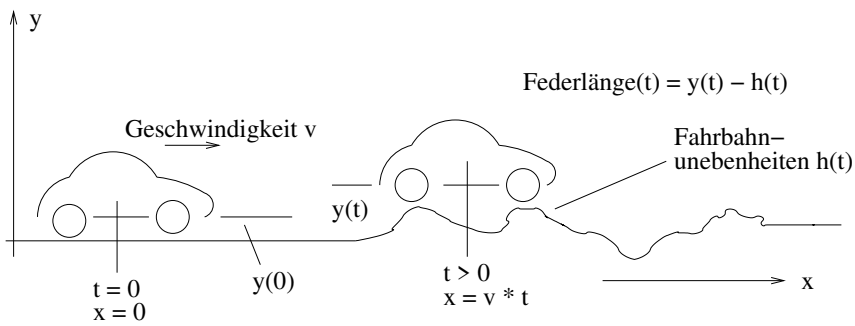
Kapitel 1

Fourier–Analysis

↓16.10.02

1.1 Motivation: Ein erstes Beispiel

Ohne den allgemeinen Hintergrund, der erst in den kommenden Kapiteln bereit gestellt werden wird, soll zur Motivation zunächst ein Anwendungsbeispiel durchgerechnet werden, um die Nützlichkeit der Dinge vorzustellen, die in den nächsten Kapiteln eingeführt werden. Die strukturellen Dinge werden dabei durch elementare Rechnungen ad hoc hergeleitet; später werden wir sie von einem allgemeineren Standpunkt aus systematisch betrachten.
In Anwendungen sind häufig *lineare* (Systeme von) Differentialgleichungen (DGLen) zu lösen. Beispiel: Modelliere ein Auto, das über eine unebene Fahrbahn fährt:



Simples mathematisches Modell:

$$m \cdot \ddot{y}(t) = \underbrace{-\,k \cdot \Big(y(t) - h(v \cdot t) - L\Big)}_{\text{Federkraft}} \;-\; \underbrace{m \cdot g}_{\text{Gravitation}} \;-\; \underbrace{\delta \cdot \dot{y}(t)}_{\text{Dämpfung}}$$

mit

$y(t)$	:	Höhe der oberen Federaufhängung
$m \cdot \ddot{y}(t)$	:	Beschleunigungskraft
k	:	Federkonstante
L	:	Federlänge im Gleichgewicht
v	:	Geschwindigkeit des Fahrzeugs
$x = v \cdot t$	:	zurückgelegte Strecke
$h(x)$	:	Fahrbahnunebenheiten
$m \cdot g$	:	Gravitation (Gewicht)
$\delta \cdot \dot{y}(t)$	:	Dämpfung.

Nach Normierung:

$$\boxed{\ddot{y}(t) + 2 \cdot \mu \cdot \dot{y}(t) + \omega_0^2 \cdot y(t) = f(t)}$$

mit Systemkonstanten μ, ω_0 und einer *vorgegebenen* **„Inhomogenität“** $f(t)$, welche durch die Fahrbahnunebenheiten bestimmt wird.
Für ein lineares System gilt immer

$$\begin{aligned} \text{allgemeine Lösung} \quad = \quad & \text{allgemeine homogene Lösung} \\ & (\text{von } \ddot{y} + 2 \cdot \mu \cdot \dot{y} + \omega_0^2 \cdot y = 0) \\ & + \text{ eine spezielle inhomogene Lösung.} \end{aligned}$$

Die allgemeine homogene Lösung ist kein Problem:

$$y_{hom}(t) = e^{-\mu \cdot t} \cdot \left(\alpha \cdot \sin\left(\sqrt{\omega_0^2 - \mu^2} \cdot t \right) + \beta \cdot \cos\left(\sqrt{\omega_0^2 - \mu^2} \cdot t \right) \right)$$

mit freien Konstanten α, β. Gesucht ist nun ein Lösungskonzept für die inhomogene Gleichung $\ddot{y}(t) + 2 \cdot \mu \cdot \dot{y}(t) + \omega_0^2 \cdot y(t) = f(t)$, das für (praktisch) alle rechten Seiten $f(t)$ funktioniert ($f(t)$ wird in der Regel eine sehr komplizierte Funktion sein).

Technik 1: (Fourier–Reihenentwicklung)
Diese Technik funktioniert für periodisches $f(t)$ und liefert periodische Lösungen $y(t)$ der DGL. Betrachte zunächst die spezielle Inhomogenität

$$f(t) = \alpha_k \cdot \cos(k \cdot t) + \beta_k \cdot \sin(k \cdot t)$$

mit irgendwelchen Werten für k, α_k, β_k. Durch den Ansatz

$$y(t) = a_k \cdot \cos(k \cdot t) + b_k \cdot \sin(k \cdot t)$$

eingesetzt in

$$\ddot{y}(t) + 2 \cdot \mu \cdot \dot{y}(t) + \omega_0^2 \cdot y(t) = f(t)$$

findet man durch Vergleich der cos und sin-Terme auf beiden Seiten

$$\begin{array}{rcr} -k^2 \cdot a_k \cdot \cos(k \cdot t) + 2 \cdot \mu \cdot b_k \cdot \cos(k \cdot t) + \omega_0^2 \cdot a_k \cdot \cos(k \cdot t) & = & \alpha_k \cdot \cos(k \cdot t) \\ -k^2 \cdot b_k \cdot \sin(k \cdot t) - 2 \cdot \mu \cdot a_k \cdot \sin(k \cdot t) + \omega_0^2 \cdot b_k \cdot \sin(k \cdot t) & & +\beta_k \cdot \sin(k \cdot t) \end{array}$$

folgendes Gleichungssystem für die gesuchten Koeffizienten a_k, b_k:

$$\begin{pmatrix} \omega_0^2 - k^2 & 2 \cdot \mu \\ -2 \cdot \mu & \omega_0^2 - k^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_k \\ b_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_k \\ \beta_k \end{pmatrix}.$$

Wichtige Beobachtung: **Aus der (linearen) DGL für $y(t)$ ist ein (lineares) *algebraisches* Gleichungssystem für die Koeffizienten a_k, b_k geworden**, das sich unmittelbar lösen läßt:

$$\begin{pmatrix} a_k \\ b_k \end{pmatrix} = \frac{1}{(\omega_0^2 - k^2)^2 + 4 \cdot \mu^2} \cdot \begin{pmatrix} \omega_0^2 - k^2 & -2 \cdot \mu \\ 2 \cdot \mu & \omega_0^2 - k^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_k \\ \beta_k \end{pmatrix}. \qquad (\#)$$

Ergebnis:

$$y(t) = a_k \cdot \cos(k \cdot t) + b_k \cdot \sin(k \cdot t)$$

mit a_k, b_k gegeben durch (#) löst die spezielle inhomogene DGL

$$\ddot{y}(t) + 2 \cdot \mu \cdot \dot{y}(t) + \omega_0^2 \cdot y(t) = \alpha_k \cdot \cos(k \cdot t) + \beta_k \cdot \sin(k \cdot t).$$

Dies ist natürlich nur ein sehr spezielles Resultat, aber es folgt unmittelbar durch Superposition das schon deutlich allgemeinere Resultat:

$$y(t) = \textstyle\sum_k \Big(a_k \cdot \cos(k \cdot t) + b_k \cdot \sin(k \cdot t) \Big) \qquad (\#\#)$$

mit a_k, b_k gegeben durch (#) löst die inhomogene DGL

$$\ddot{y}(t) + 2 \cdot \mu \cdot \dot{y}(t) + \omega_0^2 \cdot y(t) = \textstyle\sum_k \Big(\alpha_k \cdot \cos(k \cdot t) + \beta_k \cdot \sin(k \cdot t) \Big).$$

Damit haben wir eine komplette Lösungsformel (##) für alle rechten Seiten $f(t)$ gefunden, welche sich als

$$f(t) = \textstyle\sum_k \Big(\alpha_k \cdot \cos(k \cdot t) + \beta_k \cdot \sin(k \cdot t) \Big)$$

darstellen lassen. Wir werden in diesem Kapitel sehen:

Praktisch alle anwendungsrelevanten Funktionen f (stückweise glatt), die periodisch sind, lassen sich in solche eine (unendliche) Summe von sin/cos-Termen zerlegen!

Technik 2: (Fourier–Integraltransformation)
Diese Technik funktioniert für Inhomogenitäten $f(t)$ mit

$$\lim_{t\to\pm\infty} f(t) = 0$$

und liefert die spezielle inhomogene Lösung $y(t)$ von

$$\ddot{y}(t) + 2\cdot\mu\cdot\dot{y}(t) + \omega_0^2\cdot y(t) = f(t)$$

mit

$$\lim_{t\to\pm\infty} y(t) = \lim_{t\to\pm\infty} \dot{y}(t) = 0.$$

Wir definieren dazu die sogenannte **„Fourier–Transformierten"**

$$\widehat{y}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t)\cdot e^{i\cdot\omega\cdot t}\,dt, \quad \widehat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cdot e^{i\cdot\omega\cdot t}\,dt, \quad i = \sqrt{-1}.$$

Transformation der DGL:

$$\ddot{y}(t) + 2\cdot\mu\cdot\dot{y}(t) + \omega_0^2\cdot y(t) = f(t)$$

$$\Rightarrow \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\cdot\omega\cdot t}\cdot\Big(\ddot{y}(t) + 2\cdot\mu\cdot\dot{y}(t) + \omega_0^2\cdot y(t)\Big)\,dt = \widehat{f}(\omega).$$

Partielle Integration:

$$\Big[\dot{y}(t)\cdot e^{i\cdot\omega\cdot t}\Big]_{t=-\infty}^{t=\infty} + (2\cdot\mu - i\cdot\omega)\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\dot{y}(t)\cdot e^{i\cdot\omega\cdot t}\,dt + \omega_0^2\cdot\widehat{y}(\omega) = \widehat{f}(\omega).$$

Mit $\dot{y}(\pm\infty) = 0$:

$$(2\cdot\mu - i\cdot\omega)\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\dot{y}(t)\cdot e^{i\cdot\omega\cdot t}\,dt + \omega_0^2\cdot\widehat{y}(\omega) = \widehat{f}(\omega).$$

Noch eine partielle Integration:

$$\Big[(2\cdot\mu - i\cdot\omega)\cdot\dot{y}(t)\cdot e^{i\cdot\omega\cdot t}\Big]_{t=-\infty}^{t=\infty} + \Big(\omega_0^2 - i\cdot\omega\cdot(2\cdot\mu - i\cdot\omega)\Big)\cdot\widehat{y}(\omega) = \widehat{f}(\omega).$$

Mit $y(\pm\infty) = 0$:

$$\Big(\omega_0^2 - i\cdot\omega\cdot(2\cdot\mu - i\cdot\omega)\Big)\cdot\widehat{y}(\omega) = \widehat{f}(\omega).$$

Wichtige Beobachtung: **Aus der (linearen) DGL für $y(t)$ ist eine (lineare) *algebraische* Gleichung für $\widehat{y}(\omega)$ geworden**, die sich unmittelbar lösen läßt:

$$\boxed{\widehat{y}(\omega) = \frac{\widehat{f}(\omega)}{\omega_0^2 - \omega^2 - 2\cdot i\cdot\omega\cdot\mu}.}$$

Wichtige Tatsache (siehe das entsprechende Kapitel): Man kann aus

$$\widehat{y}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} y(\tau) \cdot e^{i \cdot \omega \cdot \tau} \, d\tau$$

die Funktion $y(t)$ zurückgewinnen (Fourier–Rücktransformation):

$$y(t) = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{y}(\omega) \cdot e^{-i \cdot \omega \cdot t} \, d\omega.$$

Damit haben wir eine allgemeine Lösungsformel für unsere DGL für beliebiges $f(t)$:

$$y(t) = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i \cdot \omega \cdot t} \cdot \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - 2 \cdot i \cdot \omega \cdot \mu} \cdot \Big(\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cdot e^{i \cdot \omega \cdot \tau} \, d\tau \Big) \, d\omega,$$

also

$$\boxed{y(t) = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i \cdot \omega \cdot (\tau - t)} \cdot f(\tau)}{\omega_0^2 - \omega^2 - 2 \cdot i \cdot \omega \cdot \mu} \, d\tau \, d\omega.}$$

Diese Darstellung über ein Doppelintegral gilt für beliebiges f mit verschwindenden Randbedingungen (sonst ist die Fourier–Transformation nicht definiert). Sie kann nun z.B. numerisch ausgewertet werden.

$\boxed{\downarrow 18.10.02}$

Technik 3: (Laplace–Transformation)
Diese Technik funktioniert für praktisch alle Inhomogenitäten $f(t)$ (mit der für in Anwendungen praktisch immer gegebenen Bedingung, dass $f(t)$ für $t \to \infty$ nicht exponentiell anwachsen darf).

Wir definieren dazu die sogenannten **„Laplace–Transformierten"**

$$\widehat{y}(s) = \int_0^{\infty} e^{-s \cdot t} \cdot y(t) \, dt, \quad \widehat{f}(s) = \int_0^{\infty} e^{-s \cdot t} \cdot f(t) \, dt, \quad s > 0.$$

Transformation der DGL:

$$\ddot{y}(t) + 2 \cdot \mu \cdot \dot{y}(t) + \omega_0^2 \cdot y(t) = f(t)$$

$$\Rightarrow \quad \int_0^{\infty} e^{-s \cdot t} \cdot \Big(\ddot{y}(t) + 2 \cdot \mu \cdot \dot{y}(t) + \omega_0^2 \cdot y(t) \Big) \, dt = \widehat{f}(s).$$

Partielle Integration:

$$\Big[\dot{y}(t) \cdot e^{-s \cdot t} \Big]_{t=0}^{t=\infty} + (2 \cdot \mu + s) \cdot \int_0^{\infty} \dot{y}(t) \cdot e^{-s \cdot t} \, dt + \omega_0^2 \cdot \widehat{y}(s) = \widehat{f}(s).$$

Wenn $\dot{y}(t)$ nicht gerade exponentiell für $t \to \infty$ wächst, verbleibt nur der Randterm für $t = 0$:

$$-\dot{y}(0) + (2 \cdot \mu + s) \cdot \int_0^{\infty} \dot{y}(t) \cdot e^{-s \cdot t} \, dt + \omega_0^2 \cdot \widehat{y}(s) = \widehat{f}(s).$$

Noch eine partielle Integration:

$$-\dot{y}(0) + \Big[(2\cdot\mu + s)\cdot y(t)\cdot e^{-s\cdot t}\Big]_{t=0}^{t=\infty} + (\omega_0^2 + 2\cdot\mu\cdot s + s^2)\cdot\widehat{y}(s) = \widehat{f}(s).$$

Wenn $y(t)$ nicht gerade exponentiell für $t \to \infty$ wächst, verschwindet wiederum der Randterm für $t = \infty$:

$$-\dot{y}(0) - (2\cdot\mu + s)\cdot y(0) + (\omega_0^2 + 2\cdot\mu\cdot s + s^2)\cdot\widehat{y}(s) = \widehat{f}(s).$$

Wichtige Beobachtung: **Aus der (linearen) DGL für $y(t)$ ist eine (lineare) *algebraische* Gleichung für $\widehat{y}(s)$ geworden**, die sich unmittelbar lösen läßt:

$$\boxed{\widehat{y}(s) = \frac{\widehat{f}(s) + \dot{y}(0) + (2\cdot\mu + s)\cdot y(0)}{\omega_0^2 + 2\cdot\mu\cdot s + s^2}.}$$

Hier sind sogar die Anfangsbedingungen gleich mit eingebaut. Verbleibendes Problem: kann man aus der Laplace–Transformierten $\widehat{y}(s)$ die Funktion $y(t)$ wieder zurückgewinnen? Die Antwort ist: „Im Prinzip ja!" Das ist technisch aber deutlich weniger hübsch als bei der Fourier–Transformation, nämlich durch ein Kurvenintegral in der komplexen Ebene (Residuensatz). Alternativ: für konkretes $\widehat{f}(s)$ durch Nachschlagen in Tabellen. Siehe das entsprechende Kapitel in diesem Skript.

Überblick: Das prinzipielle Lösungsschema für eine lineare inhomogene DGL mit komplizierter Inhomogenität:

DGL für $y(t)$	(Transformation) $\longrightarrow$ $\longleftarrow$ (Rücktransformation)	lineare algebraische Gleichung für a_k, b_k bzw. $\widehat{y}(\omega)$ bzw. $\widehat{y}(s)$

Wir haben 3 Typen von Transformationen vorgestellt:

1) Fourier–Reihen: für periodische Probleme. Die Rücktransformation ist trivial (Aufsummieren von sin / cos-Termen).

2) Fourier–Integrale: für Probleme mit verschwindenden Randbedingungen. Die Rücktransformation ist (zumindestens prinzipiell) einfach (Integral).

3) Laplace–Transformation: Randbedingungen praktisch beliebig (außer bei exponentieller Explosion im Unendlichen). Rücktransformation nicht einfach.

1.2 Abstrakte Vorbetrachtungen: Approximation im quadratischen Mittel

Bevor wir daran gehen, Funktionen $f(x)$ durch Reihen von sin und cos-Funktionen zu approximieren („Fourier–Reihen"), zunächst ein paar strukturelle allgemeine Vorbetrachtungen. Die Theorie der Fourier–Reihen ist nämlich nur ein Spezialfall wesentlich allgemeinerer Ideen, Funktionen „im quadratischen Mittel" durch Reihen einfacherer Funktionen zu approximieren.

1.2.1 Skalarprodukte und Hilbert–Räume

Definition 1.1: (Skalarprodukt)

Sei L ein Vektorraum (über $\mathbb{C}$). Die Abbildung $\langle .,. \rangle : L \times L \to \mathbb{C}$ heißt **„Skalarprodukt"**, *wenn gilt:*

a) Linearität:

$$\langle f, \alpha \cdot g_1 + \beta \cdot g_2 \rangle = \alpha \cdot \langle f, g_1 \rangle + \beta \cdot \langle f, g_2 \rangle$$

für alle $f, g_1, g_2 \in L$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

b) $\langle f, g \rangle = \overline{\langle g, f \rangle}$ (komplexe Konjugation) für alle $f, g \in L$.

c) $\langle f, f \rangle \geq 0$ für alle $f \in L$. (Beachte: b) impliziert $\langle f, f \rangle \in \mathbb{R}$.)

d) $\langle f, f \rangle = 0 \;\Leftrightarrow\; f = 0$.

