

## Kapitel 2

# Sturm–Liouville–Probleme

Die Fourier–Entwicklungen des ersten Kapitels sind nur ein spezielles Beispiel einer allgemeineren Struktur: Entwicklung nach den Eigenfunktionen von Operatoren. Zur Erinnerung an den endlich–dimensionalen Fall: Eine symmetrische (bzw. hermitesche) Matrix  $n \times n$ –Matrix hat nur reelle Eigenwerte und stets eine vollständige Basis von Eigenvektoren, die den  $\mathbb{R}^n$  (bzw.  $\mathbb{C}^n$ ) aufspannen. Symmetrie (= Selbstadjungiertheit) ist dabei eine wesentliche Eigenschaft.

### 2.1 Das Eigenwertproblem

Wir erinnern an das Konzept 1.90 des adjungierten Operators bzw. der Selbstadjungiertheit, wobei wir nun speziell die gewichteten  $L_{2w}$ –Räume 1.12 betrachten:

Der „adjungierte“ („transponierte“) Operator  $A^*$  eines linearen Operators  $A : L_{2w}([a, b]) \rightarrow L_{2w}([a, b])$  ist definiert durch

$$\langle A^* \phi, \psi \rangle_w = \langle \phi, A \psi \rangle_w$$

für alle  $\phi, \psi \in L_{2w}([a, b])$ . Ein Operator mit  $A = A^*$  heißt „selbstadjungiert“.

#### Bezeichnung 2.1:

Für das Skalarprodukt  $\int_a^b w(x) \cdot \overline{\phi(x)} \cdot \psi(x) dx$  mit nichttrivialelem Gewicht  $w \neq 1$  benutzen wir nun das Symbol  $\langle \phi, \psi \rangle_w$ . Für  $w \equiv 1$  benutzen wir  $\langle \phi, \psi \rangle$ .

---

**Beispiel 2.2:** Betrachte die Gewichtsfunktion  $w(x) = 1$ . Auf dem Unterraum

$$L_2^{(0)}([a, b]) = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}; f \text{ ist 2-fach stetig diff'bar; } f(a) = 0, f(b) = 0, \int_a^b |f(x)|^2 dx < \infty\}$$

des  $L_2([a, b])$  ist der Operator

$$L = -\frac{d^2}{dx^2}$$

selbstadjungiert:

$$\langle \phi, L\psi \rangle = -\int_a^b \overline{\phi(x)} \cdot \psi''(x) dx = -\left[ \overline{\phi(x)} \cdot \psi'(x) \right]_{x=a}^{x=b} + \int_a^b \overline{\phi'(x)} \cdot \psi'(x) dx,$$

$$\langle L\phi, \psi \rangle = -\int_a^b \overline{\phi''(x)} \cdot \psi(x) dx = -\left[ \overline{\phi'(x)} \cdot \psi(x) \right]_{x=a}^{x=b} + \int_a^b \overline{\phi'(x)} \cdot \psi'(x) dx,$$

Diese Werte stimmen überein, denn die Randterme verschwinden auf  $L_2^{(0)}$ .

---

**Definition 2.3:**

Sei  $L$  ein auf einem geeigneten (dichten) Unterraum  $L_{2w}^{(0)}([a, b])$  des  $L_{2w}([a, b])$  definierter Operator. Eine Funktion  $\psi \in L_{2w}^{(0)}([a, b])$ ,  $\psi \neq 0$ , mit  $L\psi = \lambda \cdot \psi$  heisst „**Eigenvektor**“ oder auch „**Eigenfunktion**“ von  $L$  zum „**Eigenwert**“  $\lambda \in \mathbb{C}$ .

**Satz 2.4:**

Für einen selbstadjungierten Operator auf  $L_{2w}$  gilt:

- a) Alle Eigenwerte sind reell.
- b) Eigenfunktionen zu unterschiedlichen Eigenwerten sind orthogonal.

**Beweis:** a) Aus  $L\psi = \lambda \cdot \psi$  folgt

$$\lambda = \frac{\langle \psi, L\psi \rangle_w}{\langle \psi, \psi \rangle_w} \stackrel{(1)}{=} \frac{\overline{\langle L\psi, \psi \rangle_w}}{\langle \psi, \psi \rangle_w} \stackrel{(2)}{=} \frac{\overline{\langle \psi, L\psi \rangle_w}}{\langle \psi, \psi \rangle_w} = \bar{\lambda}.$$

Hierbei wurde in (1) die Identität  $\langle f, g \rangle_w = \overline{\langle g, f \rangle_w}$  benutzt, in (2) die Selbstadjungiertheit von  $L$ .

b) Sei  $L\phi = \lambda \cdot \phi$ ,  $L\psi = \mu \cdot \psi$  mit  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ :

$$(\lambda - \mu) \cdot \langle \phi, \psi \rangle_w = \langle \lambda \cdot \phi, \psi \rangle_w - \langle \phi, \mu \cdot \psi \rangle_w = \langle L\phi, \psi \rangle_w - \langle \phi, L\psi \rangle_w = 0.$$

Für  $\lambda \neq \mu$  folgt  $\langle \phi, \psi \rangle_w = 0$ .

Q.E.D.

---

**Beispiel 2.5:** Betrachte die triviale Gewichtsfunktion  $w(x) = 1$  und  $L_2([0, 1])$ . Für  $L = -\frac{d}{dx^2}$  auf dem Unterraum

$$L_2^{(0)}([0, 1]) = \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}; f \text{ ist 2-fach stetig diff'bar; } f(0) = 0, f(1) = 0\}$$

folgt (zunächst ohne die Randbedingungen):

$$-\psi''(x) = \lambda \cdot \psi(x) \quad \Rightarrow \quad \psi(x) = \alpha \cdot \sin(\sqrt{\lambda} \cdot x) + \beta \cdot \cos(\sqrt{\lambda} \cdot x).$$

Berücksichtigung der Randbedingungen:

$$\begin{aligned} \psi(0) = 0 &\Rightarrow \beta = 0, \\ \psi(1) = 0 &\Rightarrow \alpha \cdot \sin(\sqrt{\lambda}) = 0 \Rightarrow \sqrt{\lambda} = k \cdot \pi, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

(Beachte hierbei, dass  $\alpha = 0$  völlig uninteressant ist, da dies nur zu den trivialen Lösungen  $\psi(x) = 0$  führen würde.) Da  $k$  und  $-k$  auf die selben Eigenfunktionen führen (bis auf ein Vorzeichen), braucht nur  $k \in \mathbb{N}$  betrachtet zu werden ( $k = 0$  führt zu  $\psi(x) = 0$ ). Ergebnis:

$$\begin{aligned} \text{Eigenwerte:} \quad \lambda_k &= k^2 \cdot \pi^2, \quad k \in \mathbb{N}, \\ \text{Eigenvektoren:} \quad \psi_k(x) &= \sin(k \cdot \pi \cdot x). \end{aligned}$$

Die Orthogonalität der Eigenfunktionen ist leicht explizit überprüft:

$$\int_0^1 \sin(k \cdot \pi \cdot x) \cdot \sin(\tilde{k} \cdot \pi \cdot x) \, dx = \frac{\tilde{k} \cdot \cos(\tilde{k} \cdot \pi) \cdot \sin(k \cdot \pi) - k \cdot \cos(k \cdot \pi) \cdot \sin(\tilde{k} \cdot \pi)}{\pi \cdot (k^2 - \tilde{k}^2)} = 0$$

für  $k, \tilde{k} \in \mathbb{N}$ ,  $k \neq \tilde{k}$ . Eine für die Intuition wichtige Beobachtung:

Die Diskretisierung von Eigenwerten entsteht durch die Randbedingungen.

---

Wir werden nun das Eigenwertproblem zu linearen Differentialoperatoren zweiter Ordnung diskutieren, die auf einem  $L_2$ -Unterraum zweifach differenzierbarer Funktionen mit homogenen Randbedingungen betrachtet werden.

**Satz 2.6:** (Selbstadjungiertheit von Differentialoperatoren)

Es seien  $A(x)$ ,  $B(x)$ ,  $C(x)$  reelle, glatte Funktionen. Der Differentialoperator

$$L = -A(x) \cdot \frac{d^2}{dx^2} - B(x) \cdot \frac{d}{dx} + C(x) :$$

$$\psi(x) \rightarrow -A(x) \cdot \psi''(x) - B(x) \cdot \psi'(x) + C(x) \cdot \psi(x),$$

definiert auf dem Intervall  $[a, b]$  mit den Randbedingungen

$$\alpha_1 \cdot \psi(a) + \alpha_2 \cdot \psi'(a) = 0, \quad \beta_1 \cdot \psi(b) + \beta_2 \cdot \psi'(b) = 0$$

(mit  $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}$ ,  $|\alpha_1| + |\alpha_2| \neq 0$ ,  $|\beta_1| + |\beta_2| \neq 0$ ) ist selbstadjungiert bezüglich des Skalarprodukts  $\langle \phi, \psi \rangle_w = \int_a^b w(x) \cdot \overline{\phi(x)} \cdot \psi(x) dx$  mit der Gewichtsfunktion

$$w(x) = \exp \left( \underbrace{\int^x \frac{B(\xi) - A'(\xi)}{A(\xi)} d\xi}_{\text{Stammfunktion}} \right).$$

Die Eigenwerte von  $L$  sind dementsprechend reell, die Eigenfunktionen sind orthogonal bezüglich dieses Skalarprodukts.

