)!}, \quad \cos(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot z^{2\cdot k}}{(2\cdot k)!}$$

auf ganz $\mathbb{C}$ differenzierbar, es gilt wie im Reellen:

$$\frac{d}{dz}\, e^z = e^z, \quad \frac{d}{dz}\, \sin(z) = \cos(z), \quad \frac{d}{dz}\, \cos(z) = -\sin(z).$$

Bemerkung 3.3: *Trotz der analogen Definition und Rechenregeln ist die Differenzierbarkeit in $\mathbb{C}$ eine ungleich stärkere Regularitätsbedingung als die Differenzierbarkeit von Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$. Wie wir später sehen werden, ist eine auf einem offenen Gebiet U einmal differenzierbare (= analytische = holomorphe) Funktion* **automatisch** *unendlich oft differenzierbar und wird* **automatisch** *durch ihre Taylor–Reihe dargestellt! Ein erstes Indiz für diese starke Regularitätsstruktur liefert der folgende Satz, der besagt, dass Real- und Imaginärteil differenzierbarer Funktionen bestimmte partielle Differentialgleichungen erfüllen.*

Satz 3.4: (Die Cauchy–Riemannschen Differentialgleichungen)
Seien $x, y, u(x,y), v(x,y) \in \mathbb{R}$. Die Funktion

$$f(z) = f(x + i\cdot y) = u(x,y) + i\cdot v(x,y)$$

ist auf einem offenen Gebiet $U \in \mathbb{C}$ genau dann komplex differenzierbar, wenn dort die **Cauchy–Riemannschen Differentialgleichungen**

$$u_x(x,y) = v_y(x,y), \quad u_y(x,y) = -v_x(x,y)$$

erfüllt sind (mit $u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$ etc.).

Beweis: Sei $z \in U$. Wir setzen $\Delta z = h = a + i\cdot b$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ und betrachten den Differenzenquotienten

$$\begin{aligned}\frac{\Delta f}{\Delta z} &= \frac{f(z+h) - f(z)}{h} \\ &= \frac{(u(x+a, y+b) - u(x,y)) + i\cdot(v(x+a,y+b) - v(x,y))}{a + i\cdot b}.\end{aligned}$$

Für $b = 0$ gilt

$$\frac{\Delta f}{\Delta z} = \frac{(u(x+a,y) - u(x,y)) + i \cdot (v(x+a,y) - v(x,y))}{a}.$$

Bei komplexer Differenzierbarkeit folgt im Grenzwert $a \to 0$: $f'(z) = u_x + i \cdot v_x$.
Für $a = 0$ gilt

$$\frac{\Delta f}{\Delta z} = \frac{(u(x,y+b) - u(x,y)) + i \cdot (v(x,y+b) - v(x,y))}{i \cdot b}.$$

Bei komplexer Differenzierbarkeit folgt im Grenzwert $b \to 0$: $f'(z) = \frac{u_y + i \cdot v_y}{i} = v_y - i \cdot u_y$. Aus der Differenzierbarkeit folgen also die Cauchy–Riemannschen Dglen

$$f'(z) = u_x + i \cdot v_x = v_y - i \cdot u_y \quad \Rightarrow \quad u_x = v_y,\ v_x = -u_y.$$

Umgekehrt: per reeller Taylor–Entwicklung gilt

$$u(x+a, y+b) = u(x,y) + a \cdot u_x(x,y) + b \cdot u_y(x,y) + o(\sqrt{a^2+b^2}),$$

$$v(x+a, y+b) = v(x,y) + a \cdot v_x(x,y) + b \cdot v_y(x,y) + o(\sqrt{a^2+b^2}).$$

Gelten die Cauchy–Riemannschen Dglen, so folgt

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta f}{\Delta z} &= \frac{a \cdot u_x + b \cdot \overbrace{u_y}^{=-v_x} + i \cdot (a \cdot v_x + b \cdot \overbrace{v_y}^{=u_x}) + o(\sqrt{a^2+b^2})}{a + i \cdot b} \\
&= \frac{a \cdot u_x - b \cdot v_x + i \cdot (a \cdot v_x + b \cdot u_x) + o(\sqrt{a^2+b^2})}{a + i \cdot b} \\
&= \frac{(a + i \cdot b) \cdot (u_x + i \cdot v_x)}{a + i \cdot b} + \frac{o(\sqrt{a^2+b^2})}{a + i \cdot b} \\
&= u_x + i \cdot v_x + \frac{o(\sqrt{a^2+b^2})}{a + i \cdot b}.
\end{aligned}$$

Der komplexe Grenzwert $h = a + i \cdot b \to 0$ von $\Delta f / \Delta z$ existiert damit und ergibt $f'(z) = u_x + i \cdot v_x = v_y - i \cdot u_y$.

Q.E.D.

Bemerkung 3.5: *Bei differenzierbaren Funktionen sind Real– und Imaginärteil nicht unabhängig! Für differenzierbare Funktionen $f_1 = u + i \cdot v_1$, $f_2 = u + i \cdot v_2$ mit dem selben Realteil u folgt für die differenzierbare Differenzfunktion $f_1 - f_2 = i \cdot (v_1 - v_2)$ aus den Cauchy–Riemannschen Dglen*

$$(v_1 - v_2)_x = 0, \quad (v_1 - v_2)_y = 0 \quad \Rightarrow \quad v_1 - v_2 = const,$$

d.h., der Realteil bestimmt den Imaginärteil eindeutig bis auf eine additive Konstante.

Bemerkung 3.6: *Setzen wir voraus, dass die differenzierbare Funktion $f = u+i\cdot v$ zweifach stetig differenzierbar ist (was, wie wir sehen werden, automatisch erfüllt ist), so folgt mit der Symmetrie zweiter Ableitungen aus den Cauchy–Riemannschen Dglen*

$$u_{xx} = v_{yx} = v_{xy} = (-u_y)_y, \quad v_{xx} = (-u_y)_x = -u_{xy} = -(v_y)_y.$$

Sowohl Real- als auch Imaginärteil differenzierbarer Funktionen erfüllen also die Laplace–Gleichung

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad v_{xx} + v_{yy} = 0.$$

3.2 Konturintegrale in $\mathbb{C}$

Der Begriff komplexer Wegintegrale ist von entscheidender Bedeutung. Zunächst der Begriff einer komplexen Kurve:

Definition 3.7: (Parametrisierte Kurve)

Eine **„Kurvenparametisierung“** *ist eine stetige Abbildung*

$$t \in [a,b] \in \mathbb{R} \to z(t) \in \mathbb{C}.$$

Die zugeordnete **„Kurve“** *(***„Weg“**, **„Kontur“***) ist das Bild $\Gamma = \{z(t),\ t \in [a,b]\} \subset \mathbb{C}$ der Parametrisierung.*

24.1.02↓ **Beispiel 3.8:** a) Ein wichtiges Beispiel eines Wegs in $\mathbb{C}$ ist die gerade Linie von einem Punkt $z_0 \in \mathbb{C}$ zu einem anderen Punkt $z_1 \in \mathbb{C}$. Eine mögliche Parametrisierung ist

$$t \in [0,1] \to z(t) = z_0 + t \cdot (z_1 - z_0).$$

b) Ein anderes wichtiges Beispiel einer (geschlossenen) Kurve ist der Kreis mit Radius r um den Mittelpunkt z_0 mit der Parametrisierung

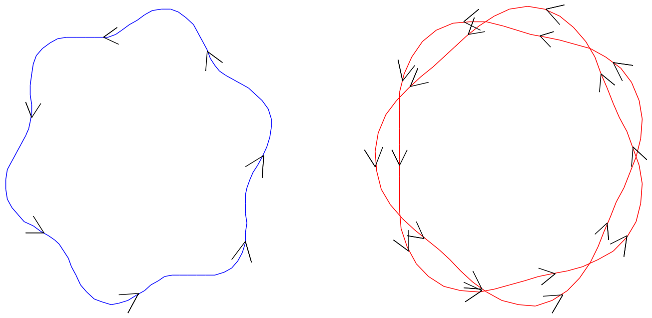
$$t \in [0, 2\cdot\pi] \to z(t) = z_0 + r \cdot e^{i\cdot t} = z_0 + r \cdot \Big(\cos(t) + i \cdot \sin(t)\Big).$$

Vereinbarung 3.9:

Aus technischen Gründen nehmen wir im Folgenden als zusätzliche Bedingung an unsere Kurven immer implizit **„Doppelpunktfreiheit“** *an (ohne dies in den folgenden Formulierungen jeweils explizit zu erwähnen).*

Damit ist gemeint, dass aus $z(t_1) = z(t_2)$ mit $t_1, t_2 \in (a,b)$ immer $t_1 = t_2$ folgen muss: die Kurven sollen sich nicht selbst schneiden. Die Endpunkte $z(a)$, $z(b)$ dürfen aber übereinstimmen („geschlossene Kurven“).