Bemerkung 1.2: *Nach b) ergibt das Vertauschen der Einträge im Skalarprodukt den komplex konjugierten Wert. Nach a) kann man einen skalaren Faktor aus dem rechten Eintrag des Skalarprodukts herausziehen.* **Achtung:** *Beim Herausziehen eines skalaren Faktors aus der linken Seite taucht dieser wegen b) komplex konjugiert vor dem Skalarprodukt auf:*

$$\langle \alpha \cdot f, g \rangle = \overline{\langle g, \alpha \cdot f \rangle} = \overline{\alpha \cdot \langle g, f \rangle} = \overline{\alpha} \cdot \overline{\langle g, f \rangle} = \overline{\alpha} \cdot \langle f, g \rangle.$$

Analog ergibt sich die Linearität bezüglich des linken Eintrags im Skalarprodukt in der folgenden Form:

$$\langle \alpha \cdot f_1 + \beta \cdot f_2, g \rangle = \overline{\alpha} \cdot \langle f_1, g \rangle + \overline{\beta} \cdot \langle f_2, g \rangle.$$

Das Konzept eines Skalarproduktes ist auf endlich-dimensionalen Räumen (dem $\mathbb{R}^n$) bereits wohlbekannt. Es geht aber auch auf unendlich dimensionale Räume (Funktionenräume) über, wobei die Summen des Euklidischen Skalarprodukts zu Integralen werden:

Beispiel 1.3: a) Definition 1.1 verallgemeinert das wohlbekannte **Euklidische Skalarprodukt**

$$\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i, \quad x_i, y_i \in \mathbb{R}$$

auf dem Vektorraum $L = \mathbb{R}^n$.

b) Das komplexe Euklidische Skalarprodukt auf $L = \mathbb{C}^n$:

$$\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \rangle = \sum_{i=1}^{n} \overline{x_i} \cdot y_i, \quad x_i, y_i \in \mathbb{C}.$$

c) Sei $[a, b] \in \mathbb{R}$ ein Intervall, sei $L = \{f : [a, b] \to \mathbb{C}; f \text{ stetig}\}$. Dann definiert

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b \overline{f(x)} \cdot g(x)\, dx$$

ein Skalarprodukt auf den komplexen Funktionen über $[a, b]$ (das sogenannte L_2-Skalarprodukt).

d) Sei $[a, b] \in \mathbb{R}$ ein Intervall, sei $L = \{f : [a, b] \to \mathbb{C}; f \text{ stetig}\}$. Sei $w : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion mit $w(x) \geq 0$ für alle $x \in [a, b]$ (die sogenannte **„Gewichtsfunktion"**). Es gelte $w(x) = 0$ an höchstens endlich vielen Stellen in $[a, b]$. Dann definiert

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b w(x) \cdot \overline{f(x)} \cdot g(x)\, dx$$

ein Skalarprodukt auf den komplexen Funktionen über $[a, b]$ (das sogenannte **„gewichtete L_{2w}-Skalarprodukt"**). Die Bedingung $w(x) > 0$ (fast überall) garantiert, dass für stetiges f aus $\langle f, f \rangle = \int_a^b w(x) \cdot |f(x)|^2\, dx = 0$ folgt, dass $f(x) \equiv 0$ gelten muss. Das in c) betrachtete Skalarprodukt entspricht dem Standardgewicht $w(x) \equiv 1$.

Einem Skalarprodukt ist stets ein Längen- und damit ein Abstandsbegriff zugeordnet (eine „Norm"):

Definition und Satz 1.4:

Sei L ein Vektorraum mit einem Skalarprodukt $\langle .,. \rangle$. Dann ist $\|f\|_2 := \sqrt{\langle f, f \rangle}$ eine **„Norm"** *auf L, d.h., die Abbildung $\|\,.\,\|_2 : L \to [0, \infty)$ erfüllt:*

*a) $\|f + g\|_2 \leq \|f\|_2 + \|g\|_2$ für alle $f, g \in L$ (***„Dreiecksungleichung"***).*

*b) $\|\alpha \cdot f\|_2 = |\alpha| \cdot \|f\|_2$ für alle $f \in L$, $\alpha \in \mathbb{C}$ (***„Homogenität"***).*

c) $\|f\|_2 = 0 \;\Leftrightarrow\; f = 0$.

Diese Norm wird als **„L_2-Norm"** *bezeichnet.*

Beweis: Die Eigenschaften a) – c) folgen unmittelbar aus den geforderten Eigenschaften a) – d) der Definition 1.1.
Die Dreiecksungleichung a) ergibt sich folgendermaßen:

$$\|f+g\|_2^2 = \langle f+g, f+g\rangle = \langle f,f\rangle + \langle f,g\rangle + \langle g,f\rangle + \langle g,g\rangle$$

$$= \|f\|_2^2 + \langle f,g\rangle + \overline{\langle f,g\rangle} + \|g\|_2^2 \leq \|f\|_2^2 + 2\cdot|\langle f,g\rangle\| + \|g\|_2^2.$$

Mit einer Anleihe beim nächsten Satz (der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung $|\langle f,g\rangle| \leq \|f\|_2 \cdot \|g\|_2$) folgt

$$\|f+g\|_2^2 \leq \|f\|_2^2 + 2\cdot\|f\|_2\cdot\|g\|_2 + \|g\|_2^2 = (\|f\|_2 + \|g\|_2)^2.$$

b) ergibt sich durch $\|\alpha\cdot f\|_2^2 = \langle \alpha\cdot f, \alpha\cdot f\rangle = \alpha\cdot\underline{\alpha}\cdot\langle f,f\rangle = |\alpha|^2\cdot\|f\|_2^2$.
c) ist nichts anderes als Definition 1.1.d).

Q.E.D.

Die folgende Aussage ist eher technischer Natur (ein nützliches Hilfsmittel in Beweisen):

Satz 1.5: (Die Cauchy–Schwarzsche Ungleichung)

Für alle $f,g \in L$ gilt $|\langle f,g\rangle|^2 \leq \langle f,f\rangle\cdot\langle g,g\rangle$, d.h., $|\langle f,g\rangle| \leq \|f\|_2\cdot\|g\|_2$. Das Gleichheitszeichen gilt genau dann, wenn f und g bis auf eine multiplikative Konstante übereinstimmen.

Beweis: Übungsaufgabe 6.

Bemerkung 1.6: *Mit der Norm hat man einen Abstandsbegriff: Als Abstand zweier Elemente $f,g \in L$ betrachtet man $\|f-g\|_2$. Mit 1.4.d) haben 2 Elemente genau dann den Abstand 0, wenn sie übereinstimmen.*

Definition 1.7: (Konvergenz)

Eine Folge (f_n) von Elementen in L heißt **„konvergent"** *gegen den* **„Grenzwert"** *$f^* \in L$, wenn die Abstände zum Grenzwert gegen 0 konvergieren:*

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f^*\|_2 = 0.$$

Es wird die (vom $\mathbb{R}^n$ vertraute) Notation $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f^*$ benutzt.

Man nennt die Konvergenz bezüglich der L_2–Norm auch **„Konvergenz im quadratischen Mittel"**.

Beispiel 1.8: Betrachte $L = \{f : [-1,1] \to \mathbb{R}; f \text{ stetig}\}$ mit der L_2–Norm $\|f\|_2 = \int_{-1}^{1} |f(x)|^2\, dx$. Betrachte die folgenden Funktionen, die im Bereich $[0, 1/n]$ linear von 0 bis 1 wachsen:

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } -1 \le x \le 0, \\ n \cdot x & \text{für } 0 \le x \le \frac{1}{n}, \\ 1 & \text{für } \frac{1}{n} \le x \le 1. \end{cases}$$

Bei vorgegebenem x konvergieren diese Werte offensichtlich punktweise gegen

$$f^*(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } -1 \le x \le 0, \\ 1 & \text{für } 0 < x \le 1. \end{cases}$$

Mit

$$\|f_n - f^*\|_2 = \int_{-1}^{1} (f_n(x) - f^*(x))^2\, dx = \int_0^{1/n} (f_n(x) - f^*(x))^2\, dx$$
$$= \int_0^{1/n} (n \cdot x - 1)^2\, dx = \frac{1}{3 \cdot n}$$

konvergiert die Funktionenfolge f_n auch bezüglich der L_2–Norm gegen f^*. Aber (Problem!): f^* ist nicht stetig, also $f^* \notin L$.

23.10.02↓

Das Problem, dass die Grenzfunktion einer Folge stetiger Funktionen nicht mehr stetig zu sein braucht, soll nun angegangen werden. Dazu zunächst eine mehr mathematisch–technische Definition (die in späteren Anwendungen dann nicht mehr so interessant sein wird):

Definition 1.9: (Vollständigkeit)

Eine Folge (f_n) heißt **„Cauchy–Folge"** *bezüglich einer Norm $\|\,.\,\|$, wenn zu jedem $\epsilon > 0$ ein $N(\epsilon)$ existiert, sodass $\|f_n - f_m\| < \epsilon$ gilt für alle $n, m \ge N(\epsilon)$.*

Ein Raum mit einer Norm heißt **„vollständig"**, *wenn jede Cauchy–Folge in diesem Raum einen Grenzwert besitzt, der wieder in diesem Raum liegt.*

Definition 1.10: (Hilberträume)

Ein Vektorraum mit einem Skalarprodukt $\langle\,.\,\rangle$ heißt **„Hilbert–Raum"**, *wenn er bezüglich der L_2–Norm $\|f\|_2 = \sqrt{\langle f, f\rangle}$ vollständig ist.*

Bemerkung 1.11: *Beispiel 1.8 zeigt, dass der Raum der stetigen Funktionen bezüglich der L_2–Norm* <u>nicht vollständig</u> *ist. (Die Funktionenfolge f_n in diesem Beispiel ist eine Cauchy–Folge. Der Grenzwert f^* (es kann nur einen geben) ist aber unstetig.) Es ist daher im Folgenden nicht sinnvoll, den Raum der stetigen Funktionen weiter zu betrachten. Stattdessen sucht man nach dem kleinsten bzgl. der L_2–Norm vollständigen Raum, der die stetigen Funktionen umfasst. Dieser stellt sich als der Raum der quadratintegrablen Funktionen heraus (Definition und Satz1.12).*

Wir sind nun endlich bei der entscheidenden Definition angelangt:

Definition und Satz 1.12:

Zu einem Intervall $[a,b] \subset \mathbb{R}$ und einer glatten Gewichtsfunktion $w(x)$ (siehe Beispiel 1.3) wird der **„Hilbert–Raum der quadratintegrablen Funktionen"**

$$L_{2w}([a,b]) = \{f : [a,b] \to \mathbb{C};\ \int_a^b w(x) \cdot |f(x)|^2\, dx < \infty\}$$

mit dem gewichteten Skalarprodukt

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b w(x) \cdot \overline{f(x)} \cdot g(x)\, dx$$

definiert. Dieser Raum ist in der Tat vollständig bezüglich der von diesem Skalarprodukt erzeugten L_2-Norm.
Für die triviale Gewichtsfunktion $w(x) \equiv 1$ wird dieser Raum auch mit $L_2([a,b])$ bezeichnet.

Bemerkungen und Interpretationen 1.13:

a) Da in der folgenden Theorie praktisch alle Aussagen unabhängig vom konkreten Intervall $[a,b]$ und dem Gewicht $w(x)$ sind, sprechen wir kurz von **„L_2–Räumen"**, **„L_2–Funktionen"**, **„L_2–Normen"** *etc. und unterdrücken in der Sprech– und Schreibweise $[a,b]$ und $w(x)$.*

b) Damit die oben definierten L_2–Räume wirklich vollständig sind, muss man statt des Riemann–Integrals einen verallgemeinerten Integralbegriff benutzen: das sogenannte **Lebesgue–Integral**. *Außer für sehr pathologische (irreguläre) Funktionen stimmt das Lebesgue–Integral aber mit dem Riemann–Integral überein. Wir werden uns daher mit diesen sehr mathematisch–technischen Details nicht abmühen. Einen exakten Beweis für die Vollständigkeit des L_2–Raums können wir folglich hier nicht führen.*

c) Zu jeder L_2–Funktion f gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ eine stetige Funktion g, die f approximiert: $\|f - g\|_2 < \epsilon$. Das liefert eine einfache Beweistechnik im L_2: zeige die behauptete Aussage zunächst nur für stetige Funktionen. Betrachte dann eine konvergente Folge stetiger Funktionen und zeige, dass die Aussage auf den (eventuell unstetigen) Grenzwert in L_2 übergeht.

d) Für endliche Intervalle $[a,b]$ liegen alle auf $[a,b]$ stetigen Funktionen in $L_{2w}([a,b])$. Unstetige Funktionen mit Sprungstellen können ebenfalls integriert werden und liegen im L_2–Raum. Sogar Funktionen mit (milden) Singularitäten sind quadratintegrabel, z.B.:

$$f(x) = x^{-\frac{1}{3}} \in L_2([0,1]), \text{ denn } \int_0^1 (x^{-1/3})^2 \, dx = 3 < \infty.$$

e) **Achtung:** *Da $L_{2w}([a,b])$ auch unstetige Funktionen enthält, kann man stetige Funktionen an einigen Stellen punktweise umdefinieren, ohne dass dies Integrale ändert.* **In L_2–Räumen werden zwei Funktionen f, g miteinander identifiziert, wenn sie „fast überall" übereinstimmen**. *Der Begriff* **„fast überall"** *bedeutet dabei, dass für die Funktion*

$$\chi(x) = \begin{cases} 0 & \text{für alle } x \text{ mit } f(x) = g(x), \\ 1 & \text{für alle } x \text{ mit } f(x) \neq g(x) \end{cases}$$

gilt: $\int_a^b w(x) \cdot \chi(x) \, dx = 0$. Dies ist recht technisch. Für uns möge hier die Vorstellung ausreichen, dass wir mit „fast überall" meinen: „bis auf endlich viele Ausnahmepunkte".

f) Für quadratintegrable Funktionen existiert das Skalarprodukt selbst dann, wenn die Funktionen singulär sind. Dies liegt an der Cauchy–Schwarzschen Ungleichung 1.5. Diese Ungleichung garantiert weiterhin, dass die Summe zweier L_2-Funktionen wieder eine L_2-Funktion ist (d.h., L_2 ist in der Tat ein Vektorraum).

g) Die folgende Theorie von (verallgemeinerten) Fourier–Reihen gilt für beliebige L_2–Funktionen, also auch für unstetige und sogar (mild-)-singuläre Funktionen. Gerade diese Allgemeinheit macht die Fourier–Analyse für Anwendungen interessant.

1.2.2 Orthogonale Systeme

Im $\mathbb{R}^n$ mit dem Euklidischen Skalarprodukt (den wir nun als Hilbert–Raum ansehen) ist die Orthogonalität zweier Vektoren dadurch charakterisiert, dass das Skalarprodukt verschwindet. Wir benutzen die selbe Notation für allgemeine Hilbert–Räume.

Definition 1.14: (Orthogonalität)

Zwei Elemente f, g eines Hilbert–Raums mit $\langle f, g \rangle = 0$ heissen **„orthogonal"**. *Eine Familie $\{f_n\}$ von Hilbert–Raumelementen nennt man ein* **„orthogonales System"**, *wenn alle Paare f_n, f_m mit $m \neq n$ orthogonal sind. Gilt zusätzlich $\langle f_n, f_n \rangle = 1$, so heißt das System* **„orthonormal"**.

Beispiel 1.15: Hier ist das entscheidende Beispiel, das uns im Folgenden am meisten interessieren wird:

> Die Familie der komplexen Exponentialfunktionen $\{e^{i\cdot n\cdot x}\}$, $i = \sqrt{-1}$, $n \in \mathbb{Z}$ ist ein Orthogonalsystem auf $L_2([-\pi, \pi])$.

Dies ist leicht nachgerechnet. Für $n \neq m$ gilt:

$$\langle e^{i\cdot m\cdot x}, e^{i\cdot n\cdot x}\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \overline{e^{i\cdot m\cdot x}} \cdot e^{i\cdot n\cdot x}\ dx = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i\cdot m\cdot x} \cdot e^{i\cdot n\cdot x}\ dx$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\cdot(n-m)\cdot x}\ dx = \left[\frac{e^{i\cdot(n-m)\cdot x}}{i\cdot(n-m)}\right]_{x=-\pi}^{x=\pi} = \frac{(-1)^{n-m} - (-1)^{n-m}}{i\cdot(n-m)} = 0.$$

Für $m = n$:

$$\langle e^{i\cdot n\cdot x}, e^{i\cdot n\cdot x}\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i\cdot n\cdot x} \cdot e^{i\cdot n\cdot x}\ dx = \int_{-\pi}^{\pi} 1\ dx = 2\cdot\pi.$$

Mit der Euler–Identität

$$e^{i\cdot n\cdot x} = \cos(n\cdot x) + i\cdot\sin(n\cdot x)$$

bzw.

$$\cos(n\cdot x) = \frac{e^{i\cdot n\cdot x} + e^{-i\cdot n\cdot x}}{2}, \quad \sin(n\cdot x) = \frac{e^{i\cdot n\cdot x} - e^{-i\cdot n\cdot x}}{2\cdot i}$$

ergibt sich für die Familie reeller Funktionen $\{1, \cos(x), \sin(x), \cos(2\cdot x), \sin(2\cdot x), \dots\}$:

$$\begin{aligned}
\langle\cos(m\cdot x), \cos(n\cdot x)\rangle &= 0, \quad m \neq n,\\
\langle\sin(m\cdot x), \sin(n\cdot x)\rangle &= 0, \quad m \neq n,\\
\langle\cos(m\cdot x), \sin(n\cdot x)\rangle &= 0 \quad \text{(auch für } m = n).
\end{aligned}$$

Die konstante Funktion 1 ist dabei $\cos(m\cdot x)$ mit $m = 0$. Für $m = n$ gilt:

$$\begin{aligned}
\langle 1, 1\rangle &= 2\cdot\pi,\\
\langle\cos(n\cdot x), \cos(n\cdot x)\rangle &= \pi \qquad (n > 0),\\
\langle\sin(n\cdot x), \sin(n\cdot x)\rangle &= \pi \qquad (n > 0).
\end{aligned}$$

> Die trigonometrischen Funktionen $\{1, \cos(x), \sin(x), \cos(2\cdot x), \sin(2\cdot x), \dots\}$ bilden ein Orthogonalsystem auf $L_2([-\pi, \pi])$.