13.12.02↓

**Beweis:** Seien  $\phi$  und  $\psi$  Funktionen, die den Randbedingungen genügen. Es folgt

$$\begin{pmatrix} \overline{\phi(a)} & \overline{\phi'(a)} \\ \overline{\psi(a)} & \overline{\psi'(a)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{\phi(b)} & \overline{\phi'(b)} \\ \overline{\psi(b)} & \overline{\psi'(b)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Da die Vektoren  $(\alpha_1, \alpha_2)$ ,  $(\beta_1, \beta_2)$  nicht verschwinden, müssen die Determinanten<sup>1</sup> der Matrizen verschwinden:

$$\Rightarrow \overline{\phi(a)} \cdot \overline{\psi'(a)} - \overline{\phi'(a)} \cdot \overline{\psi(a)} = \overline{\phi(b)} \cdot \overline{\psi'(b)} - \overline{\phi'(b)} \cdot \overline{\psi(b)} = 0.$$

Es gilt die „Lagrange-Identität“:

$$w \cdot \left( \overline{\phi} \cdot L\psi - \psi \cdot L\overline{\phi} \right) = \frac{d}{dx} \left( -A \cdot w \cdot (\overline{\phi} \cdot \psi' - \overline{\phi}' \cdot \psi) \right),$$

die leicht nachzurechnen ist:

$$\begin{aligned} w \cdot \left( \overline{\phi} \cdot L\psi - \psi \cdot L\overline{\phi} \right) &= w \cdot \left( \overline{\phi} \cdot (-A \cdot \psi'' - B \cdot \psi' + C \cdot \psi) - (-A \cdot \overline{\phi}'' - B \cdot \overline{\phi}' + C \cdot \overline{\phi}) \cdot \psi \right) \\ &= -A \cdot w \cdot (\overline{\phi} \cdot \psi'' - \overline{\phi}'' \cdot \psi) - B \cdot w \cdot (\overline{\phi} \cdot \psi' - \overline{\phi}' \cdot \psi), \\ \frac{d}{dx} \left( -A \cdot w \cdot (\overline{\phi} \cdot \psi' - \overline{\phi}' \cdot \psi) \right) &= - \underbrace{(A \cdot w)'}_{=B \cdot w} \cdot (\overline{\phi} \cdot \psi' - \overline{\phi}' \cdot \psi) - A \cdot w \cdot (\overline{\phi} \cdot \psi'' - \overline{\phi}'' \cdot \psi). \end{aligned}$$

Aus der Definition des Gewichts folgt dabei:

$$w' = \frac{B - A'}{A} \cdot w \quad \Rightarrow \quad A \cdot w' + w \cdot A' = B \cdot w \quad \Rightarrow \quad (A \cdot w)' = B \cdot w.$$

Durch Integration der Lagrange-Identität folgt

$$\langle \phi, L\psi \rangle_w - \langle L\phi, \psi \rangle_w = \int_a^b w \cdot \left( \overline{\phi} \cdot L\psi - \psi \cdot L\overline{\phi} \right) dx$$

<sup>1</sup>Die Determinante  $\overline{\phi(x)} \cdot \psi'(x) - \overline{\phi'(x)} \cdot \psi(x)$  nennt man „die von  $\overline{\phi}$  und  $\psi$  erzeugte **Wronski-Determinante**“.

$$= \int_a^b \frac{d}{dx} \left( -A \cdot w \cdot (\bar{\phi} \cdot \psi' - \bar{\phi}' \cdot \psi) \right) dx = \left[ -A \cdot w \cdot (\bar{\phi} \cdot \psi' - \bar{\phi}' \cdot \psi) \right]_{x=a}^{x=b} = 0,$$

da die Wronski-Determinante an den Rändern verschwindet.

Q.E.D.

**Bemerkung 2.7:** Wir haben den obigen Beweis mit dem komplexen Skalarprodukt  $\langle \phi, \psi \rangle_w = \int w \cdot \bar{\phi} \cdot \psi \, dx$  durchgeführt. Eigentlich könnten wir uns in diesem Kapitel auf reelle Funktionen einschränken und auf die komplexe Konjugation verzichten. Beachte dabei, dass sowohl die Operatoren als auch die Koeffizienten der Randbedingungen durchweg als reell vorausgesetzt werden. Mit einer komplexen Eigenfunktion  $\psi$  ist damit auch  $\Re(\psi)$  und  $\Im(\psi)$  jeweils eine Eigenfunktion. Man kann sich daher o.B.d.A. auf reelle Funktionen einschränken. Wir schleppen die komplexe Schreibweise nur aus Konsistenzgründen zum ersten Kapitel mit.

Durch Multiplikation der Eigenwertgleichung mit dem Gewicht  $w$  läßt sich jede lineare DGL 2-ter Ordnung auf eine spezielle Standardform („Sturm–Liouville-Form“) bringen, in der der Differentialoperator symmetrisch bezüglich des ungewichteten Skalarproduktes ist:

**Satz 2.8:** (Transformation auf Sturm–Liouville-Form)

Die Differentialgleichung

$$\tilde{L}\psi = -A \cdot \psi'' - B \cdot \psi' + C \cdot \psi = \lambda \cdot \psi$$

ist äquivalent zum „verallgemeinerten Eigenwertproblem“

$$L\psi = -(p \cdot \psi')' + q \cdot \psi = \lambda \cdot w \cdot \psi$$

mit

$$w(x) = \exp \left( \underbrace{\int^x \frac{B(\xi) - A'(\xi)}{A(\xi)} \, d\xi}_{\text{Stammfunktion}} \right), \quad p = w \cdot A, \quad q = w \cdot C.$$

**Beweis:** Die Definition des Gewichts liefert:

$$w' = \frac{B - A'}{A} \cdot w \Rightarrow A \cdot w' + w \cdot A' = B \cdot w \Rightarrow (A \cdot w)' = B \cdot w \Rightarrow p' = B \cdot w.$$

In Operatorschreibweise gilt damit

$$\begin{aligned} L - \lambda \cdot w &= -\frac{d}{dx} p \frac{d}{dx} + q - \lambda \cdot w = -p \cdot \frac{d^2}{dx^2} - p' \cdot \frac{d}{dx} + q - \lambda \cdot w \\ &= w \cdot \left( -A \cdot \frac{d^2}{dx^2} - B \cdot \frac{d}{dx} + C - \lambda \right) = w \cdot (\tilde{L} - \lambda). \end{aligned}$$

Q.E.D.

**Bezeichnung 2.9:**

Ein Operator der Form

$$L = -\frac{d}{dx} p \frac{d}{dx} + q$$

wird „**Sturm–Liouville–Operator**“ genannt. Die Eigenwertgleichung

$$L\psi = -(p \cdot \psi')' + q \cdot \psi = \lambda \cdot w \cdot \psi$$

mit glatten reellen Funktionen  $p, q, w$  zusammen mit Randbedingungen der Form

$$\alpha_1 \cdot \psi(a) + \alpha_2 \cdot \psi'(a) = 0, \quad \beta_1 \cdot \psi(b) + \beta_2 \cdot \psi'(b) = 0$$

(mit  $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}$ ,  $|\alpha_1| + |\alpha_2| \neq 0$ ,  $|\beta_1| + |\beta_2| \neq 0$ ) nennt man ein „**reguläres Sturm–Liouville–Problem**“ über dem Intervall  $[a, b]$ , wenn dieses Intervall endlich ist und

$$p(x) > 0 \quad \forall x \in [a, b] \quad \text{sowie} \quad w(x) > 0 \quad \forall x \in [a, b]$$

gilt. Ist das Intervall unendlich oder gilt

$$p(x) > 0 \quad \forall x \in (a, b) \quad \text{und} \quad p(a) = 0 \quad \text{und/oder} \quad p(b) = 0$$

oder verschwindet das Gewicht  $w(x)$  an einigen Punkten oder ersetzt man eine oder beide der Randbedingungen durch

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} \psi(x) \text{ existiert} \quad \text{bzw.} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow b \\ x < b}} \psi(x) \text{ existiert}$$

(oder einer ähnlichen Bedingung), so spricht man von einem „**singulären Sturm–Liouville–Problem**“.

**Bemerkung 2.10:** Ein Sturm–Liouville–Operator  $L = -\frac{d}{dx} p \frac{d}{dx} + q$  ist selbstadjungiert bezüglich des ungewichteten Skalarprodukts  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Der Operator  $\frac{1}{w} \cdot L$  ist selbstadjungiert bezüglich des gewichteten Skalarprodukts  $\langle \cdot, \cdot \rangle_w$ . Mit

$$L\psi = \lambda \cdot w \cdot \psi \quad \iff \quad \frac{1}{w} \cdot L\psi = \lambda \cdot \psi$$

sind die Eigenfunktionen orthogonal bzgl.  $\langle \cdot, \cdot \rangle_w$ .

**Satz 2.11:** (Eigenwerte regulärer Probleme sind einfach)

Zu jedem Eigenwert  $\lambda$  eines regulären Sturm–Liouville–Problems  $L\psi = \lambda \cdot w \cdot \psi$  mit den Randbedingungen

$$\alpha_1 \cdot \psi(a) + \alpha_2 \cdot \psi'(a) = 0, \quad \beta_1 \cdot \psi(b) + \beta_2 \cdot \psi'(b) = 0$$

(mit  $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}$ ,  $|\alpha_1| + |\alpha_2| \neq 0$ ,  $|\beta_1| + |\beta_2| \neq 0$ ) gibt es genau eine Eigenfunktion (bis auf Multiplikation mit einer Konstanten).

**Beweis:** Die Lagrange-Identität aus dem Beweis von Satz 2.6 wird nach Transformation auf Sturm-Liouville-Form zu

$$\bar{\phi} \cdot L\psi - \psi \cdot L\bar{\phi} = \frac{d}{dx} \left( -p \cdot (\bar{\phi} \cdot \psi' - \bar{\phi}' \cdot \psi) \right).$$

Für  $L\phi = \lambda \cdot w \cdot \phi$ ,  $L\psi = \lambda \cdot w \cdot \psi$  folgt, dass das Produkt aus  $p$  und der Wronski-Determinante konstant ist:

$$\frac{d}{dx} \left( p \cdot (\bar{\phi} \cdot \psi' - \bar{\phi}' \cdot \psi) \right) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} p(x) \cdot \left( \bar{\phi}(x) \cdot \psi'(x) - \bar{\phi}'(x) \cdot \psi(x) \right) &= p(a) \cdot \left( \bar{\phi}(a) \cdot \psi'(a) - \bar{\phi}'(a) \cdot \psi(a) \right) \\ &= p(b) \cdot \left( \bar{\phi}(b) \cdot \psi'(b) - \bar{\phi}'(b) \cdot \psi(b) \right). \end{aligned}$$

Die Randbedingungen sorgen dafür, dass die Wronski-Determinante an den Rändern verschwindet; siehe den Beweis von Satz 2.6. Es folgt

$$0 = p \cdot \frac{\bar{\phi} \cdot \psi' - \bar{\phi}' \cdot \psi}{\psi^2} = p \cdot \left( \frac{\bar{\phi}}{\psi} \right)' \quad \Rightarrow \quad \left( \frac{\bar{\phi}}{\psi} \right)' = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{\phi} = \text{const} \cdot \psi.$$

Q.E.D.