Die Doppelpunktfreiheit ist keine strukturell wichtige Bedingung: man kann alle folgenden Aussagen mit leichten Modifikationen auch für Kurven mit Doppelpunkten formulieren. Man braucht dabei aber für geschlossene Kurven das Konzept der „Windungszahl der Kurve um einen Punkt“ (welche angibt, wie oft die Kurve um den Punkt herumläuft). Die folgenden Kurven haben bezgl. eines Punktes im von den Kurven eingeschlossenen Gebiet die (anschaulich offensichtlichen) Windungszahlen 1 *bzw.* 2*:*



Man kann diese Windungszahl einer geschlossenen Kurve um einen Punkt folgendermassen einführen: Die Kurve $z(t)$ hat eine „Orientierung“ von kleinen t-Werten zu großen t-Werten, die man sich als tangentiale Pfeile an den Kurvenpunkten vorstellen kann. Man startet nun in dem Punkt, dessen Windugngszahl bestimmt werden soll und läuft auf einem beliebigen Weg ins Unendliche, wobei dieser Weg die Kurve jeweils transversal schneiden soll (wenn dieser Weg die Kurve schneidet). Man zählt alle Schnittpunkte des Wegs mit der Kurve, wo die Kurve den Weg von „rechts nach links“ schneidet und zieht die Zahl aller Schnittpunkte ab, wo die Kurve von „links nach rechts“ schneidet. Das Ergebnis ist die Windungszahl.

Punkte weit außerhalb der Kurven haben die Windungszahl 0*, denn man kann ins Unendliche gelangen, ohne die Kurve schneiden zu müssen. Die Punkte mit Windungszahl $\neq 0$ definieren das „von der Kurve eingeschlossene Gebiet“.*

Für die von uns im Folgenden betrachteten geschlossenen Kurven Γ setzen wir mit der Doppelpunktfreiheit voraus, dass $\mathbb{C} \setminus \Gamma$ sich zerlegt in Punkte mit Windungszahl 0 (das „Außengebiet“ der Kurve) und Punkte mit Windungszahl ± 1 (das von der Kurve eingeschlossene Gebiet). Haben die inneren Punkte alle die Windungszahl 1, sprechen wir von einer „positiv“ (gegen den Uhrzeigersinn) orientierten geschlossenen Kurve. Haben die inneren Punkte alle die Windungszahl -1, sprechen wir von einer „negativ“ (im Uhrzeigersinn) orientierten geschlossenen Kurve.

Definition 3.10: (Reelle Ableitungen und Integrale)

Kurven können problemlos nach dem reellen Kurvenparameter differenziert werden bzw. es kann über einen reellen Parameter integriert werden:

a) Eine parametrisierte Kurve $t \to z(t) = u(t) + i \cdot v(t) \in \mathbb{C}$ heißt **„differenzierbar"**, *wenn der Realteil $u(t) = \Re(z(t))$ und der Imaginärteil $v(t) = \Im(z(t))$ differenzierbar sind. Die Ableitung einer Kurve $z(t)$ nach dem reellen* **„Kurvenparameter"** *t wird definiert als*

$$\frac{dz(t)}{dt} = \frac{du(t)}{dt} + i \cdot \frac{dv(t)}{dt}.$$

b) Das Integral einer komplexwertigen Funktion $f(t) \in \mathbb{C}$ eines reellen Parameters t wird definiert als

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b u(t)\,dt \;+\; i \cdot \int_a^b v(t)\,dt$$

mit $u(t) = \Re(f(t))$, $v(t) = \Im(f(t))$.

Mit diesen Hilfsbegriffen läßt sich der zentrale Begriff des komplexen Kurvenintegrals einführen:

Definition 3.11: (Komplexes Wegintegral)

Sei $t \in [a,b] \to z(t)$ eine differenzierbare Parametrisierung einer Kurve Γ. Das **„Wegintegral über f von $z(a)$ nach $z(b)$ längs der Kurve Γ"** *wird definiert als*

$$\int_{z(a)}^{z(b)} {}_{\Gamma}\, f(z)\,dz := \int_a^b f(z(t)) \cdot \frac{dz(t)}{dt}\,dt.$$

Für eine geschlossene Kurve Γ mit $z(a) = z(b)$ benutzen wir auch das Symbol $\oint_\Gamma f(z)\,dz$.

Beispiel 3.12: a) Betrachte das Integral über $f(z) = z^n$, $n > 0$, längs der Geraden Γ vom Nullpunkt zum Punkt z_1. Wähle dazu die Parametrisierung $z(t) = t \cdot z_1$, $t \in [0,1]$:

$$\int_0^{z_1} {}_{\Gamma}\, z^n\,dz = \int_0^1 (z(t))^n \cdot \frac{dz(t)}{dt}\,dt = \int_0^1 (t \cdot z_1)^n \cdot z_1 t\,dt = z_1^{n+1} \cdot \int_0^1 t^n\,dt = \frac{z_1^{n+1}}{(n+1)}.$$

b) Betrachte das Integral über $f(z) = \frac{1}{(z-z_0)^n}$ längs des Kreises Γ mit Radius r um den Punkt z_0. Wähle dazu die Parametrisierung $z(t) = z_0 + r \cdot e^{i \cdot t}$, $t \in [0, 2 \cdot \pi]$. Mit

$$\frac{dz(t)}{dt} = i \cdot r \cdot e^{i \cdot t}$$

ergibt sich

$$\oint_\Gamma \frac{dz}{(z-z_0)^n} = \int_0^{2\cdot\pi} \frac{i\cdot r\cdot e^{i\cdot t}\,dt}{r^n\cdot e^{i\cdot n\cdot t}} = i\cdot r^{1-n}\cdot\int_0^{2\cdot\pi} e^{i\cdot(1-n)\cdot t}\,dt.$$

Für $n\neq 1$ ist dies

$$\frac{i\cdot r^{1-n}}{i\cdot(1-n)}\cdot\Big[e^{i\cdot(1-n)\cdot t}\Big]_{t=0}^{t=2\cdot\pi} = 0,$$

während sich für $n=1$ offensichtlich $2\cdot\pi\cdot i$ ergibt. Man erhält also:

$$\boxed{\frac{1}{2\cdot\pi\cdot i}\cdot\oint_\Gamma\frac{dz}{(z-z_0)^n} = \begin{cases} 1 & \text{für } n=1, \\ 0 & \text{für } n\neq 1.\end{cases}}$$

$\boxed{\downarrow 29.1.02}$

Satz 3.13: (Eigenschaften von Kurvenintegralen)

a) *Ein Kurvenintegral vom Punkt z_a zum Punkt z_b längs einer Kurve hängt nicht von der Parametrisierung ab, sondern nur vom Bild Γ der Parametrisierung, dem Startpunkt z_a und dem Endpunkt z_b. Vertauscht man Start– und Endpunkt, so wechselt das Vorzeichen:*

$$\int_{z_a}^{z_b}{}_{\Gamma} f(z)\,dz = -\int_{z_b}^{z_a}{}_{\Gamma} f(z)\,dz.$$

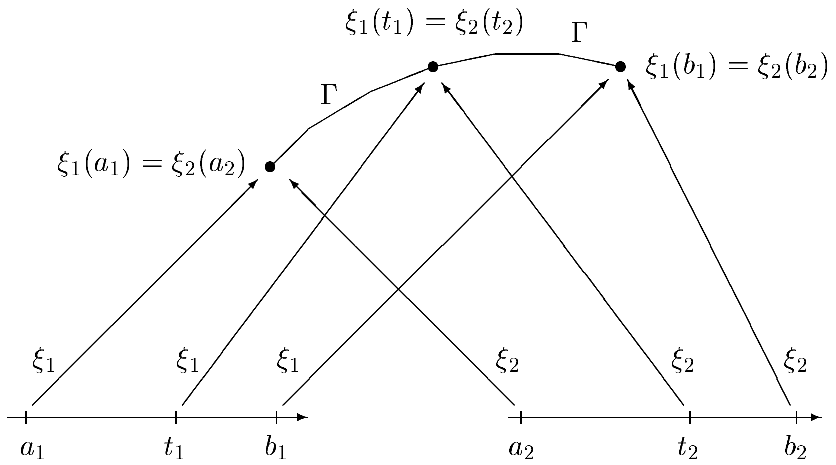
b) *Ein Kurvenintegral über eine geschlossene Kurve hängt nicht vom Startpunkt (= Endpunkt) ab, sondern nur vom „Durchlaufsinn" („in Uhrzeigerrichtung" oder „gegen die Uhrzeigerrichtung"). Wird kein Durchlaufsinn explizit angegeben, setzen wir „Durchlauf gegen die Uhrzeigerrichtung" voraus. Sind Γ_1 und Γ_2 die selben geschlossenen Kurven, die in unterschiedlicher Richtung durchlaufen werden, so gilt*

$$\oint_{\Gamma_1} f(z)\,dz = -\oint_{\Gamma_2} f(z)\,dz.$$

c) *Zerlegt man eine Kurve Γ_{ab} von z_a nach z_b durch Wahl eines Zwischenpunktes $z_c\in\Gamma$ in zwei Teilkurven Γ_{ac} von z_a nach z_c und Γ_{cb} von z_c nach z_b, so gilt*

$$\int_{z_a}^{z_b}{}_{\Gamma_{ab}} f(z)\,dz = \int_{z_a}^{z_c}{}_{\Gamma_{ac}} f(z)\,dz + \int_{z_c}^{z_b}{}_{\Gamma_{cb}} f(z)\,dz.$$

Beweis: a) Seien $\xi_1(t_1)$, $t_1 \in [a_1, b_1]$ und $\xi_2(t_2)$, $t_2 \in [a_2, b_2]$ unterschiedliche differenzierbare Parametrisierungen von Γ mit dem selben Durchlaufsinn, also $z_a = \xi_1(a_1) = \xi_2(a_2)$, $z_b = \xi_1(b_1) = \xi_2(b_2)$, so wird durch $\xi_1(t_1) = \xi_2(t_2)$ eine streng monoton wachsende Abbildung $t_1 \to t_2(t_1)$ definiert:



Durch Differenzieren von $\xi_1(t_1) = \xi_2(t_2(t_1))$ nach t_1 folgt mit der Kettenregel

$$\frac{d\xi_1(t_1)}{dt_1} = \frac{d\xi_2(t_2)}{dt_2} \cdot \frac{dt_2}{dt_1},$$

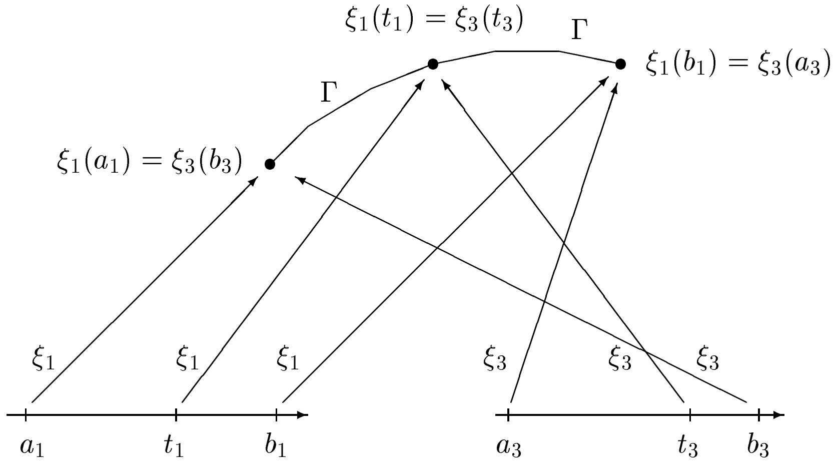
womit gilt:

$$\int_{z_a}^{z_b} {}_\Gamma f(z)\, dz = \int_{a_1}^{b_1} f(\xi_1(t_1)) \cdot \frac{d\xi_1(t_1)}{dt_1}\, dt_1 = \int_{a_1}^{b_1} f(\xi_1(t_1)) \cdot \frac{d\xi_2(t_2)}{dt_2} \cdot \frac{dt_2}{dt_1}\, dt_1.$$

Die Integralsubstitution $t_2 = t_2(t_1)$ liefert damit:

$$\int_{z_a}^{z_b} {}_\Gamma f(z)\, dz = \int_{a_1}^{b_1} f(\xi_1(t_1)) \cdot \frac{d\xi_1(t_1)}{dt_1}\, dt_1 = \int_{a_2}^{b_2} f(\xi_2(t_2)) \cdot \frac{d\xi_2(t_2)}{dt_2}\, dt_2,$$

d.h., die Parametrisierungen $\xi_1(t_1)$ und $\xi_2(t_2)$ führen auf den selben Integralwert. Betrachten wir nun eine dritte Parametrisierung $\xi_3 : t_3 \in [a_3, b_3] \to \Gamma$ mit einem anderen Durchlaufsinn, die von $\xi_3(a_3) = \xi_1(b_1) = z_b$ nach $\xi_3(b_3) = \xi_1(a_1) = z_a$ läuft, wenn t_3 von a_3 nach b_3 läuft. Durch $\xi_1(t_1) = \xi_3(t_3)$ erhält man nun eine monoton fallende Abbildung $t_1 \to t_3(t_1)$:



Mit

$$\frac{d\xi_1(t_1)}{dt_1} = \frac{d\xi_3(t_3)}{dt_3} \cdot \frac{dt_3}{dt_1}$$

ergibt sich wiederum

$$\int_{z_a}^{z_b}{}_{\Gamma} f(z)\,dz = \int_{a_1}^{b_1} f(\xi_1(t_1)) \cdot \frac{d\xi_1(t_1)}{dt_1}\,dt_1 = \int_{a_1}^{b_1} f(\xi_1(t_1)) \cdot \frac{d\xi_3(t_3)}{dt_3} \cdot \frac{dt_3}{dt_1}\,dt_1.$$

Die Integralsubstitution $t_3 = t_3(t_1)$ liefert diesmal

$$\begin{aligned}\int_{z_a}^{z_b}{}_{\Gamma} f(z)\,dz &= \int_{a_1}^{b_1} f(\xi_1(t_1)) \cdot \frac{d\xi_1(t_1)}{dt_1}\,dt_1 = \int_{b_3}^{a_3} f(\xi_3(t_3)) \cdot \frac{d\xi_3(t_3)}{dt_3}\,dt_3 \\ &= -\int_{a_3}^{b_3} f(\xi_3(t_3)) \cdot \frac{d\xi_3(t_3)}{dt_3}\,dt_3 = -\int_{z_b}^{z_a}{}_{\Gamma} f(z)\,dz.\end{aligned}$$

c) Sei $z(t) : [a,b] \to \mathbb{C}$ eine Parametrisierung der Kurve. Es gilt

$$\begin{aligned}\int_{z_a}^{z_b}{}_{\Gamma ab} f(z)\,dz &= \int_a^b f(z(t)) \cdot \frac{dz(t)}{dt}\,dt = \int_a^c f(z(t)) \cdot \frac{dz(t)}{dt}\,dt + \int_c^b f(z(t)) \cdot \frac{dz(t)}{dt}\,dt \\ &= \int_{z_a}^{z_c}{}_{\Gamma ac} f(z)\,dz + \int_{z_c}^{z_b}{}_{\Gamma cb} f(z)\,dz,\end{aligned}$$

wobei $z(t)$ mit $t \in [a,c]$ bzw. $t \in [c,b]$ Parametrisierungen von Γ_{ac} bzw. Γ_{cb} sind.

b) Sei $z(t)$ mit $t \in [a,b]$ eine Parametrisierung mit Start- und Endpunkt $z_a = z(a) = z(b)$. Sei $c \in [a,b]$, $z_c = z(c)$. Nach c) gilt:

$$\oint_\Gamma f(z)\;dz = \int_{z_a}^{z_b}{}_{\Gamma ab} f(z)\,dz = \underbrace{\int_{z_a}^{z_c}{}_{\Gamma ac} f(z)\,dz}_{(*)} + \underbrace{\int_{z_c}^{z_b}{}_{\Gamma cb} f(z)\,dz}_{(**)}$$

$$= \underbrace{\int_{z_c}^{z_b}{}_{\Gamma_{cb}} f(z)\,dz}_{(**)} + \underbrace{\int_{z_a}^{z_c}{}_{\Gamma_{ac}} f(z)\,dz}_{(*)} = \underbrace{\int_{z_c}^{z_b}{}_{\Gamma_{cb}} f(z)\,dz}_{(**)} + \underbrace{\int_{z_b}^{z_c}{}_{\Gamma_{bc}} f(z)\,dz}_{(*)},$$

wobei $\Gamma_{ac} = \Gamma_{bc}$ bzw. Γ_{cb} die Teilkurven von $z_a = z_b$ bis z_c bzw. von z_c bis $z_b = z_a$ der geschlossenen Gesamtkurve Γ_{ab} sind. Die Summe der beiden letzen Integrale läßt sich auffassen als das Kurvenintegral vom Startpunkt z_c aus (über den Zwischenpunkt $z_b = z_a$) zum Endpunkt z_c. Unabhängig von der Wahl von c ergibt sich als Integralwert für den Start = Endpunkt z_c also immer der selbe Wert. Öffnet man die Kurve ein wenig, d.h., wählt man $z_b \in \Gamma$ mit $z_b \approx z_a$, $z_b \neq z_a$, so gilt nach c):

$$\int_{z_a}^{z_b}{}_{\Gamma_{ab}} f(z)\,dz = -\int_{z_b}^{z_a}{}_{\Gamma_{ab}} f(z)\,dz,$$

wobei sich der Durchlaufsinn im Durchlauf von z_a nach z_b bzw. von z_b nach z_a ändert. Läßt man z_b gegen z_a streben, so geht die Kurve wieder in eine geschlossene Kurve über, wobei der Integralwert je nach Umlaufsinn ein anderes Vorzeichen annimmt.

Q.E.D.

Bemerkung 3.14: *Man nimmt Satz 3.13.c) zum Anlass, Kurvenintegrale auch für nur stückweise differenzierbare Kurven $\Gamma_{0n} = \Gamma_{01} \cup \Gamma_{12} \cup \Gamma_{23} \cup \cdots$ zu definieren, die aus n differenzierbaren Teilkurven Γ_{01}, Γ_{12} etc. zusammengesetzt sind:*

$$\int_{z_0}^{z_n}{}_{\Gamma_{0n}} f(z)\,dz = \int_{z_0}^{z_1}{}_{\Gamma_{01}} f(z)\,dz + \int_{z_1}^{z_2}{}_{\Gamma_{12}} f(z)\,dz + \int_{z_2}^{z_3}{}_{\Gamma_{23}} f(z)\,dz + \cdots .$$

Betrachte z.B. die Berandung Γ eines Rechtecks, die die Vereinigung von 4 glatten Seiten (Geradenstücke) ist.