Will man Entwicklungen nach „einfachen Basisfunktionen" $f_1, f_2, \dots$ vornehmen, so ist es technisch sehr vorteilhaft, wenn diese ein Orthogonalsystem bilden. Ist dies nicht der Fall, so kann die Folge $f_1, f_2, \dots$ mit einem sehr einfachen Algorithmus durch Linearkombinationen in ein Orthogonalsystem verwandelt werden:

Gram-Schmidt-Orthogonalisierung 1.16:

Sei $f_0, f_1, \dots$ eine Folge linear unabhängiger Hilbert–Raumelemente. Definiere rekursiv

$$F_n = f_n - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\langle F_k, f_n \rangle}{\langle F_k, F_k \rangle} \cdot F_k$$

mit $F_0 = f_0$. Dann gilt:

$$\boxed{\{F_0, F_1, \dots\} \text{ ist ein Orthogonalsystem.}}$$

Der von $f_0, \dots, f_n$ aufgespannte Teilraum ist identisch mit dem von $F_0, \dots, F_n$ aufgespannten Teilraum (d.h., eine Funktion kann genau dann als Linearkombination von $f_0, \dots, f_n$ geschrieben werden, wenn sie als Linearkombination von $F_0, \dots, F_n$ geschrieben werden kann). Dies ist klar, da auf Grund der Rekursion jedes F_n als Linearkombination von $f_0, \dots, f_n$ geschrieben werden kann und auch umgekehrt jedes f_n als Linearkombination von $F_0, \dots, F_n$.

Beweis: Induktionsbehauptung: $F_0, \dots, F_n$ sind paarweise orthogonal.
Induktionsstart $n = 1$:

$$\langle F_0, F_1 \rangle = \langle F_0, f_1 - \frac{\langle F_0, f_1 \rangle}{\langle F_0, F_0 \rangle} \cdot F_0 \rangle = \langle F_0, f_1 \rangle - \frac{\langle F_0, f_1 \rangle}{\langle F_0, F_0 \rangle} \cdot \langle F_0, F_0 \rangle = 0.$$

Induktionsschritt $n - 1 \to n$: Für $m = 0, 1, \dots, n-1$ gilt

$$\langle F_m, F_n \rangle = \langle F_m, f_n - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\langle F_k, f_n \rangle}{\langle F_k, F_k \rangle} \cdot F_k \rangle = \langle F_m, f_n \rangle - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\langle F_k, f_n \rangle}{\langle F_k, F_k \rangle} \cdot \langle F_m, F_k \rangle.$$

In dieser Summe verschwinden nach Induktionsvoraussetzung alle Summanden außer dem mit $k = m$. Es folgt:

$$\langle F_m, F_n \rangle = \langle F_m, f_n \rangle - \frac{\langle F_m, f_n \rangle}{\langle F_m, F_m \rangle} \cdot \langle F_m, F_m \rangle = 0.$$

Q.E.D.

Beispiel 1.17: Wir konstruieren orthogonale Polynome über dem Intervall $[-1, 1]$ bezüglich des Standardgewichts $w(x) \equiv 1$. Wir starten mit den Monomen $(f_n) = (1, x, x^2, \dots)$. Durch Gram-Schmidt-Orthogonalisierung entstehen hieraus die sogenannten **„Legendre–Polynome"**:

$$F_0(x) = 1,$$

$$F_1(x) = x - \frac{\langle F_0(x), x \rangle}{\langle F_0(x), F_0(x) \rangle} \cdot F_0(x) = x,$$

$$F_2(x) = x^2 - \frac{\langle F_0(x), x^2\rangle}{\langle F_0(x), F_0(x)\rangle} \cdot F_0(x) - \frac{\langle F_1(x), x^2\rangle}{\langle F_1(x), F_1(x)\rangle} \cdot F_1(x) = x^2 - \frac{1}{3},$$

$$F_3(x) = \cdots = x^3 - \frac{3}{5} \cdot x,$$

$$F_4(x) = \cdots = x^4 - \frac{6}{7} \cdot x^2 + \frac{3}{35},$$

$$F_5(x) = \cdots = x^5 - \frac{10}{9} \cdot x^3 + \frac{5}{21} \cdot x$$

usw. Anmerkung: in der Literatur bezeichnet man als Legendre–Polynome die etwas anders normierten Polynome

$$P_n(x) = \frac{(2 \cdot n)!}{2^n \cdot (n!)^2} \cdot F_n(x).$$

Bemerkung 1.18: *Aus einem Orthogonalsystem $\{F_0, F_1, \dots\}$ kann man sofort ein Orthonormalsystem $\{\tilde{F}_0, \tilde{F}_1, \dots\}$ machen, indem man $\tilde{F}_n = F_n / \|F_n\|_2$ setzt.*

1.2.3 Bestapproximation und Konvergenz im quadratischen Mittel

↓25.10.02

Wir betrachten ein Orthogonalsystem $\{F_0, F_2, \dots\}$ und versuchen zunächst, ein Hilbert–Raumelement f durch eine endliche Linearkombination

$$f \approx \sum_{k=0}^{n} c_k \cdot F_k$$

zu approximieren. Welche Koeffizienten c_k sollte man wählen, damit der Abstand zwischen f und der Summe im L_2–Sinne möglichst klein wird? Als Vorüberlegung betrachten wir zunächst, wie man für ein exakt darstellbares f die Entwicklungskoeffizienten c_k aus f ermittelt:

$$f = \sum_{k=0}^{n} c_k \cdot F_k \quad \Rightarrow \quad \langle F_m, f\rangle = \langle F_m, \sum_{k=0}^{n} c_k \cdot F_k\rangle = \sum_{k=0}^{n} c_k \cdot \langle F_m, F_k\rangle.$$

Wegen der Orthogonalität verbleibt für $m \in \{0, \dots, n\}$ von der Summe nur der Term mit $k = m$:

$$\langle F_m, f\rangle = c_m \cdot \langle F_m, F_m\rangle, \quad \text{also} \quad c_m = \frac{\langle F_m, f\rangle}{\langle F_m, F_m\rangle}.$$

Definition 1.19: (Verallgemeinerte Fourier–Koeffizienten)

Für eine L_2–Funktion f heißen

$$c_k = \frac{\langle F_k, f\rangle}{\langle F_k, F_k\rangle}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

die (verallgemeinerten) **„Fourier–Koeffizienten bezüglich des Orthogonalsystems $\{F_0, F_1, \ldots\}$"**. *Die Linearkombination*

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} c_k \cdot F_k$$

heißt (verallgemeinerte) **„Fourier–Approximation von f bezüglich des Orthogonalsystems"**.

Das folgende elementare Ergebnis zeigt, dass diese Fourier–Koeffizienten in der Tat die beste Koeffizientenwahl darstellen, um den Abstand zwischen f und einer Linearkombination $\sum_k \alpha_k F_k$ im L_2–Sinne möglichst klein zu machen:

Lemma 1.20: (Besselsche (Un-)Gleichung)

Sei $\{F_0, \ldots, F_n\}$ ein Orthogonalsystem.

a) *Für jede Wahl von Koeffizienten $\alpha_k \in \mathbb{C}$ gilt die* **„allgemeine Besselsche Gleichung"**

$$\left\| f - \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \cdot F_k \right\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \sum_{k=0}^{n} |c_k|^2 \cdot \|F_k\|_2^2 + \sum_{k=0}^{n} |\alpha_k - c_k|^2 \cdot \|F_k\|_2^2,$$

wo die c_k die Fourier–Koeffizienten aus Definition 1.19 sind.

b) *Für die Wahl $\alpha_k = c_k$ folgt die* **„spezielle Besselsche Gleichung"**

$$\left\| f - \sum_{k=0}^{n} c_k \cdot F_k \right\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \sum_{k=0}^{n} |c_k|^2 \cdot \|F_k\|_2^2.$$

c) *Es folgt die* **„Besselsche Ungleichung"**

$$\sum_{k=0}^{n} |c_k|^2 \cdot \|F_k\|_2^2 \leq \|f\|_2^2.$$

Beweis: Die allgemeine Besselsche Gleichung a) wird als Übungsaufgabe 1 nachgerechnet. Hieraus folgen sofort b) und c).

Q.E.D.

Interpretation 1.21:

Die allgemeine Besselsche Gleichung liefert sofort, dass der Abstand

$$\left\| f - \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \cdot F_k \right\|_2$$

durch die Wahl der Koeffizienten $\alpha_k = c_k$ minimiert wird. Die Fourier–Approximation von f wird daher als **„Bestapproximation von f im quadratischen Mittel"** *bezüglich des Orthogonalsystems bezeichnet. Der Abstand zwischen f und dieser Bestapproximation (der* **„Approximationsfehler"***) ist durch*

$$\left\| f - \sum_{k=0}^{n} c_k \cdot F_k \right\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \sum_{k=0}^{n} |c_k|^2 \cdot \|F_k\|_2^2$$

gegeben. Eine Besonderheit dieser L_2–Bestapproximation ist, dass die Entwicklungskoeffizienten c_k nicht von der Anzahl n der benutzten Entwicklungselmente $F_0, \ldots, F_n$ abhängen! Man kann den Approximationsfehler kleiner und kleiner machen, indem man einfach immer mehr Elemente im Orthogonalsystem hinzunimmt (also n anwachsen läßt), ohne dass man die Koeffizienten anpassen muss!

Nun geht es um die Frage, was passiert, wenn man den Grenzwert $n \to \infty$ betrachtet. Konvergiert die Fourier–Approximation (im L_2–Sinne) gegen f? Dies kann nicht allgemein beantwortet werden, sondern hängt vom betrachteten Orthogonalsystem $\{F_0, F_1, \ldots\}$ ab:

Definition 1.22: (Vollständige Orthonormalsysteme)

Ein Orthogonalsystem $\{F_0, F_1, \ldots\}$ heißt **„vollständig"***, wenn für jedes f im Hilbert–Raum die Fourier–Approximation im L_2–Sinne gegen f konvergiert:*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} c_k \cdot F_k = f,$$

d.h.,

$$\lim_{n\to\infty} \left\| f - \sum_{k=0}^{n} c_k \cdot F_k \right\|_2^2 = 0.$$

Mit der Besselschen Gleichung ergibt sich sofort die folgende Charakterisierung vollständiger Orthogonalsysteme, die mathematisch aber recht trivial ist und keinerlei effektives Hilfsmittel liefert, die Vollständigkeit eines Orthogonalsystems zu überprüfen:

Satz 1.23: (Parsevalsche Gleichung)

Ein Orthogonalsystem $\{F_0, F_1, \dots\}$ ist genau dann vollständig, wenn für jedes Hilbert–Raumelement f die folgende **„Parsevalsche Gleichung"** *gilt:*

$$\sum_{k=0}^{\infty} |c_k| \cdot \|F_k\|_2^2 = \|f\|_2^2.$$

Beweis: Die Gleichung folgt sofort aus Satz 1.20.b).

Q.E.D.

Das einzig für uns Interessante an dieser Aussage ist die folgende Interpretation:

Physikalische Interpration 1.24:

In vielen physikalischen Anwendungen stellt das „Signal" f ein Feld (Strom, Spannung, elektrisches oder magnetisches Feld) dar, dessen Quadrat als eine physikalische Leistung oder als lokale Energiedichte zu interpretieren ist. Das die L_2–Norm definierende Integral hat dann die Interpretation einer Energie, genauer, einer über eine Periode des Signals „gemittelten Energie".

Bei einer Fourier–Entwicklung $f = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \cdot F_k$ sprechen Physiker auch von einer „Zerlegung des Signals" in die „Fourier–Moden" F_k.

Die Parsevalsche Gleichung besagt, dass sich die Energie des Signals **vollständig** *auf die Fourier–Moden verteilen muss. Ist dies nicht der Fall (d.h., ist das Orthogonalsystem nicht vollständig), so muss es weitere Anteile des Signals geben, die durch die Fourier–Moden nicht erfasst werden.*

1.3 Fourier–Reihen

Die allgemeinen Hilbert–Raumstrukturen der Fourier–Reihen wurde im letzten Abschnitt in etwas abstrakter Art und Weise zusammengetragen. Nun wird es endlich konkret. Wir betrachten das in Beispiel 1.15 diskutierte spezielle Orthogonalsystem

$$\{e^{i \cdot k \cdot x}\}_{k \in \mathbb{Z}} \quad (i = \sqrt{-1})$$

auf dem Hilbert–Raum $L_2([-\pi, \pi])$. Ziel ist es, eine auf dem Intervall $[-\pi, \pi]$ gegebene Funktion nach dem obigen Orthogonalsystem zu zerlegen und zu studieren, ob und wie die Fourier–Approximationen gegen die Funktion konvergieren.

Rechentechnisch ist es meist einfacher, die komplexen Exponentialfunktionen zu verwenden. Äquivalenterweise kann man die trigonometrischen Funktionen

$$\{1, \cos(x), \sin(x), \cos(2 \cdot x), \sin(2 \cdot x), \dots\}$$

betrachten, die für reelle Funktionen zu reellen Formeln führen und daher im Anwendungskontext oft physikalisch direkter zu interpretieren sind.

1.3.1 Definition der trigonometrischen Fourier–Reihen

Wir fassen zunächst die Ergebnisse von Beispiel 1.15 zusammen. Der Unterschied zwischen der „komplexen" und der „reellen" Darstellung besteht lediglich darin, dass statt des komplexen Pärchens $(e^{i\cdot k\cdot x}, e^{-i\cdot k\cdot x})$ in der reellen Darstellung das Pärchen $(\cos(k\cdot x), \sin(k\cdot x))$ benutzt wird, das mit der Euler–Formel

$$e^{i\cdot k\cdot x} = \cos(k\cdot x) + i\cdot \sin(k\cdot x)$$

bzw.

$$\cos(k\cdot x) = \frac{e^{i\cdot k\cdot x} + e^{-i\cdot k\cdot x}}{2}, \quad \sin(k\cdot x) = \frac{e^{i\cdot k\cdot x} - e^{-i\cdot k\cdot x}}{2\cdot i}$$

dem komplexen Pärchen äquivalent ist:

Definition 1.25: (Die trigonometrische Fourier–Entwicklung)

Zu einer Funktion $f \in L_2([-\pi,\pi])$ definiere die **„Fourier–Koeffizienten"**

$$c_k = \frac{\langle e^{i\cdot k\cdot x}, f\rangle}{\langle e^{i\cdot k\cdot x}, e^{i\cdot k\cdot x}\rangle} = \frac{1}{2\cdot\pi}\cdot\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot e^{-i\cdot k\cdot x}\,dx$$

mit $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Alternativ definiere

$$a_k = \frac{\langle \cos(k\cdot x), f\rangle}{\langle \cos(k\cdot x), \cos(k\cdot x)\rangle} = \begin{cases} \dfrac{1}{2\cdot\pi}\cdot\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx, & k = 0, \\ \dfrac{1}{\pi}\cdot\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot\cos(k\cdot x)\,dx, & k = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

sowie

$$b_k = \frac{\langle \sin(k\cdot x), f\rangle}{\langle \sin(k\cdot x), \sin(k\cdot x)\rangle} = \frac{1}{\pi}\cdot\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot\sin(k\cdot x)\,dx, \quad k = 1, 2, \ldots .$$

Die entsprechenden **„Fourier–Approximationen"** *sind*

$$S_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k\cdot e^{i\cdot k\cdot x} = a_0 + \sum_{k=1}^{n}\Big(a_k\cdot\cos(k\cdot x) + b_k\cdot\sin(k\cdot x)\Big)$$

mit $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Mit der Euler–Formel ergibt sich folgender Zusammenhang zwischen den beiden Darstellungen:

$$\sum_{k=-n}^{n} c_k \cdot e^{i\cdot k\cdot x} = c_0 + \sum_{k=1}^{n} \Big(c_k \cdot e^{i\cdot k\cdot x} + c_{-k} \cdot e^{-i\cdot k\cdot x} \Big)$$

$$= c_0 + \sum_{k=1}^{n} \Big(c_k \cdot \Big(\cos(k\cdot x) + i\cdot \sin(k\cdot x) \Big) + c_{-k} \cdot \Big(\cos(k\cdot x) - i\cdot \sin(k\cdot x) \Big) \Big)$$

$$= \underbrace{c_0}_{a_0} + \sum_{k=1}^{n} \Big(\underbrace{(c_k + c_{-k})}_{a_k} \cdot \cos(k\cdot x) + \underbrace{i\cdot (c_k - c_{-k})}_{b_k} \cdot \sin(k\cdot x) \Big).$$

Zusammenhang 1.26:

Der Zusammenhang zwischen den komplexen Fourier–Koeffizienten c_k und den reellen Koeffizienten a_k, b_k ist gegeben durch:

$$\boxed{\begin{aligned} a_k &= c_k + c_{-k} \\ b_k &= i\cdot (c_k - c_{-k}) \end{aligned}} \qquad \boxed{\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{2}\cdot (a_k - i\cdot b_k) \\ c_{-k} &= \frac{1}{2}\cdot (a_k + i\cdot b_k) \end{aligned}}$$

mit $k = 1, 2, \ldots$ und zusätzlich $\boxed{a_0 = c_0}$.

Bemerkung 1.27: *Ist die Funktion f reell, so sind die Fourier–Koeffizienten a_k, b_k reell. In der komplexen Entwicklung entspricht dies der Bedingung*

$$c_{-k} = \overline{c_k}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Bemerkung 1.28: *Für die Definition der Fourier–Koeffizienten a_k, b_k bzw. c_k sind nur die Werte der Funktion f auf dem Intervall $[-\pi, \pi]$ von Belang. Man sollte sich aber gleich angewöhnen, sich die Funktion f als $2\cdot\pi$–periodisch auf ganz $\mathbb{R}$ fortgesetzt vorzustellen, denn die Fourier–Approximationen*

$$S_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k \cdot e^{i\cdot k\cdot x} = a_0 + \sum_{k=1}^{n} \Big(a_k \cdot \cos(k\cdot x) + b_k \cdot \sin(k\cdot x) \Big)$$

sind ja ebenfalls $2\cdot\pi$–periodisch. Das liefert gleich die richtige Sichtweise für die im Abschnitt 1.3.3 folgenden Betrachtungen zur punktweisen Konvergenz.

Bemerkung 1.29: *Ist die Funktion f gerade oder ungerade, so lassen sich die Integrale $\int_{-\pi}^{\pi}$, die die Fourier–Koeffizienten bestimmen, vereinfachen. Die Teilintegrale $\int_{-\pi}^{0}$ stimmen (eventuell bis auf ein Vorzeichen) mit den Teilintegralen $\int_{0}^{\pi}$ überein und verdoppeln diesen Wert oder löschen ihn zu 0 aus:*
Für gerade Funktionen f (also $f(x) = f(-x)$) gilt

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,dx, \quad a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cdot\cos(k\cdot x)\,dx, \quad b_k = 0$$

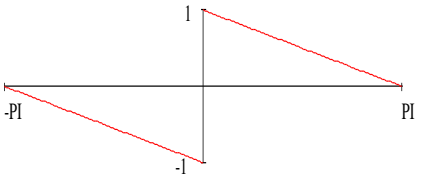
mit $k = 1, 2, \ldots$.
Für ungerade Funktionen f (also $f(x) = -f(-x)$) gilt

$$a_0 = 0, \quad a_k = 0, \quad b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cdot\sin(k\cdot x)\,dx$$

mit $k = 1, 2, \ldots$.