**Satz 2.12:** (Beschränkung der Eigenwerte)

Für die Eigenwerte  $\lambda$  des (regulären oder singulären) Sturm-Liouville-Problems

$$L\psi = -(p \cdot \psi')' + q \cdot \psi = \lambda \cdot w \cdot \psi$$

über dem Intervall  $[a, b]$  mit  $p(x) > 0$  und  $w(x) > 0 \forall x \in (a, b)$  und mit einer der speziellen Randbedingungen

$$\psi(a) = 0, \quad \psi(b) = 0 \quad (\text{Dirichletsche Randbedingungen}),$$

oder auch

$$\psi'(a) = 0, \quad \psi'(b) = 0 \quad (\text{Neumannsche Randbedingungen})$$

oder auch  $\psi(a) = 0, \psi'(b) = 0$  oder auch  $\psi'(a) = 0, \psi(b) = 0$  gilt:

$$\lambda \geq \min_{x \in [a, b]} \frac{q(x)}{w(x)}.$$

**Beweis:** Offensichtlich gilt mit der Eigenfunktion  $\psi$ :

$$\frac{\langle \psi, L\psi \rangle}{\langle \psi, \psi \rangle_w} = \frac{\langle \psi, \lambda \cdot w \cdot \psi \rangle}{\langle \psi, \psi \rangle_w} = \lambda.$$

Es gilt (partielle Integration):

$$\begin{aligned} \langle \psi, L \cdot \psi \rangle &= \int_a^b \bar{\psi} \cdot \left( -(p \cdot \psi')' + q \cdot \psi \right) dx \\ &= \left[ -p \cdot \bar{\psi} \cdot \psi' \right]_{x=a}^{x=b} + \int_a^b \left( p \cdot \bar{\psi}' \cdot \psi' + q \cdot \bar{\psi} \cdot \psi \right) dx. \end{aligned}$$

Die Randterme verschwinden wegen der Randbedingungen. Es folgt

$$\lambda = \frac{\langle \psi, L\psi \rangle}{\langle \psi, \psi \rangle_w} = \frac{\int_a^b p \cdot \bar{\psi}' \cdot \psi' dx}{\langle \psi, \psi \rangle_w} + \frac{\int_a^b q \cdot \bar{\psi} \cdot \psi dx}{\int_a^b w \cdot \bar{\psi} \cdot \psi dx} \geq \frac{\int_a^b q \cdot \bar{\psi} \cdot \psi dx}{\int_a^b w \cdot \bar{\psi} \cdot \psi dx}.$$

Mit  $\phi = \sqrt{w} \cdot \psi$  folgt

$$\lambda \geq \frac{\int_a^b \frac{q}{w} \cdot \bar{\phi} \cdot \phi dx}{\int_a^b \bar{\phi} \cdot \phi dx} \geq \frac{\int_a^b \left( \min_{x \in [a,b]} \frac{q(x)}{w(x)} \right) \cdot \bar{\phi}(x) \cdot \phi(x) dx}{\int_a^b \bar{\phi}(x) \cdot \phi(x) dx} = \min_{x \in [a,b]} \frac{q(x)}{w(x)}.$$

Q.E.D.

18.12.02↓

**Beispiel 2.13:** Einige anwendungsrelevante Sturm–Liouville–Probleme:

a) **Sinus–Funktionen**

In Beispiel 2.5 hatten wir das reguläre SL–Problem

$$-\psi''(x) = \lambda \cdot \psi(x)$$

mit

$$[a, b] = [0, 1], \quad p(x) = 1, \quad q(x) = 0, \quad w(x) = 1$$

und den Randbedingungen

$$\psi(0) = 0, \quad \psi(1) = 0$$

betrachtet. Die Eigenwerte wurden zu  $\lambda_k = k^2 \cdot \pi^2$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , bestimmt. Die entsprechenden Eigenfunktionen sind  $\psi_k(x) = \sin(k \cdot \pi \cdot x)$ . Ihre Normierung ist:

$$\langle \psi_k, \psi_{k'} \rangle = \int_0^1 \psi_k(x) \cdot \psi_{k'}(x) dx = \frac{1}{2} \cdot \delta_{kk'}.$$



b) **Legendre–Polynome**

Betrachte das singuläre SL–Problem

$$-\left((1-x^2) \cdot \psi'(x)\right)' = \lambda \cdot \psi(x)$$

mit

$$[a, b] = [-1, 1], \quad p(x) = 1 - x^2, \quad q(x) = 0, \quad w(x) = 1$$

und den Randbedingungen

$$|\psi(-1)| < \infty, \quad |\psi(1)| < \infty.$$

Die Eigenwerte sind  $\lambda_k = k \cdot (k+1)$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ . Die Eigenfunktionen sind Polynome. Sie werden als „**Legendre–Polynome**“  $P_k$  bezeichnet und besitzen die Darstellung

$$P_k(x) = \frac{1}{2^k \cdot k!} \cdot \frac{d^k}{dx^k} (x^2 - 1)^k.$$

In dieser Normierung gilt

$$\langle P_k, P_{k'} \rangle = \int_{-1}^1 P_k(x) \cdot P_{k'}(x) dx = \frac{2}{2 \cdot k + 1} \cdot \delta_{kk'}.$$

Es handelt sich um die bereits in Beispiel 1.17 vorgestellten Polynome.

---

c) **Hermite–Polynome**

Betrachte den quantenmechanischen Harmonischen Oszillator (mit  $\hbar = 1$ ):

$$-\psi''(x) + x^2 \cdot \psi(x) = \lambda \cdot \psi(x). \quad (\#)$$

Es handelt sich hierbei um ein singuläres SL–Problem mit

$$[a, b] = (-\infty, \infty), \quad p(x) = 1, \quad q(x) = x^2, \quad w(x) = 1$$

und den Randbedingungen

$$\psi(-\infty) = 0, \quad \psi(\infty) = 0.$$

Die Eigenwerte sind  $\lambda_k = 2 \cdot k + 1$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ . Die Eigenfunktionen sind

$$\psi_k(x) = H_k(x) \cdot e^{-x^2/2},$$

wo  $H_k$  die „**Hermite–Polynome**“

$$H_k(x) = (-1)^k \cdot e^{x^2} \cdot \frac{d^k}{dx^k} e^{-x^2}$$

sind. Diese sind wiederum die Lösungen des Eigenwertproblems

$$-H''(x) + 2 \cdot x \cdot H'(x) = (\lambda - 1) \cdot H(x),$$

das durch den Ansatz  $\psi(x) = H(x) \cdot e^{-x^2/2}$  aus (#) entsteht. Die Sturm-Liouville-Form dieser Gleichung ist

$$-\left(e^{-x^2} \cdot H'(x)\right)' = (\lambda - 1) \cdot e^{-x^2} \cdot H(x),$$

in der das Gewicht  $e^{-x^2}$  auftaucht. Für die oben eingeführten Eigenfunktionen  $H_k$  gilt die Normierung:

$$\langle H_k, H_{k'} \rangle_w = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \cdot H_k(x) \cdot H_{k'}(x) dx = 2^k \cdot k! \cdot \sqrt{\pi} \cdot \delta_{kk'}.$$

**Bemerkung 2.14:** Wie entstehen die angegebenen Eigenwerte

- b)  $\lambda_k = k \cdot (k + 1)$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$  (Legendre-Polynome),
- c)  $\lambda_k = 2 \cdot k + 1$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$  (Hermite-Polynome)

im letzten Beispiel? Wir zeigen dies nur exemplarisch für den Fall der Hermite-Polynome, welche als Lösung des Eigenwertproblems

$$-H''(x) + 2 \cdot x \cdot H'(x) = \mu \cdot H(x)$$

(mit  $\mu = \lambda - 1$ ) entstehen. Wir lösen diese DGL durch einen Potenzreihenansatz

$$H(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \cdot x^j.$$

Einsetzen in die DGL ergibt

$$-\sum_{j=0}^{\infty} j \cdot (j - 1) \cdot a_j \cdot x^{j-2} + 2 \cdot x \cdot \sum_{j=0}^{\infty} j \cdot a_j \cdot x^{j-1} - \mu \cdot \sum_{j=0}^{\infty} a_j \cdot x^j = 0,$$

also nach Umsummierung  $j \rightarrow j + 2$  der ersten Summe:

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{j=0}^{\infty} (j + 2) \cdot (j + 1) \cdot a_{j+2} \cdot x^j + \sum_{j=0}^{\infty} 2 \cdot j \cdot a_j \cdot x^j - \sum_{j=0}^{\infty} \mu \cdot a_j \cdot x^j \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \underbrace{\left( (j + 2) \cdot (j + 1) \cdot a_{j+2} + 2 \cdot j \cdot a_j - \mu \cdot a_j \right)}_{=0} \cdot x^j. \end{aligned}$$

Es folgt

$$a_{j+2} = \frac{2 \cdot j - \mu}{(j + 2) \cdot (j + 1)} \cdot a_j.$$

Die allgemeine Lösung der DGL ist also durch  $a_0$  und  $a_1$  festgelegt ( $a_0$  bestimmt  $a_2, a_4$  etc.,  $a_1$  bestimmt  $a_3, a_5$  etc.):

$$H(x) = a_0 \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_{2 \cdot j} \cdot x^{2 \cdot j} + a_1 \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_{2 \cdot j+1} \cdot x^{2 \cdot j+1}$$

mit den durch die Rekursion

$$\alpha_{j+2} = \frac{2 \cdot j - \mu}{(j+2) \cdot (j+1)} \cdot \alpha_j, \quad \alpha_0 = 1, \quad \alpha_1 = 1$$

bestimmten Koeffizienten  $\alpha_j = a_j/a_0$  ( $j$  gerade) bzw.  $\alpha_j = a_j/a_1$  ( $j$  ungerade).  
Wir setzen

$$\alpha_{2 \cdot j} = \frac{\beta_{2 \cdot j}}{j!}, \quad \alpha_{2 \cdot j+1} = \frac{\beta_{2 \cdot j+1}}{j!}$$

und erhalten

$$H(x) = a_0 \cdot \underbrace{\sum_{j=0}^{\infty} \beta_{2 \cdot j} \cdot \frac{x^{2 \cdot j}}{j!}}_{c(x)} + a_1 \cdot x \cdot \underbrace{\sum_{j=0}^{\infty} \beta_{2 \cdot j+1} \cdot \frac{x^{2 \cdot j}}{j!}}_{d(x)}$$

mit den durch die Rekursion

$$\beta_{2 \cdot j+2} = \frac{(4 \cdot j - \mu) \cdot j}{(2 \cdot j + 2) \cdot (2 \cdot j + 1)} \cdot \beta_{2 \cdot j}, \quad \beta_0 = 1, \quad (\#)$$