3.3 Der Cauchysche Integralsatz

Interpretiert man $z = x + i \cdot y \in \mathbb{C}$ als den Vektor $\vec{z} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, so stimmt die Definition 3.11

$$\int_{z(a)}^{z(b)}{}_{\Gamma} f(z)\,dz = \int_a^b f(z(t)) \cdot \frac{dz(t)}{dt}\,dt.$$

des komplexen Kurvenintegrals mit der Definition des Kurvenintegrals

$$\int_{\vec{z}(a)}^{\vec{z}(b)}{}_{\Gamma} \langle \vec{f}(\vec{z}), d\vec{z}\,\rangle = \int_a^b \langle \vec{f}_1(\vec{z}(t)) + i \cdot \vec{f}_2(\vec{z}(t)), \frac{d\vec{z}(t)}{dt}\,\rangle\,dt$$

im $\mathbb{R}^2$ überein, wenn wir $f(z(t)) = u(z(t)) + i \cdot v(z(t))$ (mit $u = \Re(f(z))$, $v = \Im(f(z))$) in die beiden Vektorfelder

$$\vec{f}_1(\vec{z}\,) = \begin{pmatrix} u(\vec{z}\,) \\ -v(\vec{z}\,) \end{pmatrix}, \quad \vec{f}_2(\vec{z}\,) = \begin{pmatrix} v(\vec{z}\,) \\ u(\vec{z}\,) \end{pmatrix}$$

zerlegen:

$$\langle \vec{f}_1(\vec{z}(t)) + i \cdot \vec{f}_2(\vec{z}(t)), \frac{d\vec{z}(t)}{dt} \,\rangle = \langle \begin{pmatrix} u + i \cdot v \\ -v \cdot + i \cdot u \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} dx/dt \\ dy/dt \end{pmatrix} \rangle$$

$$= (u + i \cdot v) \cdot \frac{dx}{dt} + (-v + i \cdot u) \cdot \frac{dy}{dt} = (u + i \cdot v) \cdot \Big(\frac{dx}{dt} + i \cdot \frac{dy}{dt} \Big) = f(z) \cdot \frac{dz}{dt}.$$

Aus der Vektoranalysis ist bekannt, dass das Kurvenintegral

$$\int_{\vec{z}(a)\ \Gamma}^{\vec{z}(b)} \langle \vec{f}, d\vec{z}\,\rangle = \int_{\vec{z}(a)\ \Gamma}^{\vec{z}(b)} \langle \begin{pmatrix} a(\vec{z}\,) \\ b(\vec{z}\,) \end{pmatrix}, d\vec{z}\,\rangle$$

wegunabhängig ist, wenn das Vektorfeld ein Potential hat, d.h., wenn $\vec{f}$ ein Gradientenfeld ist. Dies ist aber genau dann der Fall, wenn die Komponenten $a(\vec{z}\,)$, $b(\vec{z}\,)$ des Vektorfeldes die Bedingungen $a_y = b_x$ erfüllen. Für die beiden Vektorfelder $\vec{f}_1$ bzw. $\vec{f}_2$, welche die komplexe Funktion $f(z)$ kodieren, ist dies erfüllt, wenn

$$u_y = -v_x \quad \text{bzw.} \quad v_y = u_x$$

gilt. Dies sind aber genau die Cauchy–Riemannschen Differentialgleichungen aus Satz 3.4, die für komplex differenzierbares (analytisches, holomorphes) $f(z)$ immer gelten! Wir erhalten damit:

Satz 3.15: (Wegunabhängigkeit komplexer Wegintegrale)

Sei U ein offenes Gebiet in $\mathbb{C}$, auf dem die Funktion $f(z)$ differenzierbar ist. Seien $\Gamma_1, \Gamma_2 \subset U$ Kurven, die jeweils von $z_a \in U$ nach $z_b \in U$ laufen. Dann gilt:

$$\int_{z_a\ \Gamma_1}^{z_b} f(z)\ dz = \int_{z_a\ \Gamma_2}^{z_b} f(z)\ dz.$$

Die übliche (äquivalente) Formulierung ist:

Satz 3.16: (Der Cauchysche Integralsatz)

Sei U ein offenes Gebiet in $\mathbb{C}$, auf dem die Funktion $f(z)$ differenzierbar ist. Dann gilt für jede geschlossene Kurve $\Gamma \subset C$:

$$\oint_\Gamma f(z)\ dz = 0.$$

Beweis: Die Aussagen 3.16 und 3.15 sind äquivalent:
Startet man mit zwei Kurven Γ_1, Γ_2, die beide von z_a nach z_b laufen, so erhält man eine geschlossene Kurve $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ von z_a nach z_a, wenn man Γ_1 von z_a nach z_b und dann Γ_2 rückwärts von z_b nach z_a durchläuft. Gilt Satz 3.16, so folgt Satz 3.15:

$$\int_{z_a}^{z_b}{}_{\Gamma_1} f(z)\,dz + \int_{z_b}^{z_a}{}_{\Gamma_2} f(z)\,dz = 0 \;\Rightarrow\; \int_{z_a}^{z_b}{}_{\Gamma_1} f(z)\,dz = -\int_{z_b}^{z_a}{}_{\Gamma_2} f(z)\,dz = \int_{z_a}^{z_b}{}_{\Gamma_2} f(z)\,dz.$$

Umgekehrt, gilt Satz 3.15, so können wir jeden geschlossenen Weg Γ von z_a nach z_a zerlegen, indem wir einen beliebigen Zwischenpunkt $z_b \in \Gamma$ betrachten. Mit dem Teilweg Γ_1 von z_a nach z_b und Γ_2 von z_b zurück nach z_a folgt

$$\oint_\Gamma f(z)\,dz = \int_{z_a}^{z_b}{}_{\Gamma_1} f(z)\,dz + \int_{z_b}^{z_a}{}_{\Gamma_2} f(z)\,dz = \int_{z_a}^{z_b}{}_{\Gamma_1} f(z)\,dz - \int_{z_a}^{z_b}{}_{\Gamma_2} f(z)\,dz = 0.$$

Q.E.D.

Bemerkung 3.17: *Die Formulierung 3.16 des Cauchyschen Integralsatzes liefert eines der wichtigsten Hilfsmittel der Funktionentheorie:*

> **Das Deformationsprinzip:** *Innerhalb eines Holomorphie–Gebietes einer Funktion $f(z)$ kann ein Weg zwischen zwei Punkten beliebig deformiert werden, ohne den Wert des Kurvenintegrals über $f(z)$ zwischen den Punkten zu ändern.*

Achtung: bei der Deformation darf die Kurve keinen Punkt überstreichen, an dem die Funktion nicht differenzierbar ist. Typischerweise bleibt die Deformation an Singularitäten „hängen“.

Beispiel 3.18: Sei Γ eine beliebige geschlossene Kurve. Sei $z_0 \in \mathbb{C}$ ein beliebiger Punkt innerhalb des von Γ umschlossenen Gebiets. Wir betrachten $f(z) = (z - z_0)^n$, $n \in \mathbb{Z}$. Das Holomorphie–Gebiet von f ist $\mathbb{C}$ für $n \geq 0$ und $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ für $n < 0$. Wir können damit Γ stets zu einen Kreis um z_0 deformieren. Mit Beispiel 3.12 folgt

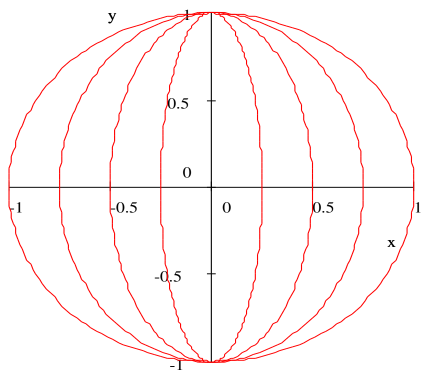
$$\boxed{\frac{1}{2 \cdot \pi \cdot i} \cdot \oint_\Gamma (z - z_0)^n\,dz = \begin{cases} 1 & \text{für } n = -1, \\ 0 & \text{für } n \neq -1. \end{cases}}$$

Liegt z_0 nicht im von Γ umschlossenen Gebiet, folgt mit Satz 3.16 $\oint_\Gamma f(z)\,dz = 0$ für jeden Wert von n.

Beispiel 3.19: Betrachte $f(z) = \frac{1}{2 \cdot i \cdot z}$ und die Kurvenschar

$$\Gamma_c : t \in [-\pi/2, \pi/2] \to c \cdot \cos(t) + i \cdot \sin(t), \quad c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Diese Kurven sind Ellipsenhälften mit den Halbachsen $|c|$ in x-Richtung und 1 in y-Richtung, die für jedes c vom Punkt $-i$ zum Punkt i laufen:



Man berechnet

$$\int_{-i \; \Gamma_c}^{i} \frac{dz}{2 \cdot i \cdot z} = \frac{1}{2 \cdot i} \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{-c \cdot \sin(t) + i \cdot \cos(t)}{c \cdot \cos(t) + i \cdot \sin(t)} \, dt$$

$$= \frac{1}{2 \cdot i} \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\Big(-c \cdot \sin(t) + i \cdot \cos(t) \Big) \cdot \Big(c \cdot \cos(t) - i \cdot \sin(t) \Big)}{c^2 \cdot \cos^2(t) + \sin^2(t)} \, dt$$

$$= \frac{1}{2 \cdot i} \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1 - c^2) \cdot \sin(t) \cdot \cos(t) + c \cdot i}{c^2 + (1 - c^2) \cdot \sin^2(t)} \, dt \overset{(*)}{=} \frac{1}{2 \cdot i} \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{i \cdot c \, dt}{c^2 + (1 - c^2) \cdot \sin^2(t)}$$

$$\overset{(**)}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{c \, dt}{c^2 + (1 - c^2) \cdot \sin^2(t)},$$

wobei in $(*)$ ein Teil des Integranden verschwindet, da dieser Anteil eine ungerade Funktion ist und in $(**)$ benutzt wird, dass der verbleibende Integrand eine gerade Funktion ist. Das verbleibende Integral kann nun sehr einfach für beliebiges $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ bestimmt werden! Das Holomorphie–Gebiet von $f(z) = \frac{1}{2 \cdot i \cdot z}$ ist $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, d.h., das Integral hängt gar nicht vom Deformationsparameter c ab! Genauer, es hängt nur vom Vorzeichen von c ab, denn für $c < 0$ bzw. $c > 0$ kann c auf einen beliebigen Wert des gleichen Vorzeichens verändert werden, ohne dass die Kurve Γ_c die Singularität $z = 0$ von $f(z)$ überstreicht. Wir brauchen das Integral daher nur für bestimmte Werte von c zu berechnen. Für $c = \pm 1$ ergibt sich sofort