Beispiel 1.30: Einige Beispiele von Fourier–Reihen:
a) Die („Sägezahn"–)Funktion

$$f(x) = \begin{cases} -1 - \dfrac{x}{\pi} & \text{für } x \in [-\pi, 0), \\ 1 - \dfrac{x}{\pi} & \text{für } x \in [0, \pi] \end{cases}$$



ist ungerade, also $a_k = 0\ \forall k = 0, 1, 2, \ldots$.

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot\sin(k\cdot x)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(1 - \frac{x}{\pi}\right)\cdot\sin(k\cdot x)\,dx$$

$$= \frac{1}{k} - \frac{\sin(k\cdot\pi)}{\pi\cdot k^2} = \frac{1}{k} \quad \forall\ k = 1, 2, \ldots,$$

also

$$f(x) \sim \sum_{k=1,2,\ldots} \frac{\sin(k\cdot x)}{k}.$$

b) Die Funktion $f(x) = |x|$ ist gerade, also $b_k = 0\ \forall k = 1, 2, \ldots$.

$$a_0 = \frac{1}{2\cdot\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\,dx = \frac{\pi}{2},$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot\cos(k\cdot x)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cdot\cos(k\cdot x)\,dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\cdot\left[\frac{\cos(k\cdot x)}{k^2} + \frac{x\cdot\sin(k\cdot x)}{k}\right]_{x=0}^{x=\pi} = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{(-1)^k - 1}{k^2} = \begin{cases} -\dfrac{4}{\pi\cdot k^2}, & k = 1, 3, 5, \ldots, \\ 0, & k = 2, 4, 6, \ldots, \end{cases}$$

also

$$|x| \sim \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\cdot\sum_{k=1,3,5,\ldots}\frac{\cos(k\cdot x)}{k^2}.$$

28.10.02↓

1.3.2 Konvergenz im quadratischen Mittel

Satz 1.31: (Fourier–Koeffizienten bestimmen eindeutig die Funktion)

Verschwinden alle Fourier–Koeffizienten einer Funktion $f \in L_2([a,b])$, so gilt $f \equiv 0$ (fast überall). Es folgt, dass 2 Funktionen in $L_2([a,b])$ mit den selben Fourier–Koeffizienten (fast überall) übereinstimmen.

Beweisskizze: a) Für auf $[-\pi,\pi]$ stetigem f wird in der Übungsaufgabe 16 gezeigt, dass die Schlussfolgerung

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot e^{i\cdot k\cdot x}\,dx = 0\ \forall k\in\mathbb{Z} \quad\Rightarrow\quad f(x)=0\ \forall x\in[-\pi,\pi]$$

korrekt ist.
b) Für unstetiges $f \in L_2([a,b])$ betrachten wir die Stammfunktion

$$F(x) = \int_{-\pi}^{x} f(y)\,dy.$$

Diese Funktion ist stetig und fast überall differenzierbar mit $F'(x) = f(x)$ (diese Aussagen entstammen der Theorie der Lebesgue–Integration), und es gilt $F(-\pi)=0$. Partielle Integration liefert für beliebiges $k\in\mathbb{Z}$, $k\neq 0$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{F(x)}_{u(x)}\cdot\underbrace{e^{i\cdot k\cdot x}}_{v'(x)}\,dx = \Big[\underbrace{F(x)}_{u(x)}\cdot\underbrace{\frac{e^{i\cdot k\cdot x}}{i\cdot k}}_{v(x)}\Big]_{x=-\pi}^{x=\pi} - \int_{-\pi}^{\pi}\underbrace{F'(x)}_{u'(x)}\cdot\underbrace{\frac{e^{i\cdot k\cdot x}}{i\cdot k}}_{v(x)}\,dx$$

$$= F(\pi)\cdot\frac{(-1)^k}{i\cdot k} - \frac{1}{i\cdot k}\cdot\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot e^{i\cdot k\cdot x}\,dx = 0.$$

(Hierbei ist $F(\pi)$ bis auf einen Faktor der Fourier–Koeffizient c_0, das Integral ist bis auf einen Faktor der Fourier–Koeffizient c_k von f. Alle diese Koeffizienten werden als verschwindend vorausgesetzt.) Nach a) folgt für die stetige Funktion F das Ergebnis $F(x)=0\ \forall x\in[-\pi,\pi]$. Damit gilt für beliebige Intervalle $[\alpha,\beta]\subset[-\pi,\pi]$:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(y)\,dy = F(\beta)-F(\alpha) = 0,$$

woraus folgt, dass f fast überall verschwinden muss.
c) Haben zwei Funktionen f und g die selben Fourier–Koeffizienten, so verschwinden alle Fourier–Koeffizienten von $f-g$, womit nach a) und b) fast überall $f(x)-g(x)=0$ gelten muss.

Q.E.D.

Der obige Satz besagt, dass die Fourier–Koeffizienten die Funktion eindeutig bestimmen (fast überall). Dies ist ein erster Hinweis darauf, dass die trigonometrischen Funktionen, nach denen entwickelt wird, in der Tat ein vollständiges System von Basisfunktionen bilden, mit denen andere Funktionen dargestellt werden können. Speziell sollten die entwickelten Funktionen (fast überall) aus den Fourier–Koeffizienten rekonstruierbar sein. Als Kandidat für die Rekonstruktion bieten sich natürlich die Fourier–Approximationen S_n aus Definition 1.25 an, deren Grenzwert für $n \to \infty$ in der Tat im L_2–Sinne gegen die Funktion konvergiert. Wir schliessen diesen Abschnitt mit dem folgenden Resultat ab, das wir hier allerdings noch nicht gut begründen geschweige denn sauber beweisen können:

Satz 1.32: (Die trigonometrischen Funktionen sind vollständig)

Die trigonometrischen Funktionen $\{e^{i\cdot k\cdot x}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ *bzw.*

$$\{1, \cos(x), \sin(x), \cos(2\cdot x), \sin(2\cdot x), \dots\}$$

bilden ein vollständiges *Orthogonalsystem in* $L_2([-\pi,\pi])$ *im Sinne von Definition 1.22. Also: für jedes* $f \in L_2([-\pi,\pi])$ *gilt im* L_2*–Sinne*

$$f = \lim_{n\to\infty} S_n,$$

wo S_n *die endlichen Fourier–Approximationen*

$$S_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k \cdot e^{i\cdot k\cdot x} = a_0 + \sum_{k=1}^{n} \Big(a_k \cdot \cos(k\cdot x) + b_k \cdot \sin(k\cdot x)\Big)$$

sind.

Wir haben hier nicht den technischen Apparat, einen sauberen Beweis zu führen, daher nur die grobe Beweisidee:

Beweisidee: Wir werden im Abschnitt 1.3.3 die punktweise Konvergenz von $S_n(x)$ gegen $f(x)$ betrachten und herausbekommen, dass

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x)$$

an allen Stellen $x \in [-\pi,\pi]$ gilt, wenn f nur genügend glatt ist (z.B. stetig und beidseitig differenzierbar, siehe Satz 1.39). Diese punktweise Konvergenz impliziert natürlich die L_2-Konvergenz von S_n gegen f. Die Funktionen in L_2 lassen sich durch solche glatten Funktionen im L_2–Sinne beliebig genau approximieren, woraus (nach einigen technischen Abschätzungen) dann folgt, dass die L_2-Konvergenz für die glatten Funktionen auch auf die weniger glatten Funktionen in L_2 übergeht.

Q.E.D.

1.3.3 Punktweise Konvergenz

Die Vollständigkeit der trigonometrischen Funktionen nach Satz 1.32 garantiert uns die Konvergenz der trigonometrischen Fourier–Reihen S_n gegen die Ausgangsfunktion f im L_2–Sinne. Intuitiv besagt dies, dass die Fourier–Approximationen $S_n(x)$ für „die meisten Punkte" $x \in [-\pi, \pi]$ gegen den Wert $f(x)$ konvergieren muss, es bleibt aber hinreichend viel Spielraum für Stellen x, an denen $S_n(x)$ nicht gegen $f(x)$ konvergiert. In diesem Abschnitt soll der Frage nach der punktweisen Konvergenz genauer nachgegangen werden: an welchen Punkten x kann garantiert werden, dass $\lim_{n\to\infty} S_n(x) = f(x)$ gilt? Zunächst eine allgemeine Aussage zur Konvergenz von Funktionenreihen:

Satz 1.33: (Weierstraßsches Majorantenkriterium)

Sei (f_k) eine Folge stetiger Funktionen über $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} y_k$ mit $y_k := \sup\{|f_k(x)|; x \in [a, b]\}$, so konvergiert

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x)$$

für jedes $x \in [a, b]$. Die punktweise durch $S^*(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x)$ definierte Grenzfunktion ist wiederum stetig.

Beweis: technisch.

Beispiel 1.34: Da $\sum_k \frac{1}{k^2}$ konvergiert, erhalten wir sofort für das Beispiel 1.30.b), dass die Reihe

$$S^*(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \cdot \sum_{k=1,3,5,\ldots} \frac{\cos(k \cdot x)}{k^2} \overset{(k=2\cdot m+1)}{=} \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\cos((2 \cdot m + 1) \cdot x)}{(2 \cdot m + 1)^2}$$

für jedes $x \in [\pi, \pi]$ konvergiert und dass die Grenzfunktion $S^*(x)$ stetig ist. Aus der punktweisen Konvergenz folgt auch die Konvergenz von S_n gegen S^* im L_2–Sinne, denn

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \|S_n - S^*\|_2 &= \lim_{n\to\infty} \int_{\pi}^{\pi} (S_n(x) - S^*(x))^2 \, dx \\ &\overset{(*)}{=} \int_{-\pi}^{\pi} \lim_{n\to\infty} (S_n(x) - S^*(x))^2 \, dx = \int_{\pi}^{\pi} 0 \, dx = 0.\end{aligned}$$

(Mathematisch ist der Schritt $(*)$ (Vertauschen von Limes und Integral) alles andere als trivial. Hier müssten wir den Begriff der **„gleichmäßigen Konvergenz"** einführen. Als Physiker machen wir das einfach skrupellos.)
Dem Vollständigkeitssatz 1.32 nach konvergiert S_n im L_2–Sinne gegen die Ausgangsfunktion $f(x) = |x|$, welche die Fourier–Entwicklung

$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \cdot \sum_{k=1,3,5,\ldots} \frac{\cos(k \cdot x)}{k^2}$$

erzeugte. Andererseits ist auch S^* der Grenzwert von S_n im L_2–Sinne. Da Grenzwerte eindeutig sind, folgt $f = S^*$ im L_2–Sinne (d.h., „fast überall"). Da weiterhin sowohl f als auch S^* stetige Funktionen sind, bedeutet „$f = S^*$ im L_2–Sinne", dass auch punktweise $f(x) = S^*(x)$ für alle $x \in [-\pi, \pi]$ gelten muss, also

$$\boxed{|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\cos((2 \cdot m + 1) \cdot x)}{(2 \cdot m + 1)^2} \quad \text{für alle } x \in [-\pi, \pi].}$$

Wir haben damit ein erstes Beispiel, in dem die (unendliche) Fourier–Reihe punktweise die Ausgangsfunktion darstellt.

Zunächst technisches Vorgeplänkel:

Definition 1.35: (Die integrablen Funktionen)

Die Funktionen des Raums

$$L_1([a,b]) = \left\{ f : [a,b] \to \mathbb{C}; \int_a^b |f(x)| \, dx < \infty \right\}$$

nennt man die **„über $[a,b]$ integrablen Funktionen"**. *Die trigonometrischen Fourier–Koeffizienten*

$$c_k = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot e^{-i \cdot k \cdot x} \, dx$$

existieren wegen

$$\left| \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot e^{-i \cdot k \cdot x} \, dx \right| \leq \int_{-\pi}^{\pi} \left| f(x) \cdot e^{-i \cdot k \cdot x} \right| \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)| \, dx < \infty$$

für jedes $f \in L_1([-\pi, \pi])$.

Bemerkung 1.36: *Der Raum $L_2([a,b])$ der quadratintegrablen Funktionen 1.12 ist ein Unterraum von $L_1([a,b])$, wenn $[a,b]$ ein* <u>*endliches*</u> *Intervall ist. Dies liegt an der Cauchy–Schwarzschen Ungleichung 1.5. Für endliche Intervalle liegt nämlich*

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)}{|f(x)|} & \text{für } f(x) \neq 0, \\ 1 & \text{für } f(x) = 0 \end{cases}$$

in $L_2([a,b])$, da $|g(x)| \equiv 1$ gilt:

$$\|g\|_2 = \sqrt{\int_a^b |g(x)|^2 \, dx} = \sqrt{b-a}\,.$$

Per Cauchy–Schwarz folgt mit $\overline{f(x)} \cdot g(x) = \overline{f(x)} \cdot f(x)/|f(x)| = |f(x)|$:

$$\int_a^b |f(x)| \, dx = \int_a^b \overline{f(x)} \cdot g(x) \, dx = \langle f, g \rangle \leq \|f\|_2 \cdot \|g\|_2 = \sqrt{b-a} \cdot \|f\|_2 < \infty.$$

Lemma 1.37: (Riemann–Lebesgue–Lemma)

Die Fourier–Koeffizienten jeder integrablen Funktion $f \in L_1([-\pi,\pi])$ bilden eine Nullfolge:

$$\lim_{k\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot\cos(k\cdot x)\,dx = \lim_{k\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot\sin(k\cdot x)\,dx = 0.$$

Beweisskizze: Wir stellen uns f als $2\cdot\pi$–periodisch fortgesetzt vor. Für $2\cdot\pi$–periodische Funktionen $g(x)$ gilt

$$\int_{-\pi+\alpha}^{\pi+\alpha} g(x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} g(x)\,dx$$

für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$. Mit der Substitution $x = y - \pi/k$ folgt:

$$c_k = \frac{1}{2\cdot\pi}\cdot\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot e^{-i\cdot k\cdot x}\,dx = \frac{1}{2\cdot\pi}\cdot\int_{-\pi+\frac{\pi}{k}}^{\pi+\frac{\pi}{k}} f\Big(y-\frac{\pi}{k}\Big)\cdot e^{-i\cdot k\cdot(y-\frac{\pi}{k})}\,dy$$

$$= \frac{1}{2\cdot\pi}\cdot\int_{-\pi}^{\pi} f\Big(y-\frac{\pi}{k}\Big)\cdot e^{-i\cdot k\cdot y}\cdot\underbrace{e^{i\cdot k\cdot\frac{\pi}{k}}}_{-1}\,dy = -\frac{1}{2\cdot\pi}\cdot\int_{-\pi}^{\pi} f\Big(y-\frac{\pi}{k}\Big)\cdot e^{-i\cdot k\cdot y}\,dy.$$

Es folgt

$$c_k = \frac{1}{2}\cdot(c_k + c_k) = \frac{1}{4\cdot\pi}\cdot\int_{-\pi}^{\pi}\Big(f(x) - f\Big(x-\frac{\pi}{k}\Big)\Big)\cdot e^{-i\cdot k\cdot x}\,dx,$$

also

$$|c_k| \le \frac{1}{4\cdot\pi}\cdot\int_{-\pi}^{\pi}\Big|f(x) - f\Big(x-\frac{\pi}{k}\Big)\Big|\,dx. \qquad (\#)$$

Für stetiges f ist nun alles klar:

$$\lim_{k\to\infty}|c_k| \le \lim_{k\to\infty}\frac{1}{4\cdot\pi}\cdot\int_{-\pi}^{\pi}\Big|f(x) - f\Big(x-\frac{\pi}{k}\Big)\Big|\,dx$$

$$\overset{(*)}{=} \int_{-\pi}^{\pi}\lim_{k\to\infty}\Big|f(x) - f\Big(x-\frac{\pi}{k}\Big)\Big|\,dx = 0.$$

(Für einen mathematisch sauberen Beweis ist die Vertauschung von Limes und Integral im Schritt $(*)$ natürlich genauer zu untersuchen.) Für eine unstetige integrable Funktion benutzt man, dass man integrable Funktionen beliebig genau durch eine stetige Funktion approximieren kann, d.h., zu jedem $\epsilon > 0$ existiert eine stetige Funktion $s(x)$ mit

$$\int_{-\pi}^{\pi}|f(x) - s(x)|\,dx < \epsilon.$$

Mit (#) folgt

$$
\begin{aligned}
|c_k| &\leq \frac{1}{4\cdot\pi}\cdot\int_{-\pi}^{\pi}\Big|f(x)\underbrace{-s(x)+s(x)}_{0}\underbrace{-s\Big(x-\frac{\pi}{k}\Big)+s\Big(x-\frac{\pi}{k}\Big)}_{0}-f\Big(x-\frac{\pi}{k}\Big)\Big|\,dx\\
&\leq \frac{1}{4\cdot\pi}\cdot\int_{-\pi}^{\pi}\Big|f(x)-s(x)\Big|\,dx \;+\; \frac{1}{4\cdot\pi}\cdot\int_{-\pi}^{\pi}\Big|s(x)-s\Big(x-\frac{\pi}{k}\Big)\Big|\,dx\\
&\quad+\frac{1}{4\cdot\pi}\cdot\int_{-\pi}^{\pi}\Big|s\Big(x-\frac{\pi}{k}\Big)-f\Big(x-\frac{\pi}{k}\Big)\Big|\,dx\\
&\overset{(**)}{=} \frac{1}{2\cdot\pi}\cdot\int_{-\pi}^{\pi}\Big|f(x)-s(x)\Big|\,dx+\frac{1}{4\cdot\pi}\cdot\int_{-\pi}^{\pi}\Big|s(x)-s\Big(x-\frac{\pi}{k}\Big)\Big|\,dx\\
&\leq \epsilon+\text{Nullfolge}_k.
\end{aligned}
$$

(Zu Schritt $(**)$: das dritte Integral stimmt mit dem ersten überein, da der Integrand $2\cdot\pi$–peridoisch ist).
Zu jedem ϵ kann man damit für alle hinreichend großen k garantieren, dass $|c_k|\leq\epsilon+\epsilon$ gilt. Damit ist $|c_k|$ eine Nullfolge.

Q.E.D.