$$\beta_{2 \cdot j+3} = \frac{(4 \cdot j + 2 - \mu) \cdot (j + 1)}{(4 \cdot j + 3) \cdot (4 \cdot j + 2)} \cdot \beta_{2 \cdot j+1}, \quad \beta_1 = 1 \quad (\#)$$

bestimmten Koeffizienten  $\beta_j$ . Wir zeigen nun, dass  $|c(x)|$  und  $|d(x)|$  schneller als  $e^{x^2/2}$  für  $x \rightarrow \infty$  anwachsen, falls die obige Rekursion nicht irgendwann abbricht, also falls  $\mu \notin \{0, 2, 4, 6, \dots\}$ . Wir setzen dies nun voraus und betrachten  $c(x)$ : Aus der obigen Rekursion folgt sofort, dass  $\beta_{2 \cdot j+2}/\beta_{2 \cdot j} \rightarrow 1$  für  $j \rightarrow \infty$ . Also gilt

$$|\beta_{2 \cdot j+2}| \geq \frac{|\beta_{2 \cdot j}|}{2} \quad \Rightarrow \quad |\beta_{2 \cdot j}| \geq \frac{|\beta_{2 \cdot j_0}|}{2^{j-j_0}}$$

für alle  $j \geq j_0$  mit einem geeigneten  $j_0$ . Es folgt

$$\begin{aligned} \operatorname{sign}(\beta_{2 \cdot j_0}) \cdot c(x) &= \operatorname{sign}(\beta_{2 \cdot j_0}) \cdot \sum_{j=0}^{j_0-1} \beta_{2 \cdot j} \cdot \frac{x^{2 \cdot j}}{j!} + \operatorname{sign}(\beta_{2 \cdot j_0}) \cdot \sum_{j=j_0}^{\infty} \beta_{2 \cdot j} \cdot \frac{x^{2 \cdot j}}{j!} \\ &\geq \operatorname{Polynom}(x) + |\beta_{j_0}| \cdot 2^{j_0} \cdot \sum_{j=j_0}^{\infty} \frac{x^{2 \cdot j}}{2^j \cdot j!} \\ &= \operatorname{Polynom}(x) + |\beta_{j_0}| \cdot 2^{j_0} \cdot \left( \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(x^2/2)^j}{j!} - \sum_{j=0}^{j_0-1} \frac{(x^2/2)^j}{j!} \right) \\ &= \operatorname{Polynom}(x) + |\beta_{j_0}| \cdot 2^{j_0} \cdot \left( e^{x^2/2} - \operatorname{Polynom}(x) \right). \end{aligned}$$

Analog folgt, dass  $|d(x)|$  stärker als  $x \cdot e^{x^2/2}$  für  $x \rightarrow \infty$  anwächst. Damit verschwindet die potentielle Eigenfunktion  $\psi(x) = H(x) \cdot e^{-x^2/2}$  des Harmonischen Oszillators aus Beispiel 2.13.c) aber nicht im Unendlichen und kann damit keine  $L_2$ -Funktion sein. Die einzige Möglichkeit, eine Eigenfunktion zu erhalten, besteht also darin, dass eine der beiden Rekursionen (#) zusammenbricht, also  $\mu \in \{0, 2, 4, 6, \dots\}$  gilt. Ist  $\mu = 2 \cdot k$ ,  $k \in \mathbb{N}_0$ ,  $k$  gerade, so ist mit der Wahl  $a_1 = 0$  das gerade Polynom

$$H_k(x) = a_0 \cdot \underbrace{\sum_{j=0}^{k/2} \beta_{2 \cdot j} \cdot \frac{x^{2 \cdot j}}{j!}}_{c(x)}$$

vom Grad  $k$  die gesuchte Lösung. Ist  $\mu = 2 \cdot k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ ,  $k$  ungerade, so ist mit der Wahl  $a_0 = 0$  das ungerade Polynom

$$H_k(x) = a_1 \cdot x \cdot \underbrace{\sum_{j=0}^{(k-1)/2} \beta_{2 \cdot j+1} \cdot \frac{x^{2 \cdot j}}{j!}}_{d(x)}$$

vom Grad  $k$  die gesuchte Lösung. Die Funktionen  $\psi_k(x) = H_k(x) \cdot e^{-x^2/2}$  sind jeweils  $L_2$ -Eigenfunktionen des Harmonischen Oszillators zu den Eigenwerten  $\lambda = \mu + 1 = 2 \cdot k + 1$ ,  $k \in \mathbb{N}_0$ . Mit geeigneter Wahl von  $a_0$  bzw.  $a_1$  erhält man die einheitliche Darstellung

$$H_k(x) = (-1)^k \cdot e^{x^2} \cdot \frac{d^k}{dx^k} e^{-x^2}$$

für die Hermite-Polynome.

**Bemerkung 2.15:** In MuPAD stehen die Orthogonalpolynome aus Beispiel 2.5.b) und c) (und weitere) in der Bibliothek `orthpoly` zur Verfügung (z.B. `orthpoly::legendre(k, x)`, `orthpoly::hermite(k, x)`).

↓20.12.02

**Beispiel 2.16: Bessel-Funktionen** (tauchen bei der Darstellung des Laplace-Operators in Polar- bzw. Zylinderkoordinaten auf)  
Betrachte die „parametrische Besselsche DGL“

$$-\psi''(x) - \frac{1}{x} \cdot \psi'(x) + \frac{\nu^2}{x^2} \cdot \psi(x) = \lambda \cdot \psi(x)$$

in der (singulären) SL-Form

$$-\left(x \cdot \psi'(x)\right)' + \frac{\nu^2}{x} \cdot \psi(x) = \lambda \cdot x \cdot \psi(x)$$

mit einem reellen Parameter  $\nu \geq 0$ ,

$$[a, b] = [0, 1], \quad p(x) = x, \quad q(x) = \frac{\nu^2}{x}, \quad w(x) = x$$

und den Randbedingungen

$$|\psi(0)| < \infty, \quad \psi(1) = 0.$$

Die Eigenwerte sind  $\lambda_k = \lambda_{\nu k}^2$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , wo  $\lambda_{\nu k}$  die  $k$ -te positive Nullstelle der Bessel-Funktion  $J_\nu$  ist. Die Eigenfunktionen sind  $\psi_k(x) = J_\nu(\lambda_{\nu k} \cdot x)$ . Ihre Normierung ist:

$$\langle \psi_k, \psi_{k'} \rangle_w = \int_0^1 x \cdot J_\nu(\lambda_{\nu k} \cdot x) \cdot J_\nu(\lambda_{\nu k'} \cdot x) dx = \frac{1}{2} \cdot \left(J_{\nu+1}(\lambda_{\nu k})\right)^2 \cdot \delta_{kk'}.$$

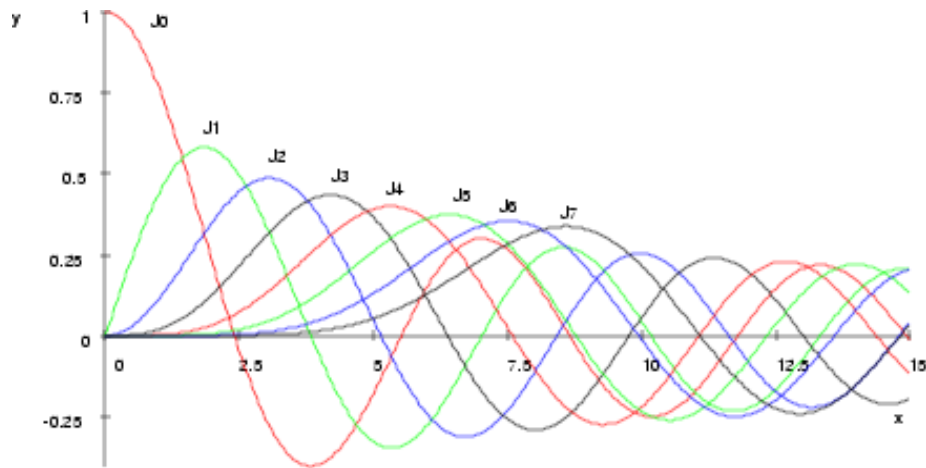
**Hintergrund:** Die „Bessel-Funktion“ (der ersten Art) mit Index  $\nu \geq 0$  ist die bei  $x = 0$  reguläre Lösung der DGL („Besselsche DGL“)

$$-\left(x \cdot J'(x)\right)' = \left(x - \frac{\nu^2}{x}\right) \cdot J(x).$$

Die spezielle Lösung mit  $J(0) = 1$  für  $\nu = 0$  bzw.  $J(0) = 0$  für  $\nu > 0$  wird mit  $J_\nu(x)$  bezeichnet („die Bessel-Funktion der Ordnung  $\nu$ “). Sie besitzt für ganzzahliges  $\nu = 0, 1, 2, \dots$  die Potenzreihendarstellung

$$J_\nu(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j! \cdot (j + \nu)!} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2 \cdot j}.$$

Hier ist eine Graphik der Bessel-Funktionen  $J_0, \dots, J_7$ :



Die Bessel-DGL

$$-\left(x \cdot J'(x)\right)' = \left(x - \frac{\nu^2}{x}\right) \cdot J(x)$$

ist die parametrische Bessel-DGL des Eigenwertproblems

$$-\left(x \cdot \psi'(x)\right)' + \frac{\nu^2}{x} \cdot \psi(x) = \lambda \cdot x \cdot \psi(x), \quad |\psi(0)| < \infty, \quad \psi(1) = 0$$

mit  $\lambda = 1$ . Setzt man  $\psi(x) = J_\nu(\lambda_{\nu k} \cdot x)$ , so erhält man in der Tat die bei  $x = 0$  reguläre Lösung der parametrischen Bessel-DGL mit  $\lambda = \lambda_{\nu k}^2$ . Die Forderung  $\psi(1) = 0$  führt sofort zu dem Ergebnis, dass die Eigenwerte  $\lambda = \lambda_{\nu k}^2$  durch die Nullstellen  $\lambda_{\nu k}$  von  $J_\nu$  gegeben sind.