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{c \, dt}{c^2 + (1 - c^2) \cdot \sin^2(t)} = \pm \frac{\pi}{2}.$$

Damit haben wir als eine Anwendung der bisherigen Theorie erhalten:

$$\boxed{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{c^2 + (1 - c^2) \cdot \sin^2(t)} = \frac{\pi}{2 \cdot |c|}.}$$

Satz 3.20: (Die Cauchysche Integralformel)

Sei $U \subset \mathbb{C}$ ein Holomorphie–Gebiet von $f(z)$. Sei $\Gamma \subset U$ eine beliebige geschlossene Kurve. Für jeden Punkt z_0 im Innern des von Γ umschlossenen Gebiets gilt[2]

$$f(z_0) = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot i} \cdot \oint_\Gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz.$$

Beweis: Da f als differenzierbare Funktion auch stetig ist, gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ eine Umgebung U_ϵ von z_0, auf der $|f(z) - f(z_0)| < \epsilon$ gilt. Wir deformieren Γ zu einem (kleinen) Kreis Γ' um z_0, der innerhalb von $U \cap U_\epsilon$ liegt. Dort gilt nach Beispiel 3.12:

$$f(z_0) = \frac{f(z_0)}{2 \cdot \pi \cdot i} \cdot \oint_{\Gamma'} \frac{dz}{z - z_0},$$

also

$$\frac{1}{2 \cdot \pi \cdot i} \cdot \oint_{\Gamma'} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz \; - \; f(z_0) \; = \; \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot i} \cdot \oint_{\Gamma'} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\, dz.$$

Mit der Parametrisierung $z(t) = z_0 + r \cdot e^{2 \cdot \pi \cdot i \cdot t}$, $t \in [0,1]$ des Kreises Γ' folgt

$$\begin{aligned}
\left| \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot i} \cdot \oint_{\Gamma'} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz \; - \; f(z_0) \right| \; &= \; \left| \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot i} \cdot \oint_{\Gamma'} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\, dz \right| \\
&= \; \left| \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot i} \cdot \int_0^1 (f(z) - f(z_0)) \cdot \frac{2 \cdot \pi \cdot i \cdot r \cdot e^{2 \cdot \pi \cdot i \cdot t}}{r \cdot e^{2 \cdot \pi \cdot i \cdot t}}\, dt \right| \\
&\leq \; \int_0^1 \underbrace{|f(z) - f(z_0)|}_{< \epsilon}\, dt < \epsilon.
\end{aligned}$$

Da ϵ beliebig klein gewählt werden kann, muss $f(z_0)$ mit der Cauchyschen Integraldarstellung übereinstimmen.

Q.E.D.

---

[2] Erlaubt man auch geschlossene Kurven Γ, die sich selbst schneiden, so modifiziert sich diese Aussage zu

$$\frac{1}{2 \cdot \pi \cdot i} \cdot \oint_\Gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz = \text{Windungszahl}(z_0) \cdot f(z_0).$$

Bemerkung 3.21: *Für eine komplex differenzierbare Funktion sind die Funktionswerte im Innern eines Gebietes bereits eindeutig durch die Funktionswerte auf dem Rand des Gebietes festgelegt und durch die Cauchysche Integraldarstellung des letzten Satzes recht explizit per Integration konstruierbar. In Bemerkung 3.6 hatten wir gesehen, dass Real- und Imaginärteil u, v einer differenzierbaren Funktion der Laplace–Gleichung*

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad v_{xx} + v_{yy} = 0$$

genügen. In der Tat ist die Lösung der Laplace–Gleichung innerhalb eines Gebietes durch Vorgabe von Werten auf dem Rand eindeutig bestimmt.

3.4 Potenzreihen

$\boxed{\downarrow 31.1.03}$

Wir sammeln die grundsätzlichen Tatsachen über Potenzreihen und verallgemeinern die (aus dem Reellen bereits bekannten) Aussagen auf die komplexe Ebene.

Definition 3.22: (Komplexe Potenzreihen)

Eine **„Potenzreihe um den Punkt** $z_0 \in \mathbb{C}$**"** *ist eine Reihe der Form*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (z - z_0)^k, \quad a_k, z, z_0 \in \mathbb{C}.$$

Dort, wo die Reihe konvergiert, definiert sie eine Funktion von z, deren Eigenschaften untersucht werden sollen.

Satz 3.23: (Konvergenz von Potenzreihen)

Zur Potenzreihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (z - z_0)^k$ *existiert ein* $r \geq 0$ *(der* **„Konvergenzradius"***), so dass*

a) die Reihe für alle z *mit* $|z - z_0| < r$ **absolut** *konvergiert,*

b) die Reihe für kein z *mit* $|z - z_0| > r$ *konvergiert.*

Beweis: Gibt es einen Punkt Z, in dem die Reihe $\sum_k a_k \cdot (Z - z_0)^k$ konvergiert, so bildet $a_k \cdot (Z - z_0)^k$ eine Nullfolge. Es gilt also $|a_k \cdot (Z - z_0)^k| \leq 1$ für hinreichend grosses $k \geq k_0$. Mit

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} |a_k \cdot (z - z_0)^k| = \sum_{k=k_0}^{\infty} \underbrace{|a_k \cdot (Z - z_0)^k|}_{\leq 1} \cdot \left| \frac{z - z_0}{Z - z_0} \right|^k$$

ist also für jedes z mit $|z - z_0| < |Z - z_0|$ die geometrische Reihe $\sum_k |\frac{z-z_0}{Z-z_0}|^k$ eine konvergente Majorante, d.h., $\sum_k a_k \cdot (z - z_0)^k$ konvergiert absolut. Damit ist

$$r = \sup\Big\{|Z|;\ \ \sum_k a_k \cdot (Z - z_0)^k \text{ konvergiert } \Big\}.$$

Für jedes z mit $|z - z_0| > r$ muss die Reihe nach dieser Konstruktion von r divergieren.

Q.E.D.

Bemerkung 3.24: *Der Konvergenzbereich einer Potenzreihe besteht also prinzipiell aus einer Kreisscheibe um den Entwicklungspunkt z_0. Der Radius r kann allerdings 0 sein (d.h., die Potenzreihe konvergiert nur am Punkt $z = z_0$). Im Folgenden interessieren natürlich nur Potenzreihen mit einem Konvergenzradius $r > 0$. Über den Rand des Konvergenzkreises $\{z; |z - z_0| = r\}$ kann man keine allgemeine Aussagen machen. In folgendem Beispiel konvergiert die Reihe für keinen der Randpunkte:*

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k \quad (\textit{Konvergenz für } |z| < r = 1.)$$

Im folgenden Beispiel konvergiert die Reihe für alle Randpunkte:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k^2} \quad (\textit{Konvergenz für } |z| \leq r = 1.)$$

Beispiel 3.25: Die geometrische Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z}$$

hat den Konvergenzradius 1. Die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot z^{2\cdot k} = \sum_{k=0}^{\infty} (-z^2)^k = \frac{1}{1-(-z^2)} = \frac{1}{1+z^2}$$

hat ebenfalls den Konvergenzradius 1.

Satz 3.26: (Potenzreihen stellen analytische Funktionen dar)

Auf dem Inneren des Konvergenzkreises $\{z; |z - z_0| < r\}$ einer Potenzreihe mit Konvergenzradius $r > 0$ stellt

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (z - z_0)^k$$

eine unendlich oft differenzierbare Funktion dar. Es gilt

$$\frac{d^n}{dz^n}\, f(z) = \sum_{k=n}^{\infty} a_k \cdot k \cdot (k-1) \cdot \ldots \cdot (k-n+1) \cdot (z-z_0)^{k-n},$$

d.h., die Potenzreihe kann gliedweise differenziert werden (die abgeleiteten Reihen haben wieder den Konvergenzradius r). Speziell gilt $a_k = f^{(k)}(z_0)/k!$.