Um die punktweise Konvergenz genauer zu untersuchen, brauchen wir zunächst ein starkes technisches Hilfsmittel. Die endlichen Fourier–Reihen stellen sich als die Wirkung eines Integraloperators auf die Ausgangsfunktion dar: ↓6.11.02

Satz 1.38: (Integraldarstellung per Dirichlet–Kern)

Interpretiere eine auf dem Intervall $[-\pi,\pi]$ gegebene Funktion $f\in L_1([-\pi,\pi])$ als $2\cdot\pi$–periodisch auf $\mathbb{R}$ fortgesetzt (also $f(x+2\cdot\pi)=f(x)$). Für die Fourier–Approximation von f gilt

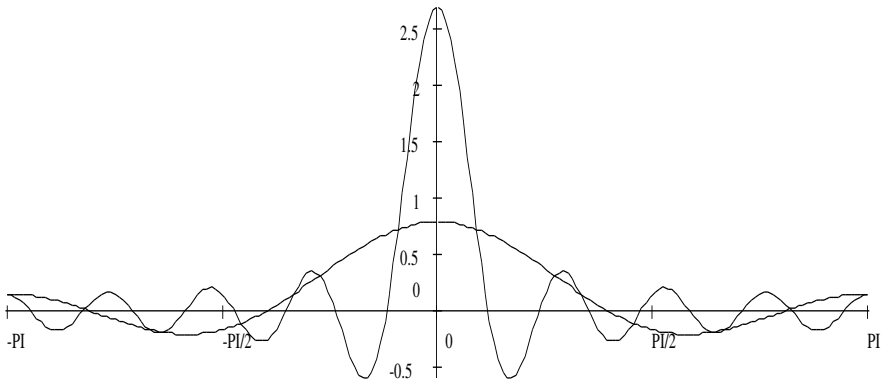
$$
S_n(x)=\sum_{k=-n}^{n}c_k\cdot e^{i\cdot k\cdot x}=\int_{-\pi}^{\pi}D_n(x-t)\cdot f(t)\,dt=\int_{-\pi}^{\pi}D_n(t)\cdot f(x+t)\,dt
$$

$$
=\int_{0}^{\pi}D_n(t)\cdot\Big(f(x+t)+f(x-t)\Big)\,dt
$$

mit dem sogenannten **„Dirichlet–Kern"**

$$
D_n(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\cdot\pi}\,\dfrac{\sin((n+\frac{1}{2})\cdot y)}{\sin(\frac{y}{2})} & \text{für } y\neq 0\\[2ex] \dfrac{n+\frac{1}{2}}{\pi} & \text{für } y=0.\end{cases}
$$

Es gilt $\int_{-\pi}^{\pi}D_n(y)\,dy=1$. *Hier eine Graphik von D_n mit $n=2$ und $n=8$:*



Beweis:

$$S_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k \cdot e^{i\cdot k\cdot x} = \sum_{k=-n}^{n} \frac{1}{2\cdot\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cdot e^{-i\cdot k\cdot t}\, dt \cdot e^{i\cdot k\cdot x}$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cdot \underbrace{\frac{1}{2\cdot\pi} \cdot \sum_{k=-n}^{n} e^{i\cdot k\cdot(x-t)}}_{D_n(x-t)}\, dt.$$

Es gilt

$$D_n(y) = \frac{1}{2\cdot\pi} \cdot \sum_{k=-n}^{n} e^{i\cdot k\cdot y} = \frac{1}{2\cdot\pi} \cdot \Big(\sum_{k=0}^{n} e^{i\cdot k\cdot y} + \sum_{k=0}^{n} e^{-i\cdot k\cdot y} - 1\Big)$$

$$= \frac{1}{2\cdot\pi} \cdot \Big(\sum_{k=0}^{n} (e^{i\cdot y})^k + \sum_{k=0}^{n} (e^{-i\cdot y})^k - 1\Big).$$

Mit der Summenformel $\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$ für geometrische Reihen erhält man:

$$D_n(y) = \frac{1}{2\cdot\pi} \cdot \Big(\frac{e^{i\cdot(n+1)\cdot y}-1}{e^{i\cdot y}-1} + \frac{e^{-i\cdot(n+1)\cdot y}-1}{e^{-i\cdot y}-1} - 1\Big)$$

$$= \frac{1}{2\cdot\pi} \cdot \frac{2\cdot\cos(n\cdot y) - 2\cdot\cos((n+1)\cdot y)}{2 - 2\cdot\cos(y)}$$

$$\overset{(*)}{=} \frac{1}{2\cdot\pi} \cdot \frac{4\cdot\sin((n+\frac{1}{2})\cdot y)\cdot\sin(\frac{1}{2}\cdot y)}{4\cdot\sin^2(\frac{y}{2})} = \frac{1}{2\cdot\pi} \cdot \frac{\sin((n+\frac{1}{2})\cdot y)}{\sin(\frac{y}{2})}.$$

Hierbei werden in $(*)$ die üblichen Additionstheoreme auf

$$\cos(n\cdot y) - \cos((n+1)\cdot y) = \cos((n+\tfrac{1}{2})\cdot y - \tfrac{1}{2}\cdot y) - \cos((n+\tfrac{1}{2})\cdot y + \tfrac{1}{2}\cdot y)$$

angewendet. Weiterhin gilt mit der Substitution $\xi = x - t$

$$\int_{-\pi}^{\pi} D_n(x-t) \cdot f(t)\, dt = \int_{x-\pi}^{x+\pi} D_n(\xi) \cdot f(x+\xi)\, d\xi = \int_{-\pi}^{\pi} D_n(\xi) \cdot f(x+\xi)\, d\xi,$$

wobei im letzten Schritt die $2 \cdot \pi$-Periodizität von f und D_n verwendet wird. Letztlich folgt mit $D_n(-\xi) = D_n(\xi)$:

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(\xi) \cdot f(x+\xi)\, d\xi &= \int_{-\pi}^{0} D_n(\xi) \cdot f(x+\xi)\, d\xi + \int_{0}^{\pi} D_n(\xi) \cdot f(x+\xi)\, d\xi \\ &= \int_{0}^{\pi} D_n(-\xi) \cdot f(x-\xi)\, d\xi + \int_{0}^{\pi} D_n(\xi) \cdot f(x+\xi)\, d\xi \\ &= \int_{0}^{\pi} D_n(\xi) \cdot \Big(f(x-\xi) + f(x+\xi) \Big)\, d\xi\end{aligned}$$

und

$$\int_{-\pi}^{\pi} D_n(y)\, dy = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \sum_{k=-n}^{n} e^{i \cdot k \cdot y}\, dy = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \sum_{k=-n}^{n} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i \cdot k \cdot y}\, dy = 1$$

(alle Terme außer $k = 0$ ergeben 0).

Q.E.D.

Hier nun der entscheidende Satz, der für die in praktischen Anwendungen relevanten Funktionen die Frage der punktweisen Konvergenz klärt:

Satz 1.39: (Das Dirichlet–Kriterium für punktweise Konvergenz)

Sei $f \in L_1([-\pi, \pi])$. Gilt an einer Stelle $x_0 \in (-\pi, \pi)$, dass sowohl der links- als auch der rechtsseitige Grenzwert

$$f(x_0 - 0) := \lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} f(x_0 - h) \qquad f(x_0 + 0) := \lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} f(x_0 + h)$$

existiert und ebenfalls die links- und rechtsseitigen Ableitungen

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \frac{f(x_0 - 0) - f(x_0 - h)}{h}, \qquad \lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 + 0)}{h},$$

so konvergieren die Fourier–Approximationen gegen den Mittelwert des links- und rechtsseitigen Grenzwerts:

$$\lim_{n \to \infty} S_n(x_0) = \boxed{\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot e^{i \cdot k \cdot x_0} = \frac{f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)}{2}.}$$

Dies gilt auch für $x_0 = -\pi$ und $x_0 = \pi$, wenn die $2 \cdot \pi$–periodisch fortgesetzte Funktion f die obigen Glattheitseigenschaften hat.

Beweis: Mit $D_n(-t) = D_n(t)$ und $\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)\,dt = 1$ ($\Rightarrow \int_0^{\pi} D_n(t)\,dt = \frac{1}{2}$) ergibt sich

$$S_n(x_0) - \frac{f(x_0-0)+f(x_0+0)}{2}$$

$$= \int_0^{\pi} D_n(t)\cdot\Big(f(x_0+t)+f(x_0-t)\Big)\,dt - \int_0^{\pi} D_n(t)\cdot\Big(f(x_0-0)+f(x_0+0)\Big)\,dt$$

$$= \int_0^{\pi} D_n(t)\cdot\Big((f(x_0+t)-f(x_0+0)+f(x-t)-f(x_0-0)\Big)\,dt$$

$$= \int_0^{\pi} \frac{1}{2\cdot\pi}\,\frac{\sin((n+\frac{1}{2})\cdot t)}{\sin(\frac{t}{2})}\cdot\Big((f(x_0+t)-f(x_0+0)+f(x_0-t)-f(x_0-0)\Big)\,dt$$

$$= \int_0^{\pi} \sin((n+\tfrac{1}{2})\cdot t)\cdot$$

$$\underbrace{\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\frac{t}{2}}{\sin(\frac{t}{2})}\cdot\left(\frac{f(x_0+t)-f(x_0+0)}{t}+\frac{f(x_0-t)-f(x_0-0)}{t}\right)}_{g(t)}\,dt$$

$$= \int_0^{\pi}\Big(\sin(n\cdot t)\cdot\cos(\tfrac{1}{2}\cdot t)+\cos(n\cdot t)\cdot\sin(\tfrac{1}{2}\cdot t)\Big)\cdot g(t)\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\int_{-\pi}^{\pi}\sin(n\cdot t)\cdot\cos(\tfrac{1}{2}\cdot t)\cdot(g(t)-g(-t))\,dt$$

$$+\frac{1}{2}\cdot\int_{-\pi}^{\pi}\cos(n\cdot t)\cdot\sin(\tfrac{1}{2}\cdot t)\cdot(g(t)-g(-t))\,dt.$$

Die entscheidende Beobachtung hier ist, dass wegen der vorausgesetzten Existenz der einseitigen Ableitungen die Funktion $g(t)$ keine Singularität bei $t=0$ hat und damit integrierbar ist. Mit dem Riemann–Lebesgue–Lemma 1.37 ergibt sich, dass die obige Differenz zwischen $S^*(x)$ und dem Mittelwert der einseitigen Grenzwerte eine Nullfolge ist.

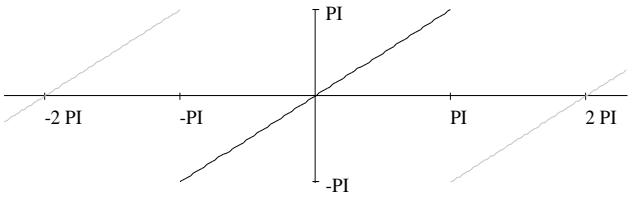
Q.E.D.

Merke 1.40:

An allen Stellen, wo die Fourier–entwickelte Funktion stetig und differenzierbar ist, wird sie durch die unendliche Fourier–Reihe dargestellt. Werden glatte (stetig und differenzierbare) Funktionen aneinander gestückelt, so konvergiert die unendliche Fourier–Reihe gegen den Mittelpunkt der Grenzwerte von links- und rechts. Wenn die Stückelung stetig ist, wird auch die Nahtstelle von der Fourier–Reihe korrekt dargestellt.

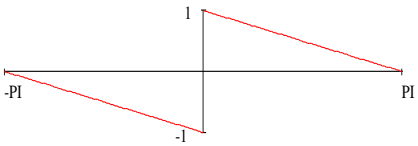
Vorsicht 1.41:

Die Stetigkeit bezieht sich auf die $2 \cdot \pi$–periodisch fortgesetzte Funktion! Die Funktion $f(x) = x$ ist nicht stetig an den Stellen $x = \pm\pi$, $\pm 3 \cdot \pi$, $\pm 5 \cdot \pi, \ldots,$ wenn man sie $2 \cdot \pi$–periodisch fortgesetzt betrachtet!



Beispiel 1.42: In Beispiel 1.30.a) hatten wir für die „Sägezahnfunktion"

$$f(x) = \begin{cases} -1 - \dfrac{x}{\pi} & \text{für } x \in [-\pi, 0\,), \\ 1 - \dfrac{x}{\pi} & \text{für } x \in [\,0, \pi] \end{cases}$$



die Fourier–Entwicklung

$$f(x) \sim \sum_{k=1,2,\ldots} \frac{\sin(k \cdot x)}{k}$$

gefunden. An allen Stetigkeitsstellen ist die Funktion differenzierbar, so dass die Fourier–Reihe an diesen Stellen gegen $f(x)$ konvergiert. An den Unstetigkeitsstellen $x = 0, \pm 2 \cdot \pi, \pm 4 \cdot \pi, \ldots$ ist das Dirichlet–Kriterium aber immer noch erfüllt: Die Fourier–Reihe konvergiert gegen den Mittelwert des links- und rechtsseitigen Limes (also 0):

$$\sum_{k=1,2,\ldots} \frac{\sin(k \cdot x)}{k} = \begin{cases} -1 - \dfrac{x}{\pi} & \text{für } x \in [-\pi, 0), \\ 0 & \text{für } x = 0 \\ 1 - \dfrac{x}{\pi} & \text{für } x \in (0, \pi]. \end{cases}$$

Außer an der Sprungstelle (wo wir willkürlich $f(0) = 1$ definiert hatten), wird $f(x)$ also überall punktweise durch die unendliche Fourier–Reihe dargestellt. Beachte auch Aufgabe 9 von Blatt 2.

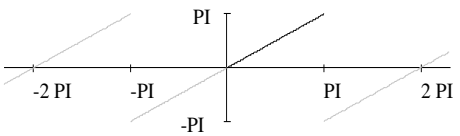
Bemerkung 1.43: *Wir haben mit Satz 1.39 ein entscheidendes Teilargument für den Beweis von Satz 1.32 über die Vollständigkeit der trigonometrischen Funktionen im L_2-Sinne nachgeliefert. Man kann alle Funktionen in $L_2([-\pi, \pi])$ beliebig genau durch stetige Funktionen approximieren, die das Dirichlet–Kriterium erfüllen und somit punktweise über ihre Fourier–Reihen dargestellt werden.*

Bemerkung 1.44: *Es ergibt sich ein verblüffendes „Lokalitätsprinzip":*

Die punktweise Konvergenz der Fourier–Reihe hängt nur von lokalen Eigenschaften der Funktion in der Umgebung des betrachteten Punktes ab!

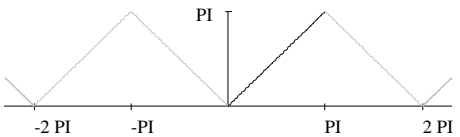
Z.B. reichen Stetigkeit und beidseitige Differenzierbarkeit an einem Punkt für die lokale Darstellbarkeit als Fourier–Reihe an diesem Punkt. Dies steht in krassem Gegensatz zu der Tatsache, dass die Fourier–Koeffizienten global von der Funktion bestimmt werden.
Hat man vor, eine Funktion f auf einem Teilintervall $(a,b) \subset [-\pi,\pi]$ durch eine Fourier–Reihe darzustellen, so kann das auf viele verschiedene Arten und Weisen geschehen, indem man f von (a,b) **irgendwie** *auf den Rest des Intervalles $[-\pi,\pi]$ fortsetzt. Abhängig von dieser Fortsetzung ergeben sich völlig unterschiedliche Fourier–Reihen, die jedoch innerhalb des Intervalls (a,b) alle gegen dieselbe Funktion konvergieren!*
Beispiel: Wir wollen die Funktion $f(x) = x$ auf dem Intervall $[0,\pi] \subset [-\pi,\pi]$ durch eine Fourier–Reihe darstellen. Einige Möglichkeiten:

1) ungerade Fortsetzung; unstetig:



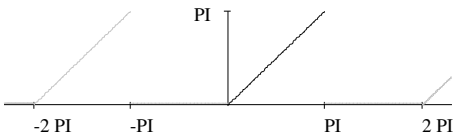
$$f_1(x) = 2 \cdot \Big(\sin(x) - \frac{\sin(2 \cdot x)}{2} + \frac{\sin(3 \cdot x)}{3} - \cdots \Big).$$

2) gerade Fortsetzung; stetig:



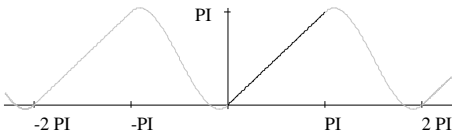
$$f_2(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \cdot \Big(\cos(x) + \frac{\cos(3 \cdot x)}{3^2} + \frac{\cos(5 \cdot x)}{5^2} + \cdots \Big).$$

3) unstetige Fortsetzung:



$$f_3(x) = \frac{f_1(x) + f_2(x)}{2}.$$

4) glatte Forsetzung:



$f_4(x) =$ *eine schnell konvergierende Fourier–Reihe.*

1.3.4 Abklingverhalten der Fourier–Koeffizienten

↓8.11.02

Nach dem Riemann–Lebesgue–Lemma 1.37 bilden die Fourier–Koeffizienten prinzipiell eine Nullfolge. Es gilt das Prinzip: je glatter die Funktion, um so schneller fallen die Fourier–Koeffizienten. Zunächst eine einfache Beobachtung:

Satz 1.45:

Für eine $2 \cdot \pi$–periodische differenzierbare Funktion f mit integrierbarer Ableitung f' gilt

$$c_k(f') = i \cdot k \cdot c_k(f),$$

wo $c_k(f')$ bzw. $c_k(f)$ die Fourier–Koeffizienten von f' bzw. f sind.

Beweis: Es gilt $f(-\pi) = f(\pi)$ und $e^{i \cdot k \cdot \pi} = (-1)^k = e^{-i \cdot k \cdot \pi}$. Durch partielle Integration folgt:

$$c_k(f') = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \cdot e^{-i \cdot k \cdot x} \, dx$$

$$= \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \Big[f(x) \cdot e^{-i \cdot k \cdot x} \Big]_{x=-\pi}^{x=\pi} - \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot (-i \cdot k) \cdot e^{-i \cdot k \cdot x} \, dx$$

$$= \frac{f(\pi) \cdot e^{-i \cdot k \cdot \pi} - f(-\pi) \cdot e^{i \cdot k \cdot \pi}}{2 \cdot \pi} + i \cdot k \cdot c_k(f) = i \cdot k \cdot c_k(f).$$

Q.E.D.