Man kann zeigen, dass jedes  $J_\nu(x)$  unendlich viele positive reelle Nullstellen

$$0 < \lambda_{\nu 1} < \lambda_{\nu 2} < \dots$$

besitzt, welche in der obigen Konstruktion der Eigenfunktionen der parametrischen Bessel-DGL benutzt werden. (Die Nullstelle  $x = 0$  für  $\nu > 0$  wird nicht betrachtet.) Diese Nullstellen lassen sich nicht durch explizite Formeln darstellen, können aber recht leicht numerisch berechnet werden. Für die kleinste Nullstelle gilt (für großes  $\nu$ )

$$\lambda_{\nu 1} \approx \nu + 1.85575 \cdot \nu^{1/3} + 1.03315 \cdot \nu^{-1/3} - 0.00397 \cdot \nu^{-1} - \dots,$$

was schon ab  $\nu = 2$  die Nullstelle auf zwei Nachkommastellen genau bestimmt. Hiermit sind Startpunkte für die numerische Suche gegeben. Hat man  $\lambda_{\nu 1}$  gefunden, so findet man Startpunkte für die  $\lambda_{\nu k}$  für die Werte  $k > 1$  aus der Tatsache, dass für jedes  $\nu$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (\lambda_{\nu, k+1} - \lambda_{\nu, k}) = \pi$$

gilt, also  $\lambda_{\nu, k+1} \approx \lambda_{\nu, k} + \pi$ . Dies liefert für jedes nicht allzu große  $\nu$  schon ab  $k = 1$  eine ganz passable Näherung von  $\lambda_{\nu, k+1}$ , sobald  $\lambda_{\nu k}$  numerisch berechnet worden ist.



```

>> DIGITS:= 4: // Ausgabe auf nur 4 Stellen
>> // die ersten 7 Nullstellen der Besselfunktionen J0,...,J7
>> lambda;

```

	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7
	-----						
J[0]	2.405,	5.52,	8.654,	11.79,	14.93,	18.07,	21.21
J[1]	3.832,	7.016,	10.17,	13.32,	16.47,	19.62,	22.76
J[2]	5.136,	8.417,	11.62,	14.80,	17.96,	21.12,	24.27
J[3]	6.380,	9.761,	13.02,	16.22,	19.41,	22.58,	25.75
J[4]	7.588,	11.06,	14.37,	17.62,	20.83,	24.02,	27.20
J[5]	8.771,	12.34,	15.70,	18.98,	22.22,	25.43,	28.63
J[6]	9.936,	13.59,	17.00,	20.32,	23.59,	26.82,	30.03
J[7]	11.09,	14.82,	18.29,	21.64,	24.93,	28.19,	31.42

## 2.2 Reguläre Sturm–Liouville–Probleme

Für die regulären SL–Probleme (Bezeichnung 2.9)

$$L\psi = -(p \cdot \psi')' + q \cdot \psi = \lambda \cdot w \cdot \psi$$

über endlichen Intervallen  $[a, b]$  mit glatten Funktionen  $p, q, w$  (mit  $p(x) > 0$ ,  $w(x) > 0$  für alle  $x \in [a, b]$ ) und den Randbedingungen

$$\alpha_1 \cdot \psi(a) + \alpha_2 \cdot \psi'(a) = 0, \quad \beta_1 \cdot \psi(b) + \beta_2 \cdot \psi'(b) = 0$$

(mit  $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}$ ,  $|\alpha_1| + |\alpha_2| \neq 0$ ,  $|\beta_1| + |\beta_2| \neq 0$ ) existiert eine bemerkenswert einheitliche Theorie, die wir im folgenden (Mega–)Satz zusammenfassen:

**Satz 2.18:** (Reguläre Sturm–Liouville–Probleme)

Für das reguläre SL–Eigenwertproblem gilt:

- a) Es gibt eine abzählbar unendliche Anzahl reeller diskreter Eigenwerte  $\lambda_k$  mit  $k = 0, 1, 2, \dots$ :

$$\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots$$

- b) Diese Eigenwerte wachsen in der Form  $O(k^2)$  gegen  $\infty$ : es gibt positive Konstanten  $c$  und  $C$ , sodass für alle hinreichend grossen  $k$  gilt:

$$c \leq \frac{\lambda_k}{k^2} \leq C.$$



- c) Die Eigenwerte sind einfach: zu jedem  $\lambda_k$  gibt es (bis auf Multiplikation mit einer Konstanten) genau eine Eigenfunktion  $\psi_k(x)$  mit  $L\psi_k = \lambda_k \cdot w \cdot \psi_k$ .
- d) Die Eigenfunktionen „oszillieren“: die  $k$ -te Eigenfunktion hat genau  $k$  einfache Nullstellen im offenen Intervall  $(a, b)$  (und, je nach Randbedingung, evtl. noch Nullstellen an den Rändern).
- e) Die Eigenfunktionen bilden ein vollständiges Orthogonalsystem auf  $L_{2w}([a, b])$ : für jedes  $f \in L_{2w}([a, b])$  (welches nicht die Randbedingungen zu erfüllen braucht) konvergiert die Fourier–Reihe im  $L_2$ –Sinne gegen  $f$ :

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \cdot \psi_k \quad \text{mit} \quad c_k = \frac{\langle \psi_k, f \rangle_w}{\langle \psi_k, \psi_k \rangle_w}.$$

- f) Jede stückweise glatte Funktion  $f$  über  $[a, b]$ , die den Randbedingungen genügt, läßt sich punktweise als Grenzwert der Fourier–Reihe über die Eigenfunktionen darstellen. Es gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n c_k \cdot \psi_k(x) = \frac{f(x-0) + f(x+0)}{2},$$

wo  $f(x \mp 0)$  der links– bzw. rechtsseitige Limes der Funktion an der Stelle  $x$  ist. Stetige Funktionen, die den Randbedingungen genügen, werden damit überall durch ihre Fourier–Reihe dargestellt.

Der **Beweis** sprengt unseren Rahmen, und wir verweisen auf

[WW] WOLFGANG WALTER, *Gewöhnliche Differentialgleichungen*, Springer, 1996.

- a) + d) Siehe Kapitel 27 (II. Existenzsatz) in [WW].
- b) Siehe Kapitel 27 (Asymptotisches Verhalten, Formel (12)) in [WW].
- c) Satz 2.11.
- e) Siehe Kapitel 28 (VII. Entwicklungssatz) in [WW].
- f) Siehe Kapitel 27 (III. Entwicklungssatz) in [WW] (nur für stetig diff'bare Funktionen).
- Die Orthogonalität der Eigenfunktionen wurde in Satz 2.4 gezeigt.

Q.E.D.

**Bemerkung 2.19:** Die meisten der in Anwendungen auftretenden  $SL$ -Probleme sind singulär. In der Tat entstammen in den Beispielen 2.13 nur die **Sinus-Funktionen** 2.13.a) einem regulären Problem. In der Zählung der Eigenfunktionen nach Satz 2.18 ist dabei  $\psi_k(x) = \sin((k+1) \cdot \pi \cdot x)$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ . Wie in den Übungen bei der Wärmeleitgleichung und der Wellengleichung schon diskutiert, kann man jede auf dem Intervall  $[0, 1]$  gegebene Funktion ungerade auf  $[-1, 1]$  fortsetzen und dann gemäß Kapitel 1 in eine trigonometrische Reihe entwickeln, die nur Sinus-Terme enthält. Die Gültigkeit aller Teilaussagen von Satz 2.18 ist damit nach Kapitel 1 klar.

↓6.1.03

Die meisten der Aussagen in Satz 2.18 gelten auch für singuläre  $SL$ -Probleme, sind dann aber für das konkret betrachtete Problem jeweils einzeln zu beweisen. Für die **Legendre-Polynome** in Beispiel 2.13.b) gelten beispielsweise alle Aussagen des Satzes 2.18.

Für die **Hermite-Polynome** in Beispiel 2.13.c) gelten ebenfalls alle Aussagen des Satzes 2.18 mit der Ausnahme von 2.18.b): die Eigenwerte  $\lambda_k = 2 \cdot k + 1$  wachsen nicht quadratisch mit  $k$ .

Für die **Besselfunktionen** in Beispiel 2.13.d) gelten wiederum alle Aussagen des Satzes 2.18. In der Zählung der Eigenfunktionen nach Satz 2.18 ist dabei  $\psi_k(x) = J_\nu(\lambda_{\nu, k+1} \cdot x)$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ .

**Bemerkung 2.20:** Satz 2.18 liefert offensichtlich eine Verallgemeinerung der Theorie trigonometrischer Fourier-Reihen (mit Sinus- und Cosinus-Termen), die als Spezialfall enthalten sein sollten. Sie entstammen keinem regulären  $SL$ -Problem, sondern dem Eigenwertproblem

$$-\psi''(x) = \lambda \cdot \psi(x), \quad \psi(-\pi) = \psi(\pi), \quad \psi'(-\pi) = \psi'(\pi)$$

mit periodischen Randbedingungen. In der Tat gelten alle Aussagen des Satzes 2.18 bis auf 2.18.c): die Eigenwerte  $\lambda_k = k \in \mathbb{N}_0$  sind alle bis auf  $\lambda_0 = 0$  entartet: es gibt jeweils 2 Eigenfunktionen, nämlich  $\sin(k \cdot x)$  und  $\cos(k \cdot x)$ .

**Bemerkung 2.21:** In der Quantenmechanik sind der kleinste Eigenwert  $\lambda_0$  und die entsprechende Eigenfunktion  $\psi_0$  von besonderem Interesse: man spricht von „Grundenergie“  $\lambda_0$  und „Grundzustand“  $\psi_0$ . In Satz 2.12 wurde eine grobe untere Abschätzung bewiesen. Man bekommt leicht obere Abschätzungen für die Grundenergie durch die Aussage

$$\lambda_0 = \min_{\substack{\psi \in L_{2w} \\ \psi \neq 0}} \frac{\langle \psi, L\psi \rangle}{\langle \psi, \psi \rangle_w}$$

(das Minimum wird für  $\psi = \psi_0$  angenommen). Durch Einsetzen einer beliebigen Funktion  $\psi$  erhält man eine obere Schranke

$$\lambda_0 \leq \frac{\langle \psi, L\psi \rangle}{\langle \psi, \psi \rangle_w},$$

die umso genauer ist, je näher man  $\psi$  bei  $\psi_0$  wählt. Numerisch kann man zur systematischen Approximation von  $\lambda_0$  und  $\psi_0$  folgendermaßen vorgehen: Wähle eine (möglichst gute) Approximation  $\mu$  von  $\lambda_0$ , wähle eine beliebige Startfunktion  $\psi^{(0)}$ , die keine Eigenfunktion von  $L$  ist. Ist die Approximation  $\mu$  hinreichend genau, so konvergiert die Iteration

$$\psi^{(j)} = \frac{1}{\sqrt{\langle \tilde{\psi}^{(j)}, \tilde{\psi}^{(j)} \rangle_w}} \cdot \tilde{\psi}^{(j)} \quad \text{mit} \quad \tilde{\psi}^{(j)} = (L - \mu \cdot w)^{-1} w \cdot \psi^{(j-1)}$$

im  $L_2$ -Sinn gegen  $\psi_0$  und

$$\lambda^{(j)} = \frac{\langle \psi^{(j)}, L\psi^{(j)} \rangle}{\langle \psi^{(j)}, \psi^{(j)} \rangle_w} = \mu + \frac{\langle \tilde{\psi}^{(j)}, (L - \mu \cdot w)\tilde{\psi}^{(j)} \rangle}{\langle \tilde{\psi}^{(j)}, \tilde{\psi}^{(j)} \rangle_w} = \mu + \frac{\langle \tilde{\psi}^{(j)}, \psi^{(j-1)} \rangle_w}{\langle \tilde{\psi}^{(j)}, \tilde{\psi}^{(j)} \rangle_w}$$

konvergiert gegen  $\lambda_0$ . Hierbei ist  $\tilde{\psi}^{(j)} = (L - \mu \cdot w)^{-1} w \cdot \psi^{(j-1)}$  als die Lösung von  $(L - \mu \cdot w)\tilde{\psi}^{(j)} = w \cdot \psi^{(j-1)}$  zu verstehen.