Beweis: Für die Potenzreihe ist der Differenzquotient

$$\frac{f(z+h)-f(z)}{h} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot \frac{(z+h-z_0)^k - (z-z_0)^k}{h}.$$

Mit der Binomialentwicklung

$$\frac{(z+h-z_0)^k - (z-z_0)^k}{h} = \frac{1}{h} \cdot \sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j} \cdot h^j \cdot (z-z_0)^{k-j}$$

$$= k \cdot (z-z_0)^{k-1} + h \cdot \sum_{j=2}^{k} \binom{k}{j} \cdot h^{j-2} \cdot (z-z_0)^{k-j}$$

folgt

$$\frac{f(z+h)-f(z)}{h} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot k \cdot (z-z_0)^{k-1} + h \cdot \underbrace{\sum_{k=2}^{\infty} \sum_{j=2}^{k} a_k \cdot \binom{k}{j} \cdot h^{j-2} \cdot (z-z_0)^{k-j}}_{g(h)}.$$

Die die Funktion $g(h)$ definierende Reihe ist dabei wohldefiniert, da die linke Seite der Gleichung für hinreichend kleines h definiert ist ($z+h$ muss im Konvergenzkreis von $f(z)$ liegen) und die Reihe $\sum_k a_k \cdot k \cdot (z-z_0)^{k-1}$ konvergiert. Damit folgt

$$f'(z) = \lim_{h\to 0} \frac{f(z+h)-f(z)}{h} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot k \cdot (z-z_0)^{k-1} + \lim_{h\to 0} O(h)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot k \cdot (z-z_0)^{k-1}.$$

Damit ist gezeigt, dass die Potenzreihe einmal differenzierbar ist. Die Ableitung ist wieder als Potenzreihe dargestellt. Die höheren Ableitungen folgen nun sofort per Induktion nach der Ableitungsordnung.

Q.E.D.

Beispiel 3.27: Die in Beispiel 3.2 angegebenen Funktionen

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}, \quad \sin(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot z^{2\cdot k+1}}{(2\cdot k+1)!}, \quad \cos(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot z^{2\cdot k}}{(2\cdot k)!}$$

haben den Konvergenzradius $r = \infty$ und sind damit auf ganz $\mathbb{C}$ differenzierbar. Aus diesen Darstellungen erhält man sofort:

$$\frac{d}{dz}\, e^z = e^z, \quad \frac{d}{dz}\, \sin(z) = \cos(z), \quad \frac{d}{dz}\, \cos(z) = -\sin(z).$$

Nach diesen Vorbereitungen sind wir nun in der Lage, den zentralen Satz über die Taylor–Entwickelbarkeit komplex differenzierbarer Funktionen zu beweisen. Er basiert auf der Integraldarstellung durch die Cauchy–Formel 3.20:

Satz 3.28: (Der Potenzreihenentwicklungssatz)

Sei $f(z)$ auf einem Gebiet komplex differenzierbar. Sei z_0 ein beliebiger Punkt im Inneren des Gebiets. Die Funktion $f(z)$ ist unendlich oft differenzierbar bei z_0 und wird auf einer Umgebung von z_0 durch die Taylor–Reihe

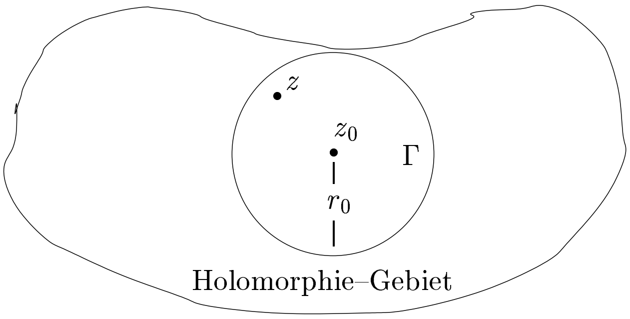
$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} \cdot (z - z_0)^k$$

dargestellt, wobei gilt:

$$f^{(k)}(z_0) = \frac{k!}{2\cdot\pi\cdot i} \cdot \oint_\Gamma \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{k+1}}\, d\xi.$$

Hierbei ist Γ eine beliebige im Holomorphie–Gebiet liegende geschlossene Kurve um z_0 herum.

Beweis: Sei z ein Punkt im Inneren des Gebietes, so dass der Kreis um z_0 mit Radius $|z - z_0|$ vollständig im Inneren des Gebiets liegt. Betrachte einen etwas größeren Kreis Γ vom Radius r_0 um z_0, der z enthält, aber immer noch vollständig im Holomorphie–Gebiet liegt:



Es gilt die Cauchy–Formel 3.20:

$$f(z) = \frac{1}{2\cdot\pi\cdot i}\cdot\oint_\Gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z}\,d\xi = \frac{1}{2\cdot\pi\cdot i}\cdot\oint_\Gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z_0 - (z - z_0)}\,d\xi$$
$$= \frac{1}{2\cdot\pi\cdot i}\cdot\oint_\Gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z_0}\cdot\frac{1}{1 - \frac{z-z_0}{\xi-z_0}}\,d\xi.$$

Es gilt $|z-z_0| < |\xi-z_0| = r_0$ für alle $\xi\in\Gamma$. Die Entwicklung in eine geometrische Reihe liefert damit

$$f(z) = \frac{1}{2\cdot\pi\cdot i}\cdot\oint_\Gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z_0}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\Big(\frac{z-z_0}{\xi-z_0}\Big)^k\,d\xi.$$

Da die geometrische Reihe absolut konvergiert und $f(\xi)/(\xi-z_0)$ eine gleichmäßig stetige Funktion in ξ ist, kann Summation und Integration getrost vertauscht werden:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\Big(\frac{1}{2\cdot\pi\cdot i}\cdot\oint_\Gamma \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{k+1}}\,d\xi\Big)\cdot(z-z_0)^k.$$

Damit ist $f(z)$ durch eine konvergente Potenzreihe um z_0 dargestellt, deren Konvergenzradius mindestens r_0 ist. Potenzreihen sind aber in ihrem Konvergenzkreis automatisch beliebig of differenzierbar und stimmen mit ihrer Taylor–Reihe um den Mittelpunkt überein. Damit gilt

$$\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} = \frac{1}{2\cdot\pi\cdot i}\cdot\oint_\Gamma \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{k+1}}\,d\xi.$$

Hierbei kann der Kreis Γ zu einer beliebigen Kurve um z_0 deformiert werden.

Q.E.D.

Bemerkung 3.29: *Wähle Γ im Beweis des Potenzreihenentwicklungssatzes 3.28 als den größten Kreis um z_0, der noch im Holomorphie-Gebiet von f liegt. Für alle Punkte z innerhalb dieses Kreises wird $f(z)$ durch die Taylor–Reihe um z_0 dargestellt. Der Konvergenzkreis der Taylor–Reihe reicht also auf jeden Fall bis zum Rand des Gebietes.*
In einer Situation, wo die Funktion $f(z)$ auf ganz $\mathbb{C}$ bis auf endliche viele Singularitätspunkte analytisch ist, ist der Konvergenzradius der Taylor–Reihe um z_0 damit durch den Abstand zwischen z_0 und der nächstgelegenen Singularität gegeben. Beispiel: die Reihe

$$\frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{1-(-z^2)} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\cdot z^{2\cdot k}$$

um $z_0 = 0$ hat den Konvergenzradius 1. Er ist gegeben durch den Abstand der Singularitäten $z = \pm i$ vom Nullpunkt.

Bemerkung 3.30: *Die Formel*

$$f^{(k)}(z_0) = \frac{k!}{2 \cdot \pi \cdot i} \cdot \oint_\Gamma \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{k+1}}\, d\xi$$

ist leicht zu merken: sie entsteht mit

$$\frac{d}{dz_0} \oint_\Gamma \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^j}\, d\xi = j \cdot \oint_\Gamma \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{j+1}}\, d\xi, \quad j = 1, \ldots, k$$

durch formales Ableiten der Cauchyschen Integraldarstellung

$$f(z_0) = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot i} \cdot \oint_\Gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z_0}\, d\xi.$$

Bemerkung 3.31: *Eine der zentralen Aussagen über Polynome ist der* **Hauptsatz der Algebra***:*

> *Jedes Polynom $P(z) = a_n \cdot z^n + a_n \cdot z^{n-1} + \cdots + a_0$ mit $a_n \neq 0$, $n > 0$ hat genau n komplexe Nullstellen $z_1, \ldots, z_n$:*
>
> $$P(z) = a_n \cdot (z - z_1) \cdot (z - z_2) \cdot \ldots \cdot (z - z_n).$$
>
> *Hierbei können einige der Wurzeln z_k übereinstimmen („mehrfache Nullstellen“).*

Ohne die Hilfsmittel der komplexen Funktionentheorie ist der Beweis dieser Aussage aufwendig. Mit den Vorbereitungen dieses Kapitels kann der Beweis als einfache Übungsaufgabe gestellt werden `;-)`*. Siehe Aufgabe 59.*

3.5 Der Residuenkalkül

Als eine wichtige Anwendung der komplexen Funktionentheorie soll hier der **„Residuenkalkül“** vorgestellt werden. Es geht darum, ein (in der Regel) reelles Integral

$$\int_a^b g(x)\, dx$$

als (Teil eines) komplexen Konturintegrals zu identifizieren. Durch Deformation des komplexen Wegs auf eine möglichst einfache Form gelingt es dann oft, den Wert des Integrals zu ermitteln. Dies ermöglicht die Berechnung vieler bestimmter Integrale für bestimmte Werte der Grenzen a, b auch ohne eine explizite Darstellung der Stammfunktion des Integranden. Typische Anwendungen sind Fourier–Transformationen

$$\mathcal{F}[f](k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot e^{i \cdot k \cdot x}\, dx$$

oder auch die Laplace–Transformationen

$$\mathcal{L}[f](s) = \int_0^\infty f(x) \cdot e^{-s \cdot x}\, dx$$

des nächsten Kapitels. In vielen Fällen ist der Integrand überall in der komplexen Ebene analytisch bis auf endliche viele Singularitäten (Polstellen). Die einfachste Form, auf die ein komplexes Kurvenintegral längs einer geschlossenen Kurve mit einem solchen Integranden zurückgeführt werden kann, besteht aus einer Summe von Integralen über kleine Kreise um die Singularitäten (den **„Residuen“**).