Diese Aussage ist leicht zu merken: stellt man sich die Funktion direkt als Fourier–Reihe gegeben vor, so kann man die Summanden der Reihe einzeln differenzieren:

$$\frac{d}{dx} \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot e^{i \cdot k \cdot x}}_{f(x)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot \frac{d}{dx} \, e^{i \cdot k \cdot x} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{c_k \cdot (i \cdot k)}_{c_k(f')} \cdot e^{i \cdot k \cdot x}.$$

Bemerkung 1.46: *So trivial der Zusammenhang zwischen den Fourier–Koeffizienten von f und f' mathematisch auch sein mag, er ist für Anwendungen von zentraler Bedeutung:*

Das Ableiten wird für die Fourier–Koeffizienten zu einer algebraischen Operation (Multiplikation mit $i \cdot k$). Fourier–Ansätze verwandeln daher Differentialgleichungen in algebraische Gleichungen für die Fourier–Koeffizienten.

Siehe das Motivationsbeispiel im einführenden Abschnitt 1.1.

Satz 1.47: (Abklingverhalten der Fourier–Koeffizienten)

Ist eine $2 \cdot \pi$–periodische Funktion p-fach differenzierbar und ist die p-te Ableitung integrierbar, so gilt für die Fourier–Koeffizienten der Funktion:

$$|c_k| = o\Big(\frac{1}{|k|^p}\Big).$$

(Das **„Landau–Symbol"** *o bedeutet $\lim\limits_{|k|\to\infty} |k|^p \cdot |c_k| = 0$.)*

Beweis: Seien $c_k(f^{(p)})$ die Fourier–Koeffizienten der p-ten Ableitung. Nach Satz 1.45 gilt

$$c_k(f^{(p)}) = i \cdot k \cdot c_k(f^{(p-1)}) = (i \cdot k)^2 \cdot c_k(f^{(p-2)}) = \cdots = (i \cdot k)^p \cdot c_k(f).$$

Nach dem Riemann–Lebesgue–Lemma 1.37 bilden die Fourier–Koeffizienten $c_k(f^{(p)})$ der p-ten Ableitung eine Nullfolge für $|k| \to \infty$, d.h., die Fourier–Koeffizienten $c_k = c_k(f)$ fallen schneller ab als $1/|k|^p$:

$$c_k(f) = \frac{c_k(f^{(p)})}{(i \cdot k)^p} = o\Big(\frac{1}{|k|^p}\Big).$$

Q.E.D.

Merke 1.48:

Je glatter die Funktion (d.h., je öfter differenzierbar), um so schneller konvergieren die Fourier–Koeffizienten gegen 0.

Bemerkung 1.49: *In Satz 1.47 wird das Abklingverhalten der Fourier–Koeffizienten mittels des Landau-Symbols o recht unspezifisch als „schneller abfallend als $1/|k|^p$" beschrieben. Die in der Praxis auftretenden Funktionen sind meist stückweise aus glatten Anteilen zusammengesetzt, wodurch sich in der Praxis meist „schneller abfallend als $1/|k|^p$" in der Form*

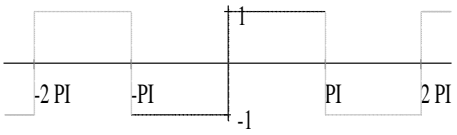
„um eine k-Potenz schneller abfallend als $1/|k|^p$"

ergibt. Es gilt die Faustregel:

$$\begin{array}{ll} f \text{ unstetig:} & c_k \sim \dfrac{1}{k}. \\ f \text{ stetig, } f' \text{ unstetig:} & c_k \sim \dfrac{1}{k^2}. \\ f' \text{ stetig, } f'' \text{ unstetig:} & c_k \sim \dfrac{1}{k^3}. \\ f^{(p)} \text{ stetig, } f^{(p+1)} \text{ unstetig:} & c_k \sim \dfrac{1}{k^{p+2}}. \end{array}$$

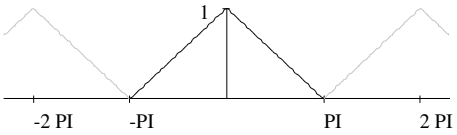
Beispiele:

f_1 *unstetig:*



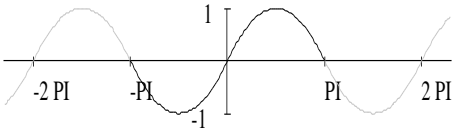
$$f_1(x) = \frac{4}{\pi} \cdot \Big(\sin(x) + \frac{\sin(3 \cdot x)}{3} + \frac{\sin(5 \cdot x)}{5} + \cdots \Big).$$

f_2 *stetig,* f_2' *unstetig:*



$$f_2(x) = 1 + \frac{4}{\pi^2} \cdot \Big(\cos(x) + \frac{\cos(3 \cdot x)}{3^2} + \frac{\cos(5 \cdot x)}{5^2} + \cdots \Big).$$

f_3' *stetig,* f_3'' *unstetig:*



$$f_3(x) = \frac{4}{\pi^2} \cdot x \cdot (\pi - |x|) = \frac{32}{\pi^3} \cdot \Big(\frac{\sin(x)}{1^3} + \frac{\sin(3 \cdot x)}{3^3} + \frac{\sin(5 \cdot x)}{5^3} + \cdots \Big).$$

Bemerkung 1.50: *Für eine durch ihre Fourier–Reihe dargestellte Funktion gilt für den Approximationsfehler durch endliche Fourier–Approximationen*

$$f(x) - \sum_{k=-n}^{n} c_k \cdot e^{i \cdot k \cdot x} = \sum_{|k|>n} c_k \cdot e^{i \cdot k \cdot x}$$

$$\Rightarrow \quad \left| f(x) - \sum_{k=-n}^{n} c_k \cdot e^{i \cdot k \cdot x} \right| \leq \sum_{|k|>n} |c_k \cdot e^{i \cdot k \cdot x}| = \sum_{|k|>n} |c_k|.$$

Je schneller die Fourier–Koeffizienten abfallen, umso schneller die punktweise Konvergenz an allen Stellen!

1.3.5 Das Gibbs'sche Phänomen

Wir betrachten das Konvergenzverhalten der endlichen Fourier–Transformation für die „Sprungfunktion" (**„Heaviside–Funktion"**):

$$H(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \in [-\pi, 0), \\ 1 & \text{für } x \in [0, \pi). \end{cases}$$

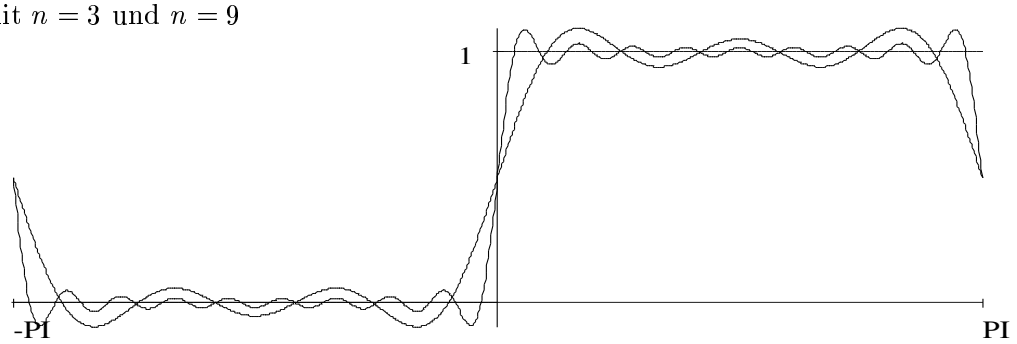
Als zugeordnete Fourier–Reihe berechnet man

$$H(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \cdot \Big(\sin(x) + \frac{\sin(3 \cdot x)}{3} + \frac{\sin(5 \cdot x)}{5} + \cdots \Big),$$

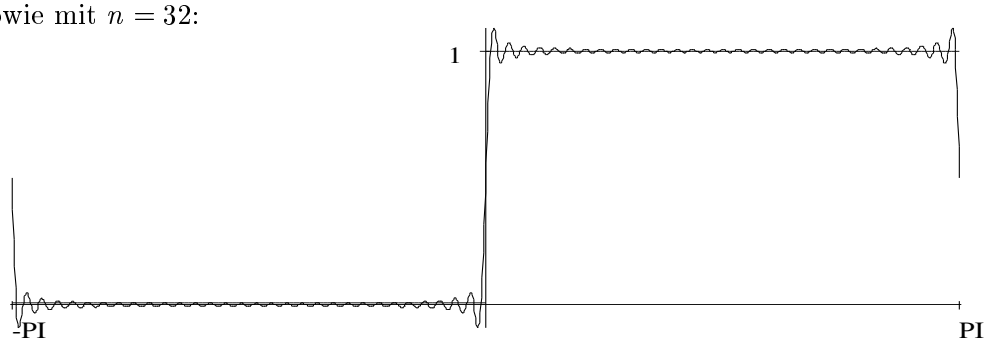
welche in der Tat $H(x)$ überall außer an den Sprungstellen punktweise darstellt. Hier die endlichen Fourier–Approximationen

$$S_{2 \cdot n-1}(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \cdot \sum_{m=0}^{n-1} \frac{\sin((2 \cdot m + 1) \cdot x)}{2 \cdot m + 1}$$

mit $n = 3$ und $n = 9$



sowie mit $n = 32$:



Das Gibbs'sche[1] **Phänomen ist, dass die Fourier–Approximationen an Sprungstellen ein Überschwingverhalten zeigen, dass mit wachsendem n nicht verschwindet**: das erste Maximum von $S_n(x)$ für $x > 0$ liegt für jedes n deutlich über der Grenzfunktion $H(x) \equiv 1$ (für $x > 0$). Dies lässt sich unschwer explizit nachrechnen. Das betrachtete Maximum ist durch die erste positive Nullstelle der Ableitung bestimmt:

$$\frac{d}{dx}\, S_{2\cdot n-1}(x) = \frac{2}{\pi}\cdot\sum_{m=0}^{n-1}\cos((2\cdot m+1)\cdot x) = \frac{2}{\pi}\cdot\Re\Big(\sum_{m=0}^{n-1} e^{i\cdot(2\cdot m+1)\cdot x}\Big)$$

$$= \frac{2}{\pi}\cdot\Re\Big(e^{i\cdot x}\cdot\sum_{m=0}^{n-1}(e^{i\cdot 2\cdot x})^m\Big) = \frac{2}{\pi}\cdot\Re\Big(e^{i\cdot x}\cdot\frac{e^{i\cdot 2\cdot n\cdot x}-1}{e^{i\cdot 2\cdot x}-1}\Big) = \frac{2}{\pi}\cdot\Re\Big(\frac{e^{i\cdot 2\cdot n\cdot x}-1}{e^{i\cdot x}-e^{-i\cdot x}}\Big)$$

$$= \frac{2}{\pi}\cdot\Re\Big(\frac{e^{i\cdot 2\cdot n\cdot x}-1}{2\cdot i\cdot\sin(x)}\Big) = \frac{1}{\pi\cdot\sin(x)}\cdot\Im(e^{i\cdot 2\cdot n\cdot x}-1) = \frac{\sin(2\cdot n\cdot x)}{\pi\cdot\sin(x)}.$$

Die erste positive Nullstelle der Ableitung ist demnach $\xi_0 = \pi/(2\cdot n)$. Der Wert von $S_{2\cdot n-1}$ an dieser Stelle ist

$$S_{2\cdot n-1}(\xi_0) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\cdot\sum_{m=0}^{n-1}\frac{\sin((2\cdot m+1)\cdot\frac{\pi}{2\cdot n})}{2\cdot m+1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{n}\cdot\sum_{m=0}^{n-1}\frac{\sin(\frac{(2\cdot m+1)\cdot\pi}{2\cdot n})}{\frac{(2\cdot m+1)\cdot\pi}{2\cdot n}}.$$

Die Summe läßt sich leicht interpretieren. Betrachte dazu das Integral

$$\frac{1}{\pi}\cdot\int_0^\pi \frac{\sin(y)}{y}\,dy \approx 0.5895\ .$$

Zerlege das Integrationsintervall $[0,\pi]$ durch die n Stützstellen $y_m = \frac{(2\cdot m+1)\cdot\pi}{2\cdot n}$, $(m = 0,\ldots,n-1)$ in äquidistante Intervalle der Länge π/n. Für $n\to\infty$ konvergieren die Riemann–Summen gegen das Integral:

$$\frac{1}{n}\cdot\sum_{m=0}^{n-1}\frac{\sin(\frac{(2\cdot m+1)\cdot\pi}{2\cdot n})}{\frac{(2\cdot m+1)\cdot\pi}{2\cdot n}} = \frac{1}{\pi}\cdot\sum_{m=0}^{n-1}\frac{\sin(y_m)}{y_m}\cdot\frac{\pi}{n} \overset{(n\to\infty)}{\longrightarrow} \frac{1}{\pi}\cdot\int_0^\pi\frac{\sin(y)}{y}\,dy.$$

Die Höhe des ersten positiven Maximums der Fourier–Approximation konvergiert damit für $n\to\infty$:

$$S_{2\cdot n-1}(\xi_0) \approx \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\cdot\int_0^\pi\frac{\sin(y)}{y}\,dy \approx 1.0895...\ .$$

Betrachte noch einmal $H(x)$ und beachte, dass $H(x)-\frac{1}{2}$ eine ungerade Funktion $\boxed{\downarrow 13.11.02}$

[1] J.W. Gibbs, 1839 – 1903, amerikanischer Mathematiker/Physiker. Ein Zitat von ihm:

„A mathematician may say anything he pleases, but a physicist must be at least partially sane."

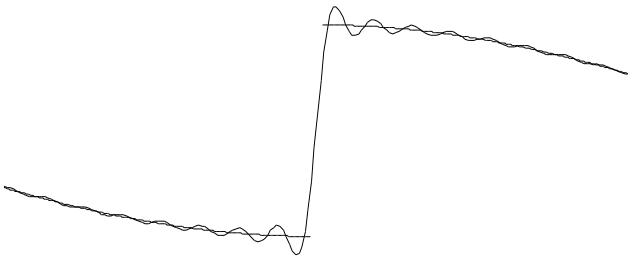
ist. Aus Symmetriegründen nehmen daher alle Fourier–Approximationen $S_{2\cdot n-1}$ als letztes negatives Minimum vor der Sprungstelle bei 0 den Wert $\frac{1}{2} - 0.5895 = -0.0895$ an. Damit hat die Differenz des ersten Maximums rechts vom Sprung zum letzten Minimum links vom Sprung den Wert $1 + 2 \cdot 0.0895 = 1.179$, wobei die Sprunghöhe 1 ist. Multipliziert man die Sprungfunktion mit einem Faktor, so skalieren sich die Fourier–Koeffizienten mit diesem Faktor und die Fourier–Approximationen ebenfalls. Damit gilt:

Das Gibbs'sche Phänomen: An einer Sprungstelle ist für alle Fourier–Approximationen die Differenz zwischen dem benachbarten Minimum und Maximum, welche den Sprung einschließen, um etwa 17.9% größer als die Sprunghöhe.

In der Tat gilt dies nicht nur für die hier betrachtete Heaviside–Funktion: eine beliebige Funktion, die an einer Stelle x_0 eine Sprung macht, kann immer in der Form

$$\text{Funktion}(x) = \text{bei } x_0 \text{ stetige Funktion}(x) + \text{Sprunghöhe} \cdot H(x - x_0)$$

zerlegt werden. Ist die stetige Funktion hinreichend glatt, konvergiert die Fourier–Approximation des stetigen Anteils deutlich schneller gegen den stetigen Anteil als die Fourier–Approximation des Sprunganteils gegen den Sprunganteil. Der stetige Anteil kann daher im Approximationsfehler vernachlässigt werden gegen den Approximationsfehler von $H(x - x_0)$. Das Gibbs'sche Phänomen für H vererbt sich damit auf die Sprungstellen beliebig zusammengestückelter glatter Funktionen:



Lanczos' σ-Approximation

Man kann das Gibbs'sche Phänomen leicht unterdrücken, indem man statt der Fourier–Approximationen (einer beliebigen Funktion)

$$S_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k \cdot e^{i \cdot k \cdot x}$$

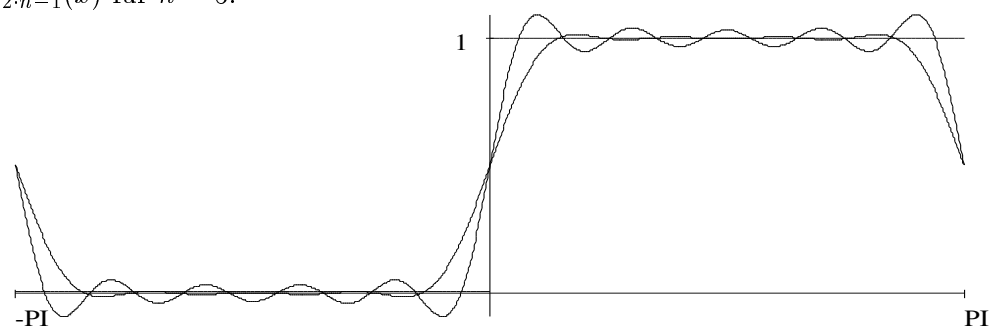
die modifizierten Fourier–Approximationen

$$L_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} \sigma_k^{(n)} \cdot c_k \cdot e^{i \cdot k \cdot x}$$

mit **„Lanczos' σ-Faktoren"**

$$\sigma_0^{(n)} = 1, \quad \sigma_k^{(n)} = \frac{\sin(\frac{k \cdot \pi}{n})}{\frac{k \cdot \pi}{n}} \quad (k > 0)$$

betrachtet. Diese Approximationen konvergieren analog zu $S_n(x)$ ebenfalls punktweise gegen die Ausgangsfunktion (wenn diese im Sinne des Dirichlet–Kriteriums glatt genug ist) und tun dies sogar wesentlich „gleichmäßiger". Speziell ist das Gibbs'sche Phänomen verschwunden. Hier $S_{2 \cdot n-1}(x)$ zusammen mit $L_{2 \cdot n-1}(x)$ für $n = 5$:



Die Erklärung beruht auf folgendem Resultat:

Satz 1.51: (Fourier–Approximationen mit Sigma–Faktoren)

Die Einführung der Sigma–Faktoren entspricht einer Mittelung der Fourier–Approximationen über eine Periode $\frac{2 \cdot \pi}{n}$ des höchstfrequenten Anteils:

$$L_n(x) = \frac{n}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{-\frac{\pi}{n}}^{\frac{\pi}{n}} S_n(x + \xi) \, d\xi.$$

Beweis: Mit

$$\frac{n}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{-\frac{\pi}{n}}^{\frac{\pi}{n}} e^{i \cdot k \cdot (x+\xi)} \, d\xi = \frac{n \cdot \sin(\frac{k \cdot \pi}{n})}{k \cdot \pi} \cdot e^{i \cdot k \cdot x} = \sigma_k^{(n)} \cdot e^{i \cdot k \cdot x}$$

folgt

$$\frac{n}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{-\frac{\pi}{n}}^{\frac{\pi}{n}} S_n(x + \xi) \, d\xi = \frac{n}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{-\frac{\pi}{n}}^{\frac{\pi}{n}} \sum_{k=-n}^{n} c_k \cdot e^{i \cdot k \cdot (x+\xi)} \, d\xi$$

$$= \sum_{k=-n}^{n} c_k \cdot \frac{n}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{-\frac{\pi}{n}}^{\frac{\pi}{n}} e^{i \cdot k \cdot (x+\xi)} \, d\xi = \sum_{k=-n}^{n} c_k \cdot \sigma_k^{(n)} \cdot e^{i \cdot k \cdot x} = L_n(x).$$

Q.E.D.