Durch geeignete Wahl von  $\mu$  kann man auch andere Eigenwerte/–vektoren durch diese Iteration ansteuern. Siehe Übungsaufgabe 47.

Mit der Aufgabe, die Gleichung  $L\psi = w \cdot f$  für gegebenes  $f$  zu lösen, beschäftigen wir uns im nächsten Abschnitt 2.3.

## 2.3 Inverse Sturm–Liouville–Operatoren: die Greensche Funktion

Sei  $L = -\frac{d}{dx} p \frac{d}{dx} + q$  ein SL-Operator über dem Intervall  $[a, b]$  mit den Randbedingungen

$$\alpha_1 \cdot \psi(a) + \alpha_2 \cdot \psi'(a) = 0, \quad \beta_1 \cdot \psi(b) + \beta_2 \cdot \psi'(b) = 0 \quad (\#)$$

(mit  $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}$ ,  $|\alpha_1| + |\alpha_2| \neq 0$ ,  $|\beta_1| + |\beta_2| \neq 0$ ). Wir betrachten das Problem, die inhomogene Gleichung

$$L\psi = w \cdot f$$

mit einer gegebenen Funktion  $f \in L_{2w}([a, b])$  zu lösen, wobei die Lösung  $\psi$  die Randbedingungen (#) erfüllen soll.

Wir zerlegen dazu  $\psi$  und  $f$  in eine Fourier-Reihe bzgl. der Eigenfunktionen  $\psi_k$  von  $L$  (was für reguläre SL-Probleme immer möglich ist):

$$\psi = \sum_{k=0}^{\infty} d_k \cdot \psi_k, \quad f = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \cdot \psi_k, \quad c_k = \frac{\langle \psi_k, f \rangle_w}{\langle \psi_k, \psi_k \rangle_w}.$$

Aus  $L\psi = w \cdot f$  folgt mit  $L\psi_k = \lambda_k \cdot w \cdot \psi_k$  die Gleichung

$$L\psi = \sum_{k=0}^{\infty} d_k \cdot L\psi_k = \sum_{k=0}^{\infty} d_k \cdot \lambda_k \cdot w \cdot \psi_k = w \cdot f = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \cdot w \cdot \psi_k.$$

Durch Vergleich der einzelnen Terme folgt  $d_k = c_k/\lambda_k$ , d.h., man erhält die Lösungsformel

$$\psi = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{\lambda_k} \cdot \psi_k, \quad c_k = \frac{\langle \psi_k, f \rangle_w}{\langle \psi_k, \psi_k \rangle_w}$$

für das Problem  $L\psi = w \cdot f$ . Solange keiner der Eigenwerte  $\lambda_k = 0$  ist, erhält man so die Lösung. (Die Bedingung, dass 0 kein Eigenwert von  $L$  sein darf, sollte nicht verwundern: eine quadratische Matrix ist genau dann invertierbar, wenn 0 kein Eigenwert ist). Damit ist bewiesen:

**Satz 2.22:** (Lösung von  $L\psi = w \cdot f$  über Fourier-Reihen)

Sei  $L$  ein  $SL$ -Operator auf einem den Randbedingungen entsprechenden Teilraum  $L_{2w}^{(0)}([a, b]) \subset L_{2w}([a, b])$  mit einem vollständigen Orthogonalsystem von Eigenfunktionen ( $L\psi_k = \lambda_k \cdot w \cdot \psi_k$ ,  $k \in \mathbb{N}_0$ ). Sei 0 nicht Eigenwert von  $L$ . Dann existiert für jedes  $f \in L_{2w}([a, b])$  eine eindeutige Lösung

$$\psi = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{\lambda_k} \cdot \psi_k, \quad c_k = \frac{\langle \psi_k, f \rangle_w}{\langle \psi_k, \psi_k \rangle_w}$$

von  $L\psi = w \cdot f$  mit  $\psi \in L_{2w}^{(0)}([a, b])$ .

**Bemerkung 2.23:** Startet man mit dem Operator

$$\tilde{L} = -A \frac{d}{dx^2} - B \frac{d}{dx} + C,$$

der nach Satz 2.8 durch  $L = w \cdot \tilde{L}$  auf  $SL$ -Form  $L$  gebracht wird, so entspricht die Gleichung  $L\psi = w \cdot f$  der Gleichung  $\tilde{L}\psi = f$ . Mit den Eigenfunktionen  $\tilde{L}\psi_k = \lambda \cdot \psi_k$  wird die Gleichung

$$\tilde{L}\psi = f$$

auch für allgemeine Operatoren  $\tilde{L}$  durch die Fourier-Entwicklung gelöst, falls 0 kein Eigenwert von  $\tilde{L}$  ist:

$$\psi = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{\lambda_k} \cdot \psi_k, \quad c_k = \frac{\langle \psi_k, f \rangle_w}{\langle \psi_k, \psi_k \rangle_w}.$$

**Bemerkung 2.24:** Die Inhomogenität  $f$  in  $L\psi = w \cdot f$  braucht die Randbedingungen nicht zu erfüllen. In einem solchen Fall ist das Abklingverhalten der Fourier–Koeffizienten  $c_k$  von  $f$  recht langsam: die Fourier–Reihe  $f = \sum_k c_k \cdot \psi_k$  konvergiert nicht gleichmäßig, sodass der  $L_2$ –Grenzwert  $f$  der Reihe nicht die Randbedingungen erfüllen muß, auch wenn die einzelnen Terme  $c_k \cdot \psi_k$  der Reihe dies tun. Im Gegensatz dazu fallen die Fourier–Koeffizienten  $c_k/\lambda_k$  der Lösung  $\psi$  wesentlich schneller ab (beachte  $\lambda_k \rightarrow \infty$ ), was zu gleichmäßiger Konvergenz  $\psi = \sum_k \frac{c_k}{\lambda_k} \cdot \psi_k$  und der Vererbung der Randbedingungen von  $\psi_k$  auf die Lösung  $\psi$  führt.

Wir beobachten, dass der SL–Operator  $L$  auf  $L_{2w}([a, b])$  eine Inverse  $L^{-1}$  besitzt, die Bilder in  $L_{2w}^{(0)}([a, b]) \subset L_{2w}([a, b])$  annimmt:

$$\begin{aligned} (L^{-1}(w \cdot f))(x) &= \psi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\langle \psi_k, f \rangle_w}{\lambda_k \cdot \langle \psi_k, \psi_k \rangle_w} \cdot \psi_k(x) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k \cdot \langle \psi_k, \psi_k \rangle_w} \cdot \psi_k(x) \cdot \int_a^b w(y) \cdot \overline{\psi_k(y)} \cdot f(y) \, dy \\ &= \int_a^b \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\psi_k(x) \cdot \overline{\psi_k(y)}}{\lambda_k \cdot \langle \psi_k, \psi_k \rangle_w}}_{g(x,y)} \cdot w(y) \cdot f(y) \, dy \\ &= \int_a^b g(x, y) \cdot (w(y) \cdot f(y)) \, dy. \end{aligned}$$

Wir ersetzen  $w \cdot f$  durch  $f$  und erhalten:

**Satz 2.25:** (Inverser SL–Operator)

↓10.1.03

Sei  $L : L_{2w}^{(0)}([a, b]) \rightarrow L_{2w}([a, b])$  ein SL–Operator auf einem den Randbedingungen entsprechenden Teilraum  $L_{2w}^{(0)}([a, b]) \subset L_{2w}([a, b])$  mit einem vollständigen Orthogonalsystem von Eigenfunktionen  $L\psi_k = \lambda_k \cdot w \cdot \psi_k$ ,  $k \in \mathbb{N}_0$ . Ist 0 nicht Eigenwert, so ist  $L$  invertierbar. Der inverse Operator  $L^{-1} : L_{2w}([a, b]) \rightarrow L_{2w}^{(0)}([a, b])$  wirkt als Integraloperator:

$$(L^{-1}f)(x) = \int_a^b g(x, y) \cdot f(y) \, dy \quad \text{mit} \quad g(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\psi_k(x) \cdot \overline{\psi_k(y)}}{\lambda_k \cdot \langle \psi_k, \psi_k \rangle_w}.$$

Bezeichnung:  $L^{-1}$  heißt „Greens–Operator“, der Integralkern  $g(x, y)$  heißt „Greensche Funktion“.