Definition 3.32: (Isolierte Singularitäten und Residuen) $\boxed{\downarrow 5.2.03}$

a) *Ein Punkt $z_0 \in \mathbb{C}$ heißt* **“isolierte Singularität“** *einer Funktion $f(z)$, wenn es eine Umgebung U von z_0 gibt, so dass $f(z)$ auf $U \setminus \{z_0\}$ analytisch ist.*

b) *Eine Funktion $f(z)$, die auf ganz $\mathbb{C}$ bis auf endlich viele isolierte Singularitäten analytisch ist, heißt* **„meromorph“**.

c) *Das* **“Residuum“** *einer meromorphen Funktion $f(z)$ an einer isolierten Singularität z_0 ist*

$$\mathrm{Res}_f(z_0) = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot i} \cdot \oint_\Gamma f(z)\, dz,$$

wobei Γ ein (kleiner) Kreis um z_0 herum ist, der außer z_0 keine weiteren Singularitäten von $f(z)$ umfasst.

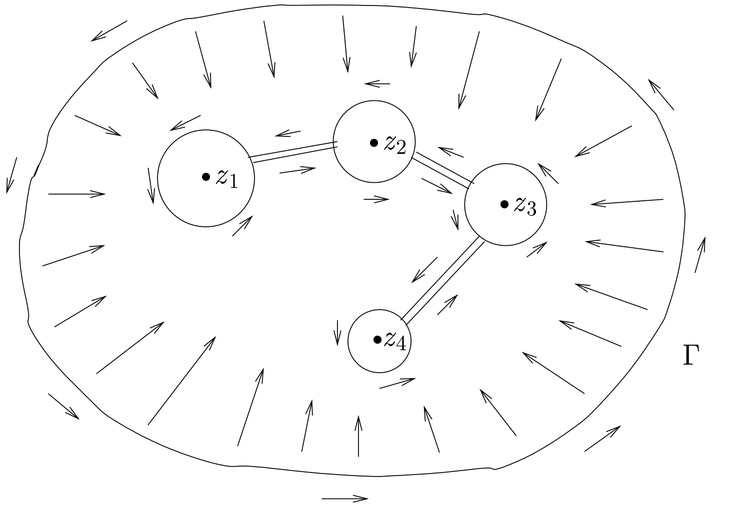
Satz 3.33: (Der Residuensatz)

Sei $f(z)$ eine meromorphe Funktion. Sei Γ eine geschlossene Kurve, die durch keine der Singularitäten von $f(z)$ führt. Dann gilt

$$\oint_\Gamma f(z)\, dz = 2 \cdot \pi \cdot i \cdot \textstyle\sum_k \mathrm{Res}_f(z_k),$$

wobei sich diese Summe über alle isolierten Singularitäten z_k von $f(z)$ erstreckt, die von Γ eingeschlossen werden.

Beweis: Mit dem Deformationsprinzip 3.17 kann die Kurve Γ zu Kreisen um die umfassten Singularitäten deformiert werden. Dies liefert die Residuen. Die Verbindungskurven zwischen den Kreisen werden jeweils zweimal in unterschiedlichen Richtungen durchlaufen und tragen daher zum Gesamtintegral nicht bei:



Q.E.D.

Bemerkung 3.34: *Komplexe Kurvenintegrale sind bei geschlossenen Kurven also vollständig durch die Singularitäten des Integranden bestimmt, auch wenn diese weit von der Kurve entfernt liegen, über die integriert wird.*

Bemerkung 3.35: *Oft handelt es sich bei den betrachteten Singularitäten um Polstellen, deren Ordnung man kennt. In diesem Fall kann man die Residuen elementar berechnen, ohne eine Integration (über einen kleinen Kreis um die Polstelle) ausführen zu müssen. Ein Punkt z_0 heißt dabei* **„Pol höchstens k–ter Ordnung“** *von $f(z)$, wenn*

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^k}$$

mit einer bei $z = z_0$ analytischen Funktion $g(z)$ gilt. Die Polordnung ist genau k, wenn zusätzlich $g(z_0) \neq 0$ gilt:

$$f(z) \approx \frac{g(z_0)}{(z - z_0)^k} \quad \text{für} \quad z \approx z_0 .$$

An Polen höchstens k–ter Ordnung berechnet sich das Residuum durch:

$$\mathrm{Res}_f(z_0) = \frac{g^{(k-1)}(z_0)}{(k-1)!} = \frac{1}{(k-1)!} \cdot \left(\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \Big((z - z_0)^k \cdot f(z) \Big) \right)_{|z=z_0} .$$

Beweis: *Taylor–Entwicklung* $g(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{g^{(j)}(z_0)}{j!} \cdot (z - z_0)^j$ *um* z_0 *liefert*

$$f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{g^{(j)}(z_0)}{j!} \cdot (z - z_0)^{j-k}.$$

Es folgt

$$\mathrm{Res}_f(z_0) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{g^{(j)}(z_0)}{j!} \cdot \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot i} \cdot \oint \frac{dz}{(z - z_0)^{k-j}} = \frac{g^{(k-1)}(z_0)}{(k-1)!},$$

denn mit Beispiel 3.12.b) verschwinden in der Summe alle Terme außer dem mit $k - j = 1$.

Beispiel 3.36: Die Funktion $f(z) = e^z/z^2$ ist meromorph mit einem einzigen Pol zweiter Ordnung an der Stelle $z = 0$. Mit $g(z) = e^z$, $k = 2$ folgt

$$\mathrm{Res}_f(0) = \frac{g^{(k-1)}(0)}{(k-1)!} = g'(0) = e^0 = 1.$$

Damit gilt

$$\oint_\Gamma \frac{e^z}{z^2}\, dz = 2 \cdot \pi \cdot i \cdot \mathrm{Res}_f(0) = 2 \cdot \pi \cdot i$$

für jede geschlossene Kurve, die den Nullpunkt umschließt.

Bemerkung 3.37: *An einer Polstelle* $f(z) = g(z)/(z - z_0)^k$ *höchstens* k*–ter Ordnung erhält man durch Taylor–Entwicklung des bei* z_0 *analytischen Nenners* $g(z)$ *eine Entwicklung der Form*

$$f(z) = \frac{c_{-k}}{(z - z_0)^k} + \frac{c_{1-k}}{(z - z_0)^{k-1}} + \cdots + \frac{c_{-1}}{z - z_0} + c_0 + c_1 \cdot (z - z_0) + \cdots,$$

in der neben polynomialen Anteilen auch negative Potenzen von $z - z_0$ *auftauchen. Man nennt diese Entwicklung eine* **„Laurent–Reihe um den Entwicklungspunkt** z_0**“**. *Mit Beispiel 3.12.b) gilt*

$$\mathrm{Res}_f(z_0) = c_{-1}.$$

Mit diesen Vorbereitungen kann man viele komplexe Wegintegrale auf Residuen zurückführen, welche nach den obigen Überlegungen meist leicht ohne Integration zu berechnen sind. Es gibt einige Standardsituationen, in denen man (anwendungsrelevante) reelle Integrale als komplexe Integrale über gewisse Standardwege interpretieren und dann leicht über den Residuensatz 3.33 auswerten kann:

Satz 3.38: (Integrale vom Typ $\int_{-\infty}^{\infty} r(x)\,dx$)

Sei $r(x)$ eine rationale Funktion, die längs der reellen Achse für $x \to \pm\infty$ mindestens wie $O(1/x^2)$ abfällt und auf der reellen Achse keine Pole hat. Dann gilt

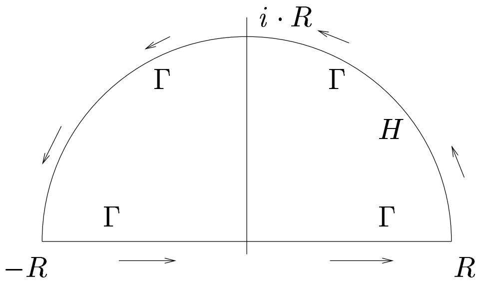
$$\int_{-\infty}^{\infty} r(x)\,dx = 2 \cdot \pi \cdot i \cdot \textstyle\sum_k \mathrm{Res}_r(z_k),$$

wobei sich diese Summe über die Polstellen $z_k \in \mathbb{C}$ von $r(z)$ erstreckt, die in der oberen Halbebene liegen ($\Im(z_k) > 0$).

Beweis: Wir betrachten

$$\int_{-\infty}^{\infty} r(x)\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} r(x)\,dx$$

als Teil des komplexen Wegintegrals über die folgende geschlossene Kontur Γ:



Wir parametrisieren den Halbkreis H von $R \in \mathbb{R}$ nach $-R \in \mathbb{R}$ durch $z(t) = R \cdot e^{i\cdot t}$, $t \in [0, \pi]$ und erhalten

$$\int_{-R}^{R} {}_{H}\, r(z)\,dz = \int_0^{\pi} r\Big(R \cdot e^{i\cdot t}\Big) \cdot \underbrace{i \cdot R \cdot e^{i\cdot t}}_{\frac{dz(t)}{dt}}\, dt.$$

Die Forderung, dass $r(x)$ im Unendlichen mindestens wie $O(1/x^2)$ abfallen soll, läuft darauf hinaus, dass der Nennergrad des rationalen Ausdrucks mindestens um 2 größer ist als der Zählergrad. Damit gilt dieses Abfallverhalten überall in der komplexen Ebene:

$$|r(R \cdot e^{i\cdot t})| = O\Big(\frac{1}{R^2}\Big).$$

Es folgt

$$\Big| \int_{-R}^{R} {}_{H}\, r(z)\,dz \Big| \leq \int_0^{\pi} \Big| r\Big(R \cdot e^{i\cdot t}\Big)\Big| \cdot R \cdot dt = O\Big(\frac{1}{R}\Big) \quad \overset{(R\to\infty)}{\longrightarrow} \quad 0.$$

Damit gilt $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} r(x)\,dx = \lim_{R\to\infty} \oint_{\Gamma} r(z)\,dz$ und der Residuensatz 3.33 für $\oint_{\Gamma} r(z)\,dz$ liefert sofort als Ergebnis die Residuensumme.