1.3.6 Diskrete Fourier–Transformation (DFT)

Eine explizite Darstellung der Fourier–Koeffizienten für ein (kompliziertes) realistisches Signal wird nur in seltenen Fällen möglich sein. Im Folgenden sollen die Fourier–Koeffizienten daher numerisch approximiert werden. Wir stellen uns die auf $[-\pi, \pi]$ gegebene Ausgangsfunktion f wieder als $2 \cdot \pi$–periodisch fortgesetzt vor und verschieben die Integration in der Definition der Fourier–Koeffizienten vom Intervall $[-\pi, \pi]$ auf das Intervall $[0, 2 \cdot \pi]$ (dies hat lediglich schreibtechnische Gründe: die folgenden Formeln werden etwas kompakter):

$$c_k = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_0^{2 \cdot \pi} f(x) \cdot e^{-i \cdot k \cdot x} \, dx.$$

Das Integral ist der Grenzwert einer Riemann–Summe und soll nun durch eine entsprechende Summe approximiert werden. Dazu wird das Intervall $[0, 2 \cdot \pi]$ mittels der Stützpunkte $x_j = 2 \cdot \pi / N$ in N gleichlange Teilintervalle $[x_j, x_{j+1}]$ der Länge $2 \cdot \pi / N$ zerlegt ($j = 0, \ldots, N-1$). In jedem Teilintervall wird der Integrand durch den Wert des Integranden am linken Intervallende angenähert. Dies liefert die Riemann–Summe

$$c_k \approx d_k := \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{2 \cdot \pi}{N} \cdot \sum_{j=0}^{N-1} f(x_j) \cdot e^{-i \cdot k \cdot x_j} = \frac{1}{N} \cdot \sum_{j=0}^{N-1} f(x_j) \cdot e^{-i \cdot k \cdot j \cdot 2 \cdot \pi / N}.$$

als numerische Approximationen der Fourier–Koeffizienten c_k. Man nennt diese Werte d_k die **„diskreten Fourier–Koeffizienten"**. Im Gegensatz zu den c_k, die mit wachsendem $|k|$ eine Nullfolge bilden, gilt für sie offensichtlich die Periodizität

$$d_{k+N} \;=\; d_k \;, \quad k \in \mathbb{Z} \;,$$

sodass lediglich N dieser Werte numerisch auszuwerten sind. Als Repräsentanten betrachten wir im Folgenden nur noch die Werte $d_0, \ldots, d_{N-1}$.
Die diskreten Fourier–Koeffizienten sind durch N Funktionswerte $f(x_j)$ an den äquidistanten Stützpunkten $x_j = j \cdot 2 \cdot \pi / N$ mit $j = 0, \ldots, N-1$ definiert. Da die d_k Linearkombinationen von $f_j = f(x_j)$ sind, kann die Transformation $(f_0, \ldots, f_{N-1})^T \in \mathbb{C}^N \;\rightarrow\; (d_0, \ldots, d_{N-1})^T \in \mathbb{C}^N$ als lineare Abbildung des $\mathbb{C}^N$ auf sich selbst aufgefaßt werden:

Definition 1.52: (Diskrete Fourier-Transformation (DFT))
Die Abbildung eines Datensatzes $(f_0, \ldots, f_{N-1})^T \in \mathbb{C}^N$ *auf die* **„diskreten Fourier–Koeffizienten"**

$$d_k = \frac{1}{N} \cdot \sum_{j=0}^{N-1} f_j \cdot e^{-\mathrm{i} \cdot j \cdot k \cdot 2 \cdot \pi / N}, \quad k = 0, \ldots, N-1$$

heißt **diskrete Fourier–Transformation**.

Für Anwendungen ist es wichtig, sich die Zuordnung der diskreten Koeffizienten zu den wirklichen Fourier–Daten vor Augen zu halten, denn für „großes" $|k|$ wird d_k wegen der Periodizität $d_k = d_{N+k}$ keine vernünftige Approximation von c_k sein (Bild 1.1):

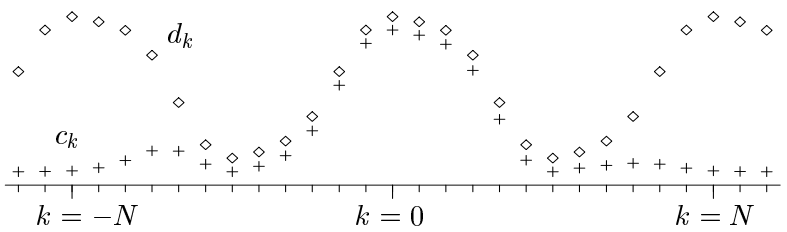


Bild 1.1: Fourier– und diskrete Fourier–Koeffizienten.

Bemerkung 1.53: *In vielen technischen Anwendungen ist die Interpretation des Indexes k als „tiefe" oder „hohe Frequenz" wichtig. d.h., die Interpretation als Approximation der kontinuierlichen Fourier–Koeffizienten c_k.*
Es gilt: Für Daten $(f_0, \ldots, f_{N-1})$, die einer äquidistanten Zerlegung einer Funktion $f(x)$ entstammen, sind die diskreten Fourier–Koeffizienten d_k für $|k| \ll N$ Approximationen der Fourier–Koeffizienten c_k. Für die Repräsentanten $d_0, \ldots, d_{N-1}$ gilt wegen der Periodizität $d_{N+k} = d_k$ damit

$$\begin{aligned} c_k &\approx d_k && \text{für } 0 \le k \ll N, \\ c_{-k} &\approx d_{N-k} && \text{für } 1 \le k \ll N. \end{aligned}$$

Merke: *Die diskreten Koeffizienten $d_{N-1}, d_{N-2}, \ldots$ sind als Approximationen der „niederfrequenten" Fourier–Koeffizienten $c_{-1}, c_{-2}, \ldots$ anzusehen.*

Wenngleich man sich rechentechnisch auf die Repräsentanten $d_0, \ldots, d_{N-1}$ konzentriert, sollte man in physikalischen Interpretationen die Repräsentanten d_k von $k \approx -N/2$ bis $k \approx N/2$ betrachten, welche als Approximationen der kontinuierlichen c_k angesehen werden können.

Bemerkung 1.54: *Der Fall reeller Daten $f_0, \ldots, f_{N-1}$ wird offensichtlich durch die Beziehung $d_{N-k} = \overline{d}_k$ charakterisiert:*

$$\overline{d_k} = \frac{1}{N} \cdot \sum_{j=0}^{N-1} f_j \cdot \overline{e^{-\mathrm{i}\cdot j\cdot k\cdot 2\cdot \pi/N}} = \frac{1}{N} \cdot \sum_{j=0}^{N-1} f_j \cdot e^{\mathrm{i}\cdot j\cdot k\cdot 2\cdot \pi/N} = d_{-k} = d_{N-k}.$$

Die Rekonstruierbarkeit des Datensatzes $(f_0, \ldots, f_{N-1})$ aus den diskreten Fourier–Koeffizienten $(d_0, \ldots, d_{N-1})$ ist ausgesprochen einfach:

Satz 1.55: (Diskrete Fourier–Rücktransformation)
Die Daten $(f_0, \ldots, f_{N-1})^T \in \mathbb{C}^N$ lassen sich durch

$$f_j \;=\; \sum_{k=0}^{N-1} d_k \cdot e^{\mathrm{i}\cdot j\cdot k\cdot 2\cdot \pi/N}\;, \quad j = 0, \ldots, N-1$$

aus ihren diskreten Fourier–Koeffizienten $(d_0, \ldots, d_{N-1})^T \in \mathbb{C}^N$ zurückgewinnen.

Beweis: In Matrixschreibweise handelt es sich bei der DFT um eine einfache Multiplikation

$$\begin{pmatrix} d_0 \\ \vdots \\ d_{N-1} \end{pmatrix} \;=\; \frac{1}{N} \cdot \overline{V} \begin{pmatrix} f_0 \\ \vdots \\ f_{N-1} \end{pmatrix}$$

mit der von den Potenzen $1, \overline{\omega}, \ldots, \overline{\omega}^{N-1}$ der komplexen Einheitswurzel $\overline{\omega} = e^{-\mathrm{i}\cdot 2\cdot \pi/N}$ erzeugten symmetrischen Vandermondeschen Matrix

$$\overline{V} \;=\; (\,\overline{\omega}^{kj}\,)_{\substack{k=0..N-1\\ j=0..N-1}} \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & \overline{\omega} & \overline{\omega}^2 & \ldots & \overline{\omega}^{N-1} \\ 1 & \overline{\omega}^2 & \overline{\omega}^4 & \ldots & \overline{\omega}^{2\cdot(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \overline{\omega}^{N-1} & \overline{\omega}^{2\cdot(N-1)} & \ldots & \overline{\omega}^{(N-1)^2} \end{pmatrix}.$$

Die Transformation ist leicht invertierbar, denn $\overline{V}$ stellt sich als bis auf Skalierung unitär heraus: die Inverse V ist die durch Potenzen von $\omega = e^{\mathrm{i}\cdot 2\cdot \pi/N} = \overline{\omega}^{-1}$ erzeugte Vandermondesche Matrix:

$$\left(\frac{1}{N} \cdot \overline{V}\right)^{-1} = V = (\,\omega^{j\cdot k}\,)_{\substack{j=0..N-1\\ k=0..N-1}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \ldots & \omega^{N-1} \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 & \ldots & \omega^{2\cdot(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega^{N-1} & \omega^{2\cdot(N-1)} & \ldots & \omega^{(N-1)^2} \end{pmatrix}.$$

Wie durch die Bezeichnungen schon angedeutet, entsteht $\overline{V}$ durch komplexe Konjugation aus V. Zur Invertierung betrachte man die Spalten

$$\vec{e}_k \;=\; (\,1, \omega^k, \omega^{2\cdot k}, \ldots, \omega^{(N-1)\cdot k}\,)^T\;, \quad k = 0, \ldots, N-1$$

von V, die bezüglich des üblichen komplexen euklidischen Skalarproduktes $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \sum \overline{a_j} \cdot b_j$ orthogonal sind:

$$\langle \vec{e}_{k_1}, \vec{e}_{k_2} \rangle \;=\; \sum_{j=0}^{N-1} \overline{\omega}^{k_1 \cdot j} \omega^{j \cdot k_2} \;=\; \sum_{j=0}^{N-1} \left(\omega^{(k_2 - k_1)} \right)^j \;=\; \begin{cases} N & \text{für } k_1 = k_2 \\ 0 & \text{für } k_1 \neq k_2\;. \end{cases}$$

Hierbei ergibt sich der zweite Fall über die geometrische Reihe

$$\sum_{j=0}^{N-1} \left(\omega^{(k_2 - k_1)} \right)^j \;=\; \frac{\omega^{(k_2-k_1)\cdot N} - 1}{\omega^{(k_2-k_1)} - 1} \;=\; \frac{e^{\mathrm{i}\cdot(k_2-k_1)\cdot 2\cdot\pi} - 1}{e^{\mathrm{i}\cdot(k_2-k_1)\cdot 2\cdot\pi/N} - 1} \;=\; 0\;,$$

wobei der Nenner für keinen der Werte $k_1 \neq k_2 \in \{0, \ldots, N-1\}$ verschwindet. Mit $(\overline{V} \cdot V)_{k_1 k_2} = \langle \vec{e}_{k_1}, \vec{e}_{k_2} \rangle = N \cdot \delta_{k_1 k_2}$ folgt hieraus sofort $\overline{V} \cdot V = N \cdot \mathbb{1}$.

Q.E.D.

1.3.7 Schnelle Fourier–Transformation (FFT)

↓15.11.02

Die wesentliche numerische Problemstellung ist die effektive Durchführung der diskreten Fourier–Transformation aus Definition 1.52 bzw. der Rücktransformation aus Satz 1.55. Da es sich in beiden Fällen um eine einfache Matrix/Vektormultiplikation handelt, besteht der Rechenaufwand bei einer „naiven" Auswertung der Summen aus $O(N^2)$ Operationen, wo N die Anzahl der zu transformierenden Daten ist. Eine überaus wichtige Beobachtung ist, dass man die spezielle Form dieser Summen ausnutzen kann, die Berechnung von $O(N^2)$ Elementaroperationen auf $O(N \cdot \log_2(N))$ zu reduzieren. Die Klasse von Verfahren, die N Fourier–Daten mit einem Aufwand von $O(N \cdot \log_2(N))$ berechnen, wird im Englischen als **F**ast **F**ourier **T**ransform (FFT) bezeichnet.
Der prinzipielle Gedanke ist sehr einfach und basiert auf der Beobachtung, dass für gerades $N = 2 \cdot m$ die diskrete Fourier–Transformation der Daten $(f_0, f_1, \ldots, f_{2\cdot m-1})$ leicht aus den Transformierten der halbierten Datensätze $(f_0, f_2, \ldots, f_{2\cdot m-2})$ und $(f_1, f_3, \ldots, f_{2m-1})$ mit geraden bzw. ungeraden Indizes aufgebaut werden kann:

Satz 1.56: (Synthese diskreter Fourier–Koeffizienten aus halben Datensätzen)

Es seien $d_k^{(f_0,f_2,\ldots,f_{2\cdot m-2})}$ *und* $d_k^{(f_1,f_3,\ldots,f_{2\cdot m-1})}$ *die diskreten Fourier–Koeffizienten der Datensätze* $(f_0, f_2, \ldots, f_{2\cdot m-2})$ *und* $(f_1, f_3, \ldots, f_{2\cdot m-1})$ *der Länge* m*. Dann ergeben sich die diskreten Fourier–Koeffizienten* $d_k = d_k^{(f_0,f_1,\ldots,f_{2\cdot m-1})}$ *des vollständigen Datensatzes der Länge* $2 \cdot m$ *durch*

$$\begin{aligned} d_k &= \frac{1}{2} \cdot \left(d_k^{(f_0,f_2,\ldots,f_{2\cdot m-2})} + e^{-\mathrm{i}\cdot k\cdot \pi/m} \cdot d_k^{(f_1,f_3,\ldots,f_{2\cdot m-1})} \right) \\ d_{m+k} &= \frac{1}{2} \cdot \left(d_k^{(f_0,f_2,\ldots,f_{2\cdot m-2})} - e^{-\mathrm{i}\cdot k\cdot \pi/m} \cdot d_k^{(f_1,f_3,\ldots,f_{2\cdot m-1})} \right) \end{aligned}$$

mit $k = 0, \ldots, m-1$.

Beweis: In der die Koeffizienten $d_k^{[2\cdot m]}$ definierenden Summe werden die geraden und ungeraden Indizes getrennt:

$$\begin{aligned} d_k &= \frac{1}{2\cdot m} \cdot \left(\sum_{\substack{j=0 \\ j \text{ gerade}}}^{2\cdot m-2} f_j \cdot e^{-\mathrm{i}\cdot j\cdot k\cdot 2\cdot \pi/(2\cdot m)} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \text{ ungerade}}}^{2\cdot m-1} f_j \cdot e^{-\mathrm{i}\cdot j\cdot k\cdot 2\cdot \pi/(2\cdot m)} \right) \\ &= \frac{1}{2\cdot m} \cdot \left(\sum_{p=0}^{m-1} f_{2\cdot p} \cdot e^{-\mathrm{i}\cdot 2\cdot p\cdot k\cdot 2\cdot \pi/(2\cdot m)} + \sum_{p=0}^{m-1} f_{2\cdot p+1} \cdot e^{-\mathrm{i}\cdot (2\cdot p+1)\cdot k\cdot 2\cdot \pi/(2\cdot m)} \right) \\ &= \frac{1}{2\cdot m} \cdot \left(\sum_{p=0}^{m-1} f_{2\cdot p} \cdot e^{-\mathrm{i}\cdot p\cdot k\cdot 2\cdot \pi/m} + \sum_{p=0}^{m-1} f_{2\cdot p+1} \cdot e^{-\mathrm{i}\cdot p\cdot k\cdot 2\cdot \pi/m} \cdot e^{-\mathrm{i}\cdot k\cdot \pi/m} \right). \end{aligned}$$

Mit der Umbenennung $p \to j$ erhält man

$$d_k = \frac{1}{2} \cdot \Big(\underbrace{\frac{1}{m} \cdot \sum_{j=0}^{m-1} f_{2\cdot j} \cdot e^{-\mathrm{i}\cdot j\cdot k\cdot 2\cdot \pi/m}}_{d_k^{(f_0,f_2,\ldots,f_{2\cdot m-2})}} + \underbrace{e^{-\mathrm{i}\cdot k\cdot \pi/m} \cdot \frac{1}{m} \cdot \sum_{j=0}^{m-1} f_{2\cdot j+1} \cdot e^{-\mathrm{i}\cdot j\cdot k\cdot 2\cdot \pi/m}}_{d_k^{(f_1,f_3,\ldots,f_{2\cdot m-1})}} \Big),$$

wobei $k = 0, \ldots, 2\cdot m-1$. Offensichtlich treten hierbei die diskreten Fourier–Koeffizienten der halbierten Datensätze auf. Da für sie der Frequenzindex nur von 0 bis $m-1$ laufen sollte, kann auch die durch Verschiebung $k \to m+k$ entstehende Variante betrachtet werden, für die sich lediglich das Vorzeichen der zweiten Summe ändert:

$$d_{m+k} = \frac{1}{2} \cdot \Big(\frac{1}{m} \cdot \sum_{j=0}^{m-1} f_{2\cdot j} \cdot e^{-\mathrm{i}\cdot j\cdot k\cdot 2\cdot \pi/m} - e^{-\mathrm{i}\cdot k\cdot \pi/m} \, \frac{1}{m} \cdot \sum_{j=0}^{m-1} f_{2\cdot j+1} \cdot e^{-\mathrm{i}\cdot j\cdot k\cdot 2\cdot \pi/m} \Big).$$

Mit $k = 0, \ldots, m-1$ erhält man so alle Fourier–Koeffizienten des vollständigen Datensatzes.