**Bemerkung 2.26:** Kann das homogene Problem  $L\psi = 0$  für  $\psi \in L_{2w}^{(0)}([a, b])$  explizit gelöst werden, so kann man die Greensche Funktion nicht nur als Reihe, sondern auch ganz explizit konstruieren. Wir fixieren dazu ein  $y \in (a, b)$  und lösen die DGL

$$Lg(x, y) = \delta(x - y),$$

in  $x$  (mit Parameter  $y$ ), sodass formal

$$L \int_a^b g(x, y) \cdot f(y) dy = \int_a^b Lg(x, y) \cdot f(y) dy = \int_a^b \delta(x - y) \cdot f(y) dy = f(x)$$

gilt. Für  $x < y$  bzw.  $x > y$  ist jeweils das homogene Problem

$$Lg(x, y) = 0$$

zu lösen, an der Stelle  $x = y$  muss

$$\lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ \epsilon > 0}} \int_{y-\epsilon}^{y+\epsilon} Lg(x, y) dx = \lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ \epsilon > 0}} \int_{y-\epsilon}^{y+\epsilon} \delta(x - y) dx = 1$$

gelten, also

$$\lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ \epsilon > 0}} \int_{y-\epsilon}^{y+\epsilon} \left( -\frac{\partial}{\partial x} p(x) \frac{\partial}{\partial x} g(x, y) + q(x) \cdot g(x, y) \right) dx = 1.$$

Wir fordern, dass  $g(x, y)$  an der Stelle  $x = y$  stetig sein soll. Damit folgt

$$\lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ \epsilon > 0}} \left( -p(y + \epsilon) \cdot \frac{\partial g}{\partial x}(y + \epsilon, y) + p(y - \epsilon) \cdot \frac{\partial g}{\partial x}(y - \epsilon, y) \right) = 1.$$

Wir erhalten also ein Sprungbedingung an der Nahtstelle  $x = y$  der beiden Bereiche  $x < y$  und  $x > y$ :

$$\frac{\partial g}{\partial x}(y - 0, y) - \frac{\partial g}{\partial x}(y + 0, y) = \frac{1}{p(y)}.$$

Ergebnis: die Greensche Funktion  $g(x, y)$  ist bei gegebenem  $y \in (a, b)$  durch die folgenden Forderungen festgelegt:

- $Lg(x, y) = 0$  für alle  $x \in [a, y)$  und alle  $x \in (y, b]$ ,
- $g(a, y)$  erfüllt die linke Randbedingung,
- $g(b, y)$  erfüllt die rechte Randbedingung,
- $g(x, y)$  ist stetig bei  $x = y$ ,
- $\frac{\partial g}{\partial x}(x, y)$  ist unstetig bei  $x = y$  mit  $\frac{\partial g}{\partial x}(y - 0, y) - \frac{\partial g}{\partial x}(y + 0, y) = \frac{1}{p(y)}$ .

In der Tat läßt sich hieraus algorithmisch  $g(x, y)$  eindeutig bestimmen, falls wir eine explizite Lösung des homogenen Problems  $Lg(x, y) = 0$  berechnen können.

**Beispiel 2.27:** Wir berechnen die Greensfunktion des SL-Operators  $L = -\frac{d^2}{dx^2}$  mit den Randbedingungen  $\psi(0) = \psi(1) = 0$ . Sei  $y \in (0, 1)$  vorgegeben.

a) Die Lösung des homogenen Problems  $Lg(x, y) = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} g(x, y) = 0$  ist  $g(x, y) = \alpha(y) + \beta(y) \cdot x$ . Wir machen also den Ansatz

$$g(x, y) = \begin{cases} \alpha_-(y) + \beta_-(y) \cdot x & \text{für } x \in [0, y), \\ \alpha_+(y) + \beta_+(y) \cdot x & \text{für } x \in (y, 1] \end{cases}$$

mit noch zu bestimmenden Funktionen  $\alpha_{\pm}(y)$ ,  $\beta_{\pm}(y)$ .

b) Aus der linken Randbedingung  $g(0, y) = 0$  folgt  $\alpha_-(y) = 0$ .

c) Aus der rechten Randbedingung  $g(1, y) = 0$  folgt  $\alpha_+(y) + \beta_+(y) = 0$ .

Der Ansatz hat sich damit auf

$$g(x, y) = \begin{cases} \beta_-(y) \cdot x & \text{für } x \in [0, y), \\ \alpha_+(y) \cdot (1 - x) & \text{für } x \in (y, 1] \end{cases}$$

reduziert.

d) Für  $x = y$  ergibt sich

$$\beta_-(y) \cdot y = \alpha_+(y) \cdot (1 - y). \quad (1)$$

e) Es gilt

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = \begin{cases} \beta_-(y) & \text{für } x \in [0, y), \\ -\alpha_+(y) & \text{für } x \in (y, 1]. \end{cases}$$

Für unseren Operator ist  $p(x) = 1$ . Die Sprungbedingung e) liefert damit

$$\beta_-(y) + \alpha_+(y) = \frac{1}{p(y)} = 1. \quad (2)$$

Aus den linearen Gleichungen (1) und (2) ergibt sich

$$\alpha_+(y) = y, \quad \beta_-(y) = 1 - y.$$

Damit ist die Greens-Funktion bestimmt (wir lassen nun auch  $y = 0$ ,  $y = 1$  sowie wegen der Stetigkeit auch  $x = y$  zu):

$$g(x, y) = \begin{cases} x \cdot (1 - y) & \text{für } 0 \leq x \leq y \leq 1, \\ (1 - x) \cdot y & \text{für } 0 \leq y \leq x \leq 1. \end{cases}$$

**Probe:** Die Funktion

$$\psi(x) = \int_0^1 g(x, y) \cdot f(y) dy = \int_0^x g(x, y) \cdot f(y) dy + \int_x^1 g(x, y) \cdot f(y) dy$$

$$= (1-x) \cdot \int_0^x y \cdot f(y) dy + x \cdot \int_x^1 (1-y) \cdot f(y) dy$$

erfüllt in der Tat die Randbedingungen  $\psi(0) = \psi(1) = 0$  sowie

$$\begin{aligned} L\psi(x) &= -\frac{d^2}{dx^2}\psi(x) \\ &= -\frac{d}{dx}\left(-\int_0^x y \cdot f(y) dy + (1-x) \cdot x \cdot f(x) + \int_x^1 (1-y) \cdot f(y) dy - x \cdot (1-x) \cdot f(x)\right) \\ &= -\frac{d}{dx}\left(-\int_0^x y \cdot f(y) dy + \int_x^1 (1-y) \cdot f(y) dy\right) = -\left(-x \cdot f(x) - (1-x) \cdot f(x)\right) = f(x). \end{aligned}$$

**Bemerkung 2.28:** Im obigen Beispiel beobachtet man, dass die Symmetrie  $g(x, y) = g(y, x)$  gilt. Dies ist kein Zufall. Bezüglich des ungewichteten Skalarprodukts gilt

$$\begin{aligned} &\langle f_1, L^{-1}f_2 \rangle - \langle L^{-1}f_1, f_2 \rangle \\ &= \int_a^b \overline{f_1(x)} \cdot \left( \int_a^b g(x, y) \cdot f_2(y) \right) dy dx - \int_a^b \left( \int_a^b g(x, y) \cdot f_1(y) dy \right) \cdot f_2(x) dx \\ &= \int_a^b \int_a^b g(x, y) \cdot \overline{f_1(x)} \cdot f_2(y) dx dy - \int_a^b \int_a^b \overline{g(x, y)} \cdot \overline{f_1(y)} \cdot f_2(x) dy dx \\ &\stackrel{(*)}{=} \int_a^b \int_a^b \left( g(x, y) - \overline{g(y, x)} \right) \cdot \overline{f_1(x)} \cdot f_2(y) dx dy, \end{aligned}$$

wobei im Schritt (\*) im zweiten Integral die Namen  $x, y$  der Integrationsvariablen ausgetauscht wurden. Der Greensche Operator ist also genau dann selbstadjungiert bzgl. des ungewichteten Skalarprodukts, wenn

$$g(x, y) = \overline{g(y, x)}$$

gilt. Da das Inverse eines (immer symmetrischen)  $SL$ -Operators wieder ein symmetrischer Operator ist, muss für den Integralkern  $g(x, y)$  die obige Symmetrie gelten.

## 2.4 Anwendungen

Viele der den Sturm-Liouville-Problemen entstammenden Orthogonalsysteme tauchen in der Lösung von partiellen DGLen der mathematischen Physik auf. Ein wichtiges Beispiel hierfür ist etwa die Poisson-Gleichung

$$\Delta u(x, y, z) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -f(x, y, z)$$



auf einem Gebiet  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  mit einer in  $\Omega$  vorgegebenen Funktion  $f$  und vorgegebenen Randwerten der Lösung  $u$  auf dem Rand von  $\Omega$ . Das grobe Verfahren sieht dabei folgendermaßen aus:

- a) Transformiere die Gleichung auf der Symmetrie des Problems angepasste Koordinaten, die wir hier wieder  $x, y, z$  nennen wollen (z.B. Polar- oder Kugelkoordinaten bei Rotationssymmetrie, Zylinderkoordinaten bei Zylindersymmetrie etc.)
- b) In den neuen Koordinaten hat man typischerweise einen Quader vor sich, über dem man sich ein mehrdimensionales orthogonales System  $\psi_{k_1 k_2 k_3}(x, y, z)$  verschafft. Dies geschieht durch Produktansätze

$$\psi_{k_1 k_2 k_3}(x, y, z) = X_{k_1}(x) \cdot Y_{k_2}(y) \cdot Z_{k_3}(z),$$

wo  $X_{k_1}(x)$ ,  $Y_{k_2}(y)$ ,  $Z_{k_3}(z)$  jeweils 1-dimensionale orthogonale Funktionen sind. Die mehrdimensionale Fourier-Entwicklung der Lösung führt dabei auf Mehrfachsummen über jeweils 1-dimensionale Fourier-Reihen in den einzelnen Koordinatenrichtungen.

- c) Man erhält so eine Fourier-Reihendarstellung der Lösung.