Q.E.D.

Satz 3.39: (Fourier–Integrale vom Typ $\int_{-\infty}^{\infty} r(x)\cdot e^{i\cdot k\cdot x}\,dx$)

Sei $r(x)$ eine rationale Funktion, die längs der reellen Achse für $x \to \pm\infty$ gegen 0 konvergiert und auf der reellen Achse keine Pole hat. Für $k \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ gilt[3]*:*

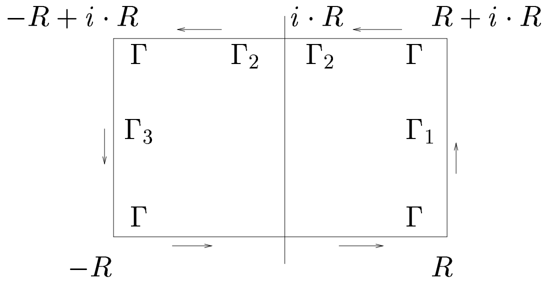
$$\int_{-\infty}^{\infty} r(x)\cdot e^{i\cdot k\cdot x}\,dx = \frac{2\cdot\pi\cdot i}{|k|}\cdot\sum_j \mathrm{Res}_f(z_j) \quad \mathit{mit} \quad f(z) = r\Big(\frac{z}{k}\Big)\cdot e^{i\cdot z},$$

wobei sich diese Summe über die Polstellen $z_j \in \mathbb{C}$ von $f(z)$ erstreckt, die in der oberen Halbebene liegen. Für $k > 0$ sind dies die Polstellen von $r(z)$ in der oberen Halbebene, bzw. für $k < 0$ sind es die Polstellen von $r(z)$ in der unteren Halbebene.

Beweis: Mit der Substitution $y = k\cdot x$ erhält man

$$\int_{-\infty}^{\infty} r(x)\cdot e^{i\cdot k\cdot x}\,dx = \int_{-\mathrm{sign}(k)\cdot\infty}^{\mathrm{sign}(k)\cdot\infty} r\Big(\frac{y}{k}\Big)\cdot e^{i\cdot y}\,\frac{dy}{k} = \frac{1}{|k|}\cdot\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\,dy.$$

Da wir hier etwas schwächere Abfallbedingungen für r haben, benutzen wir aus technischen Gründen eine etwas andere Kontur als im Beweis von Satz 3.38:



Es ist wiederum zu zeigen, daß im Grenzwert $R \to \infty$ die „störenden“ Wegintegrale über die Teilstücke Γ_1, Γ_2, Γ_3 verschwinden und das zu bestimmnde Integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\,dy$ nichts anderes ist als das gesamte Wegintegral $\oint_\Gamma f(z)\,dz$, das über den Residuensatz ausgewertet werden kann.

Der Weg Γ_1 von R nach $R + i\cdot R$ wird durch $z(t) = R + i\cdot t$, $t \in [0, R]$ parametrisiert:

$$\int_{R\;\Gamma_1}^{R+i\cdot R} f(z)\,dz = \int_0^R r\Big(\frac{R+i\cdot t}{k}\Big)\cdot e^{i\cdot(R+i\cdot t)}\,dt \overset{(*)}{=} e^{i\cdot R}\cdot\int_0^R O\Big(\frac{1}{R}\Big)\cdot e^{-t}\,dt$$

$$= e^{i\cdot R}\cdot O\Big(\frac{1}{R}\Big)\cdot\int_0^R e^{-t}\,dt = e^{i\cdot R}\cdot O\Big(\frac{1}{R}\Big)\cdot(1-e^{-R}) \quad \overset{R\to\infty}{\longrightarrow} \quad 0.$$

[3] Für $k = 0$ muss man für die Existenz des Integrals noch fordern, daß $r(x)$ im Unendlichen mindestens wie $O(1/x^2)$ abfällt. Dann hat man den vorigen Satz.

Man beachte in $(*)$, daß $r(z)$ mindestens wie $O(1/|z|)$ im Unendlichen abfallen soll und somit $r((R+i\cdot t)/k) = O(1/R)$ gilt.

Der Weg Γ_3 von $-R+i\cdot R$ nach $-R$ wird durch $z(t) = -R+i\cdot(R-t)$, $t \in [0,R]$ parametrisiert:

$$\begin{aligned}
\int_{-R+i\cdot R}^{-R}{}_{\Gamma_3} f(z)\,dz &= \int_0^R \underbrace{r\Big(\frac{-R+i\cdot(R-t)}{k}\Big)} \cdot e^{i\cdot(-R+i\cdot(R-t))}\,dt \\
&= e^{-i\cdot R}\cdot \int_0^R \overbrace{O\Big(\frac{1}{R}\Big)} \cdot e^{-(R-t)}\,dt \\
&= e^{-i\cdot R}\cdot O\Big(\frac{1}{R}\Big)\cdot \int_0^R e^{-(R-t)}\,dt \\
&= e^{-i\cdot R}\cdot O\Big(\frac{1}{R}\Big)\cdot(1-e^{-R}) \quad \overset{R\to\infty}{\longrightarrow} \quad 0.
\end{aligned}$$

Der Weg Γ_2 von $R+i\cdot R$ nach $-R+i\cdot R$ wird durch $z(t) = R-t+i\cdot R$, $t \in [0, 2\cdot R]$ parametrisiert:

$$\begin{aligned}
\int_{R+i\cdot R}^{-R+i\cdot R}{}_{\Gamma_2} f(z)\,dz &= \int_0^{2\cdot R} \underbrace{r\Big(\frac{R-t+i\cdot R}{k}\Big)} \cdot e^{i\cdot(R-t+i\cdot R)}\,dt \\
&= e^{-R}\cdot \int_0^{2\cdot R} \overbrace{O\Big(\frac{1}{R}\Big)} \cdot e^{i\cdot(R-t)}\,dt \\
&= e^{-R}\cdot O(1) \quad \overset{R\to\infty}{\longrightarrow} \quad 0.
\end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir mit

$$\oint_\Gamma f(z)\,dz = \int_{-R}^R f(y)\,dy + \int_{\Gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\Gamma_2} f(z)\,dz + \int_{\Gamma_3} f(z)\,dz$$

im Grenzwert $R\to\infty$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\,dy = \lim_{R\to\infty} \oint_\Gamma f(z)\,dz.$$

Der Residuensatz 3.33 für $\oint_\Gamma f(z)\,dz$ liefert sofort als Ergebnis die Residuensumme.

Q.E.D.

Satz 3.40: (Trigonometrische Integrale vom Typ $\int_0^{2\cdot\pi} r(\cos(t), \sin(t))\, dt$)
Sei $r(x, y)$ eine rationale Funktion in x und y, die für $r(\cos(t), \sin(t))$ mit $t \in [0, 2\cdot\pi]$ keine Singularitäten hat. Dann gilt:

$$\int_0^{2\cdot\pi} r\Big(\cos(t), \sin(t)\Big)\, dt = 2\cdot\pi\cdot i\cdot \textstyle\sum_k \mathrm{Res}_f(z_k)$$

mit

$$f(z) = \frac{1}{i\cdot z}\cdot r\left(\frac{1}{2}\cdot\Big(z+\frac{1}{z}\Big), \frac{1}{2\cdot i}\cdot\Big(z-\frac{1}{z}\Big)\right),$$

wobei sich diese Summe über die Polstellen $z_k \in \mathbb{C}$ von $f(z)$ erstreckt, die im Inneren des Einheitskreises liegen.

Beweis: Betrachte als Kontur Γ den Einheitskreis um den Ursprung. Mit der Standardparametrisierung $z(t) = e^{i\cdot t}$, $t \in [0, 2\cdot\pi]$ folgt

$$\oint_\Gamma f(z)\, dz = \int_0^{2\cdot\pi} \underbrace{\frac{1}{i\cdot e^{i\cdot t}}\cdot r\Big(\overbrace{\frac{1}{2}\cdot(e^{i\cdot t}+e^{-i\cdot t})}^{\cos(t)}, \overbrace{\frac{1}{2\cdot i}\cdot(e^{i\cdot t}-e^{-i\cdot t})}^{\sin(t)}\Big)}_{f(z(t))}\cdot \underbrace{i\cdot e^{i\cdot t}}_{\frac{dz(t)}{dt}}\, dt$$

$$= \int_0^{2\cdot\pi} r\Big(\cos(t), \sin(t)\Big)\, dt.$$

Der Residuensatz 3.33 für $\oint_\Gamma f(z)\, dz$ liefert sofort als Ergebnis die Residuensumme.

Q.E.D.

Beispiel 3.41: Einige Beispiele sind in der Musterlösung von Blatt 14 ausgeführt.