Wir demonstrieren dieses Programm an einem noch überschaubaren Fall: die Poisson-Gleichung im  $\mathbb{R}^2$  mit Rotationssymmetrie und homogenen Randbedingungen. Es bietet sich eine Transformation des Gebiets  $\Omega$  (ein Kreis mit Radius  $r_0$ ) per Polarkoordinaten  $(r, \phi)$  auf den Quader  $(r, \phi) \in [0, r_0] \times [0, 2 \cdot \pi]$  an, wobei über die Transformation des Volumenelements  $dx dy = r dr d\phi$  das Gewicht  $w(r) = r$  im Radialanteil auftaucht. Dieses Gewicht gehört zu den Bessel-Funktionen, sodass sich als geeignetes 2-dimensionales Orthogonalsystem auf dem  $(r, \phi)$ -Quader die Produkte aus Bessel-Funktionen (in  $r$ ) und trigonometrischen Funktionen (in  $\phi$ ) erweisen:

---

**Beispiel 2.29:** Wir betrachten den Laplace-Operator

$$\Delta u(x, y) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

in Polarkoordinaten  $(r, \phi)$ :

$$x = r \cdot \cos(\phi), \quad y = r \cdot \sin(\phi).$$

Mit der Kettenregel ergeben sich aus

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial x} = 1 &= \frac{\partial r}{\partial x} \cdot \cos(\phi) - r \cdot \sin(\phi) \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x}, & \frac{\partial y}{\partial x} = 0 &= \frac{\partial r}{\partial x} \cdot \sin(\phi) + r \cdot \cos(\phi) \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x}, \\ \frac{\partial x}{\partial y} = 0 &= \frac{\partial r}{\partial y} \cdot \cos(\phi) - r \cdot \sin(\phi) \cdot \frac{\partial \phi}{\partial y}, & \frac{\partial y}{\partial y} = 1 &= \frac{\partial r}{\partial y} \cdot \sin(\phi) + r \cdot \cos(\phi) \cdot \frac{\partial \phi}{\partial y} \end{aligned}$$

die Beziehungen

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \cos(\phi), \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \sin(\phi), \quad \frac{\partial \phi}{\partial x} = -\frac{\sin(\phi)}{r}, \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\cos(\phi)}{r}.$$

Mit der Kettenregel folgt dann

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial r}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial \phi} = \cos(\phi) \cdot \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\sin(\phi)}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial \phi},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial r}{\partial y} \cdot \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \cdot \frac{\partial u}{\partial \phi} = \sin(\phi) \cdot \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\cos(\phi)}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial \phi},$$

woraus sich nach einiger Rechnung ergibt:

$$\Delta u(r, \phi) = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2}.$$

Wir betrachten die „**Poisson-Gleichung**“

$$\Delta u = -f$$

mit einer in Polarkoordinaten gegebenen Funktion  $f(r, \phi)$  und der Randbedingung

$$u(r_0, \phi) = 0$$

(auf einem Kreis des Radius  $r_0$  soll die Lösung verschwinden). In Polarkoordinaten haben wir zu lösen:

$$\Delta u(r, \phi) = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} = -f(r, \phi), \quad u(r_0, \phi) = 0.$$

Wir führen die dimensionslose Koordinate

$$\rho = \frac{r}{r_0}$$

ein, die den Radialbereich  $r \in [0, r_0]$  auf den Standardbereich  $\rho \in [0, 1]$  transformiert. Da sowohl  $f$  als auch die Lösung  $u$  in der Winkelkoordinate  $\phi$  die Periode  $2 \cdot \pi$  haben muss, zerlegen wir  $f$  und  $u$  in Fourier-Reihen bzgl.  $\phi$ :

$$u(r, \phi) = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} U_\nu(\rho) \cdot e^{i \cdot \nu \cdot \phi}, \quad f(r, \phi) = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} F_\nu(\rho) \cdot e^{i \cdot \nu \cdot \phi}$$

mit

$$F_\nu(\rho) = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_0^{2 \cdot \pi} f(\rho \cdot r_0, \phi) \cdot e^{-i \cdot \nu \cdot \phi} d\phi.$$

Einsetzen in die Poisson-Gleichung liefert:

$$\begin{aligned}
\Delta u(r, \phi) &= \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right) \cdot U_\nu(\rho) \cdot e^{i \cdot \nu \cdot \phi} \\
&= \frac{1}{r_0^2} \cdot \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} \left( \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right) \cdot U_\nu(\rho) \cdot e^{i \cdot \nu \cdot \phi} \\
&= \frac{1}{r_0^2} \cdot \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} \left( U_\nu''(\rho) + \frac{1}{\rho} \cdot U_\nu'(\rho) - \frac{\nu^2}{\rho^2} \cdot U_\nu(\rho) \right) \cdot e^{i \cdot \nu \cdot \phi} \\
&= - \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} F_\nu(\rho) \cdot e^{i \cdot \nu \cdot \phi} = -f(r, \phi).
\end{aligned}$$

Vergleich der Fourier-Koeffizienten liefert, dass die Funktionen  $U_\nu(\rho)$  durch die Gleichung

$$-U_\nu''(\rho) - \frac{1}{\rho} \cdot U_\nu'(\rho) + \frac{\nu^2}{\rho^2} \cdot U_\nu(\rho) = r_0^2 \cdot F_\nu(\rho)$$

mit den Randbedingungen

$$|U_\nu(0)| < \infty, \quad U_\nu(1) = 0$$

bestimmt sind. Dies ist die inhomogene Version der in Beispiel 2.16 betrachteten parametrischen Bessel-Gleichung über dem Intervall  $[0, 1]$ , zu der das Gewicht  $w(\rho) = \rho$  gehört. Entwicklung nach den bzgl.  $w$  orthogonalen Eigenfunktionen

$$\psi_{\nu k}(\rho) = J_{|\nu|}(\lambda_{|\nu|, k} \cdot \rho), \quad \nu \in \mathbb{Z}$$

mit den Eigenwerten  $\lambda_{|\nu|, k}^2$  (wo  $\lambda_{|\nu|, k}$  die  $k$ -te positive Nullstelle von  $J_{|\nu|}$  ist) liefert gemäß Bemerkung 2.23 unter Verwendung der Angaben in Beispiel 2.16 die Lösung

$$U_\nu(\rho) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{1}{\lambda_{|\nu|, k}^2} \cdot \frac{\langle \psi_{\nu k}, r_0^2 \cdot F_\nu \rangle_w}{\langle \psi_{\nu k}, \psi_{\nu k} \rangle_w} \cdot \psi_{\nu k}(\rho) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{2}{\lambda_{|\nu|, k}^2} \cdot \frac{\langle \psi_{\nu k}, r_0^2 \cdot F_\nu \rangle_w}{J_{|\nu|+1}(\lambda_{|\nu|, k})^2} \cdot \psi_{\nu k}(\rho).$$

Mit  $u(r, \phi) = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} U_\nu(\rho) \cdot e^{i \cdot \nu \cdot \phi}$  erhalten wir das

**Endergebnis:** Die Lösung des Randwertproblems

$$\Delta u(r, \phi) = -f(r, \phi), \quad u(r_0, \phi) = 0$$

ist in Polarkoordinaten gegeben durch die Reihenentwicklung

$$u(r, \phi) = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{2}{\lambda_{|\nu|, k}^2} \cdot \frac{\langle \psi_{\nu k}, r_0^2 \cdot F_\nu \rangle_w}{J_{|\nu|+1}(\lambda_{|\nu|, k})^2} \cdot J_{|\nu|} \left( \lambda_{|\nu|, k} \cdot \frac{r}{r_0} \right) \cdot e^{i \cdot \nu \cdot \phi}$$

mit

$$\begin{aligned}
 \boxed{\langle \psi_{\nu k}, r_0^2 \cdot F_\nu \rangle_w} &= \int_0^1 \rho \cdot r_0^2 \cdot F_\nu(\rho) \cdot J_{|\nu|}(\lambda_{|\nu|,k} \cdot \rho) \, d\rho \\
 &= \frac{r_0^2}{2 \cdot \pi} \cdot \int_0^1 \int_0^{2\pi} \rho \cdot f(\rho \cdot r_0, \phi) \cdot e^{-i \cdot \nu \cdot \phi} \cdot J_{|\nu|}(\lambda_{|\nu|,k} \cdot \rho) \, d\phi \, d\rho \\
 &\stackrel{(r=\rho \cdot r_0)}{=} \boxed{\frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_0^{r_0} \int_0^{2\pi} r \cdot f(r, \phi) \cdot e^{-i \cdot \nu \cdot \phi} \cdot J_{|\nu|}\left(\lambda_{|\nu|,k} \cdot \frac{r}{r_0}\right) \, d\phi \, dr.}
 \end{aligned}$$

Abschließend soll noch die passendste (weil 2-dimensionale) Sichtweise dieser Lösung vorgestellt werden. Auf dem Gebiet  $\Omega =$  Kreis mit Radius  $r_0$  haben wir ein 2-dimensionales Orthogonalsystem benutzt, das in Polarkoordinaten durch

$$\Psi_{\nu k}(r, \phi) = J_{|\nu|}\left(\lambda_{|\nu|,k} \cdot \frac{r}{r_0}\right) \cdot e^{i \cdot \nu \cdot \phi}, \quad \nu \in \mathbb{Z}, \quad k \in \mathbb{N}$$

gegeben ist. Es besteht aus den Eigenfunktionen des Laplace-Operators, welche den Randbedingungen  $\Psi(r_0, \phi) = 0$  genügen:

$$-\Delta \Psi_{\nu k} = \underbrace{\frac{\lambda_{|\nu|,k}^2}{r_0^2}}_{\Lambda_{\nu k}} \cdot \Psi_{\nu k}.$$

Die Normierung dieses Systems bezüglich des 2-dimensionalen Skalarprodukts  $\langle \Phi, \Psi \rangle = \iint_{\Omega} \overline{\Phi} \cdot \Psi \, dx \, dy = \int_0^{r_0} \int_0^{2\pi} \overline{\Phi} \cdot \Psi \cdot r \, dr \, d\phi$  ist

$$\langle \Psi_{\nu k}, \Psi_{\nu' k'} \rangle = \frac{r_0^2}{2} \cdot \left( J_{|\nu|+1}(\lambda_{|\nu|,k}) \right)^2 \cdot 2 \cdot \pi \cdot \delta_{\nu \nu'} \cdot \delta_{k k'}.$$

In Analogie zu Bemerkung 2.23 ist die Lösung von  $-\Delta u = f$  durch die 2-dimensionale Fourier-Reihe

$$u(r, \phi) = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{1}{\Lambda_{\nu k}} \cdot \frac{\langle \Psi_{\nu k}, f \rangle}{\langle \Psi_{\nu k}, \Psi_{\nu k} \rangle} \cdot \Psi_{\nu k}(r, \phi)$$

mit den Eigenwerten  $\Lambda_{\nu k} = \frac{\lambda_{|\nu|,k}^2}{r_0^2}$  des Operators  $L = -\Delta$  und den Fourier-Koeffizienten

$$\langle \Psi_{\nu k}, f \rangle = \iint_{\Omega} \overline{\Psi_{\nu k}} \cdot f \, dx \, dy = \int_0^{2\pi} \int_0^{r_0} J_{|\nu|}\left(\lambda_{|\nu|,k} \cdot \frac{r}{r_0}\right) \cdot e^{-i \cdot \nu \cdot \phi} \cdot f(r, \phi) \cdot r \, dr \, d\phi$$

gegeben. Verfolgt man alle Konstanten, so sieht man leicht, dass dieses Ergebnis mit der weiter oben gegebenen Darstellung der Lösung übereinstimmt.

---