Q.E.D.

Der dramatische Effekt dieser Zurückführung einer Transformation auf zwei Transformationen der halben Länge wird schnell klar. Als Kosten rechnen wir zur Vereinfachung nur die Anzahl der auszuführenden Multiplikation (es sind jeweils ähnlich viele Additionen auszuführen). Die Berechnung der Exponentialfaktoren wird vernachlässigt: man kann sie z.B. für gegebenes N im Vorfeld berechnen und abspeichern. Führt man die Transformation der halbierten Daten jeweils „naiv" mit den Kosten $(N/2)^2$ durch, so ergibt sich insgesamt eine Kostenreduktion

$$\text{Kosten}(N) = 2 \cdot \text{Kosten}\Big(\frac{N}{2}\Big) + N = \frac{N^2}{2} + N$$

auf ungefähr die Hälfte der Ausgangskosten N^2 für die „naive" Berechnung der Gesamttransformation. (In der „Synthese" der halbierten Fourier–Daten fallen noch einmal N Multiplikationen mit den Faktoren $e^{-\mathrm{i}\cdot k\cdot\pi/(N/2)}$ an, deren Berechnung hier nicht mitgezählt wird.)

Das in Satz 1.56 beschriebene „divide and conquer"–Prinzip reduziert den Rechenaufwand auf etwa die Hälfte. Natürlich wird man, wenn möglich, durch fortgesetztes Halbieren die Transformation auf möglichst kleine Datenlängen zurückführen. Für $N = 2^n$ kann die Berechnung auf diese Weise bis auf die Transformation von Datensätzen der Länge 1 reduziert werden, welche trivial ist (der diskrete Fourier–Koeffizient stimmt mit dem Funktionswert überein). Der Aufwand besteht dann lediglich aus der rekursiven Synthese dieser Daten zu den Fourier–Koeffizienten der gewünschten Länge.

Die einfachste Möglichkeit der Implementierung ist eine rekursiv arbeitende Prozedur, die einen Datensatz der Länge $N = 2^n$ zerlegt, sich dann zweimal selbst mit den halbierten Datensätzen aufruft und die Synthese der zurückgelieferten Fourier–Koeffizienten durchführt. Offensichtlich ist der FFT-Algorithmus auf diese Weise in wenigen Zeilen zu programmieren:

Rekursive FFT–Implementation 1.57:

Für ein Datenfeld der Länge $N = 2^n$:

```
FFT := procedure(N, [f[0], f[1], ..., f[N-1]])
local D, D1, D2, k, t;
begin
   if N = 1 then return([f[0]]) end;
   D1 := FFT(N/2, [f[0], f[2], f[4], ..., f[N-2]]);
   D2 := FFT(N/2, [f[1], f[3], f[5], ..., f[N-1]]);
   for k from 0 to N/2 - 1 do
      t := e^(-i*k*2*π/N) * D2[k];
      D[  k  ] := (D1[k] + t)/2;
      D[N/2+k] := (D1[k] - t)/2;
   end;
   return([D[0], D[1], ... , D[N-1]]);
end;
```

Aufwand der FFT 1.58:

Die DFT eines Datensatzes der Länge $N = 2^n$ läßt sich per FFT mit $O(N \cdot \log_2(N))$ Elementaroperationen durchführen.

Beweis: Nach den Vorüberlegungen benötigt die Synthese 1.56 der DFTen zweier Datensätze der jeweiligen Länge m zum Gesamtdatensatz der Länge $2 \cdot m$ nur $2 \cdot m$ Multiplikationen (und ebenso viele Additionen). Da der Datensatz der Länge $N = 2^n$ in n Schritten rekursiv bis zu Datensätzen der Länge 1 aufgespalten werden kann, fallen nur die Synthese–Kosten an. Im r-ten rekursiven Zerlegungsschritt liegen 2^r Datensätze der jeweiligen Länge 2^{n-r} vor, die jeweils mit dem Aufwand 2^{n-r+1} paarweise zu synthetisieren sind. Mit 2^{r-1} zu synthetisierenden Pärchen im r-ten Schritt ergibt sich der Gesamtaufwand zu

$$\sum_{r=1}^{n} 2^{r-1} \cdot 2^{n-r+1} = \sum_{r=1}^{n} 2^n = n \cdot 2^n = \log_2(N) \cdot N.$$

Q.E.D.

1.3.8 Technische Durchführung der FFT

(Dieser Abschnitt ist nur der Vollständigkeit halber sehr detailliert in dieses Skript aufgenommen worden. In der Vorlesung werden die technischen Details nur sehr grob angedeutet).

Wenngleich die rekursive Implementation 1.57 der Synthese 1.56 für Daten der Länge $N = 2^n$ extrem einfach ist, ist es allgemein ratsam, iterative Berechnungen einer rekursiven Implementierung vorzuziehen. In der Tat ist dies hier leicht möglich, wobei auch der benötigte Speicherplatzbedarf optimiert wird. In der

folgenden Diskussion der technischen Details wird zunächst der Halbierungsmechanismus genauer untersucht. Als Beispiel betrachte man den Fall $N = 2^3$, in dem die Daten $f_0, \ldots, f_7$ rekursiv in Pakete halber Länge zerlegt werden:

$$
\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & & & & & & [f_0, f_1, f_2, f_3, f_5, f_5, f_6, f_7] & & & & & & & \\
 & & & & & & \swarrow & & & & \searrow & & & & \\
 & & & & [f_0, f_2, f_4, f_6] & & & & & & & & [f_1, f_3, f_5, f_7] & & \\
 & & & \swarrow & & \searrow & & & & & & \swarrow & & \searrow & \\
 & [f_0, f_4] & & & & & [f_2, f_6] & & & [f_1, f_5] & & & & & [f_3, f_7] \\
\swarrow & & \searrow & & & \swarrow & & \searrow & \swarrow & & \searrow & & \swarrow & & \searrow \\
[f_0] & & [f_4] & & [f_2] & & [f_6] & & [f_1] & & [f_5] & & [f_3] & & [f_7]
\end{array}
$$

Aus der trivialen diskreten Fourier–Transformation der Länge 1 ergeben sich in der letzten Zeile die Koeffizienten $d_0^{[j]} = f_j$, die dann von unten nach oben über die Syntheseregel zusammenzubauen sind:

$$
\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & & & & & & [d_0^{[01\ldots7]}, d_1^{[01\ldots7]}, d_2^{[01\ldots7]}, d_3^{[01\ldots7]}, d_4^{[01\ldots7]}, d_5^{[01\ldots7]}, d_6^{[01\ldots7]}, d_7^{[01\ldots7]}] & & & & & & & \\
 & & & & & & \nearrow & & & & \nwarrow & & & & \\
 & [d_0^{[0246]}, d_1^{[0246]}, d_2^{[0246]}, d_3^{[0246]}] & & & & & & & & [d_0^{[1357]}, d_1^{[1357]}, d_2^{[1357]}, d_3^{[1357]}] & & & & & \\
 & & & \nearrow & & \nwarrow & & & & & & \nearrow & & \nwarrow & \\
 & [d_0^{[04]}, d_1^{[04]}] & & & & & [d_0^{[26]}, d_1^{[26]}] & & & [d_0^{[15]}, d_1^{[15]}] & & & & & [d_0^{[37]}, d_1^{[37]}] \\
\nearrow & & \nwarrow & & \nearrow & & \nwarrow & & \nearrow & & \nwarrow & & \nearrow & & \nwarrow \\
[d_0^{[0]}] & & [d_0^{[4]}] & & [d_0^{[2]}] & & [d_0^{[6]}] & & [d_0^{[1]}] & & [d_0^{[5]}] & & [d_0^{[3]}] & & [d_0^{[7]}]
\end{array}
$$

Hierbei entspricht jeder durch [ ] zusammengefaßte Block den Fourier–Koeffizienten der entsprechenden Teildaten von $f_0, \ldots, f_7$, z.B. stellt $[d_0^{[0246]}, \ldots, d_3^{[0246]}]$ die Fourier–Daten von $[f_0, f_2, f_4, f_6]$ dar.

Allgemein sei nun ein in ein Array $F^{[n]} = F^{[n]}(0) = [f_0, \ldots, f_{N-1}]$ eingeordneter Datensatz mit $N = 2^n$ gegeben. Im ersten Halbierungsschritt werden zwei Teilarrays $F^{[n-1]}(0) = [f_0, f_2, \ldots, f_{N-2}]$ und $F^{[n-1]}(1) = [f_1, f_3, \ldots, f_{N-1}]$ gebildet, die zusammen das Array

$$F^{[n-1]} \;=\; [F^{[n-1]}(0), F^{[n-1]}(1)] \;=\; [f_0, f_2, \ldots, f_{N-2}, f_1, f_3, \ldots, f_{N-1}]$$

der Länge N ergeben. Nach m Halbierungsschritten sind 2^m Teilarrays $F^{[n-m]}(0), \ldots, F^{[n-m]}(2^m - 1)$ der Länge 2^{n-m} entstanden, die zum gesamten

Datenfeld $F^{[n-m]}$ zusammengefaßt werden:

$$
\begin{array}{lccccccccccccccc}
F^{[n]} & : & & & & & & F^{[n]}(0) = [f_0, f_1, \ldots, f_{N-1}] & & & & & & & & \\
 & & & & & & & \swarrow & & & & & & \searrow & & \\
F^{[n-1]} & : & & & & F^{[n-1]}(0) & & & & & & F^{[n-1]}(1) & & & & \\
 & & & & & \swarrow & \searrow & & & & & \swarrow & \searrow & & & \\
F^{[n-2]} & : & & F^{[n-2]}(0) & & & & F^{[n-2]}(1) & & & & F^{[n-2]}(2) & & & & F^{[n-2]}(3) \\
 & & & \swarrow & \searrow & & & \swarrow & \searrow & & & \swarrow & \searrow & & & \swarrow \quad \searrow \\
\vdots & & & \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots & & & \vdots \quad \vdots \\
 & & \swarrow & \searrow & & & & & & & & & & & \swarrow & \searrow \\
F^{[0]} & : & F^{[0]}(0) & & \ldots & & \ldots & & \ldots & & \ldots & & \ldots & & \ldots & F^{[0]}(N-1)
\end{array}
$$

Für die Aufteilung im m.ten Halbierungsschritt gilt nach Konstruktion

$$
F_k^{[n-m]}(j) \;=\; \begin{cases} F_{k/2}^{[n-m-1]}(2 \cdot j) & \text{für gerades } k \\ F_{(k-1)/2}^{[n-m-1]}(2 \cdot j + 1) & \text{für ungerades } k \end{cases} \tag{1.1}
$$

mit $k = 0, 1, .., 2^{n-m} - 1$ und $j = 0, .., 2^m - 1$. Hierbei ist $F_k^{[n-m]}(j)$ das k.te Element des Teilarrays $F^{[n-m]}(j)$, wobei die Plätze mit Null beginnend gezählt werden.

Nach $m = n$ Schritten hat man $N = 2^n$ Datensätze $F^{[0]}(j)$ der Länge 1 ($j = 0, .., 2^n - 1$). Offensichtlich ist die ursprüngliche Reihenfolge $f_0, f_1, \ldots$ der Ausgangsdaten durch den Halbierungsmechanismus verändert worden. Diese Permutation ist zu bestimmen.

Definition 1.59: (bit-reverse)

Zu $n \in \{1, 2, \ldots\}$ sei $\sum_{k=0}^{n-1} b_k \cdot 2^k$ die eindeutige Binärdarstellung einer Zahl in $\mathcal{M}_n = \{0, 1, \ldots, 2^n - 1\}$ mit Binärziffern („bits") $b_k \in \{0, 1\}$. Die durch

$$
\sigma_n : \quad \sum_{k=0}^{n-1} b_k \cdot 2^k \quad \rightarrow \quad \sum_{k=0}^{n-1} b_{n-1-k} \cdot 2^k
$$

definierte Abbildung von $\mathcal{M}_n$ nach $\mathcal{M}_n$ heißt **bit-reverse**.

Die Namensgebung zeigt die Wirkung von σ_n an: die Reihenfolge der Binärziffern wird umgedreht. Folgende Eigenschaften sind leicht zu zeigen:

$$\begin{array}{llll}
\text{a)} & \sigma_n(j) & = \sigma_{n+1}(2\cdot j)\ , & j=0,\dots,2^n-1, \\
\text{b)} & \sigma_n(j)\ +\ 2^n & = \sigma_{n+1}(2\cdot j+1)\ , & j=0,\dots,2^n-1, \\
\text{c)} & \sigma_n(j+2^k) & = \sigma_n(j)\ +\ 2^{n-k-1}\ , & \begin{array}{l} k=0,1,\dots,n-1, \\ j=0,1,\dots,2^k-1. \end{array}
\end{array}$$

Mit c) läßt sich das zu n gehörende bit-reverse leicht durch die folgende Rekursion auf dem Rechner ermitteln und in einem Array $\sigma_n[j] = \sigma_n(j)$, $j=0,\dots,2^n-1$, speichern:

```
σn[0] := 0 ;
for k := 0 to n − 1 do
   for j := 0 to 2^k − 1 do  σn[j + 2^k] := σn[j] + 2^(n−k−1) ;
```

Hierbei werden durch die j-Schleife die Plätze $2^k,\dots,2^{k+1}-1$ korrekt belegt, sodass zuletzt der bit-reverse für alle Argumente $0,\dots,2^n-1$ berechnet ist. Hierzu werden $N-1=2^n-1$ Additionen ganzer Zahlen benötigt, was verglichen mit dem Gesamtaufwand $O(N\cdot\log_2(N))$ des FFT-Algorithmus akzeptabel ist. Allerdings wird bei dieser Vorgehensweise viel Speicherplatz belegt (genauso viele ganzzahlige Variable wie Daten $f_0,\dots,f_{N-1}$). In einigen Programmierumgebungen können die binären bits der internen Zahlendarstellung angesprochen und manipuliert werden, sodass sich durch Vertauschung der bit-Reihenfolge ein direkter und effektiver Zugang zum bit-reverse bietet.

Mit Hilfe dieser Permutationen läßt sich die Belegung der nach m Halbierungsschritten entstandenen Teilarrays beschreiben:

Hilfssatz 1.60:

Für die durch (1.1) *aus* $F^{[n]}(0)=[f_0,f_1,\dots,f_{2^n-1}]$ *entstehenden Teilarrays gilt*

$$F_k^{[n-m]}(j)\ =\ f_{k\cdot 2^m+\sigma_m(j)}\ ,\quad k=0,\dots,2^{n-m}-1\ ,\quad j=0,\dots,2^m-1\ .$$

Beweis: Induktion nach m. Wegen $\sigma_0(0)=0$ ist der Induktionsbeginn $m=0$ trivial, da nach Definition $F_k^{[n]}(0)=f_k$ gilt. Für den Induktionsschritt $m\to m+1$ ist die Zerlegungsvorschrift (1.1) zu verifizieren, d.h., es ist

$$f_{k\cdot 2^m+\sigma_m(j)}\ =\ \begin{cases} f_{k\cdot 2^m+\sigma_{m+1}(2\cdot j)} & \text{für gerades } k \\ f_{(k-1)\cdot 2^m+\sigma_{m+1}(2\cdot j+1)} & \text{für ungerades } k \end{cases}$$

zu überprüfen. Dies ist mit den oben angegebenen Eigenschaften a) $\sigma_m(j) = \sigma_{m+1}(2 \cdot j)$ und b) $\sigma_{m+1}(2 \cdot j + 1) = \sigma_m(j) + 2^m$ aber garantiert.

Q.E.D.

Damit ist die gesuchte Reihenfolge der Ausgangsdaten nach m Halbierungsschritten gefunden: die zuletzt erzeugten Arrays der Länge 1 sind jeweils mit dem Datum $F^{[0]}(j) = [f_{\sigma_n(j)}]$ belegt.

Die Zwischenschritte der Zerlegung brauchen in der praktischen Anwendung natürlich nicht ausgeführt zu werden, da die zuletzt vorliegende Permutation über den bit-reverse identifiziert worden ist. Die Eingabedaten $[f_0, \ldots, f_{N-1}]$ werden gemäß dieser Permutation in ein Array $D^{[0]}$ eingelesen, d.h., man setzt formal

$$D^{[0]} \;=\; F^{[0]} \;=\; [f_{\sigma_n(0)}, f_{\sigma_n(1)}, \ldots, f_{\sigma_n(n-1)}] \;.$$

Da für einen Datensatz der Länge 1 der Fourier–Koeffizient mit diesem Datum übereinstimmt, kann man sich $D^{[0]}$ aufgebaut denken als

$$D^{[0]} \;=\; [D^{[0]}(0), D^{[0]}(1), \ldots, D^{[0]}(N-1)] \;,$$

wobei $D^{[0]}(j) = F^{[0]}(j) = [f_{\sigma_n(j)}]$ als Fourier–Koeffizient von $[f_{\sigma_n(j)}]$ zu interpretieren ist. Nun können über das Syntheseprinzip aus Satz 1.56 rekursiv die Transformierten von Datensätzen der Länge 2, dann der Länge 4 usw. aufgebaut werden, bis sich zuletzt die gesuchten diskreten Fourier–Koeffizienten der Gesamtdaten $F^{[n]}$ ergeben.

Wie im Übersichtsschema in Tafel 1.1 angedeutet ist, können zu jedem der in der vorherigen Zerlegung konstruierten Teildatensätze $F^{[n-m]}(j)$ die entsprechenden Fourier–Koeffizienten $D^{[n-m]}(j)$ betrachtet werden, welche in einem Gesamtarray $D^{[n-m]}$ zusammengefaßt werden:

$$\begin{aligned} D^{[n-m]}_{j \cdot 2^{n-m}+k} \;&=\; D^{[n-m]}_k(j) \\ k = 0, 1, .., 2^{n-m} - 1 \;, \quad & j = 0, 1, .., 2^m - 1 \;. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Durch die mit Satz 1.56 gegebene Regel über das Zusammensetzen von Fourier–Koeffizienten aus halben Datensätzen lassen sich über $D^{[n-m-1]}(2 \cdot j)$ und $D^{[n-m-1]}(2 \cdot j + 1)$ die Fourier–Koeffizienten $D^{[n-m]}(j)$ berechnen, d.h., das Gesamtarray D^{n-m} ergibt sich rekursiv aus $D^{[n-m-1]}$. Im Detail liefert Satz 1.56 mit $r = n - m$

$$\begin{aligned} D^{[r]}_k(j) \;&=\; \frac{1}{2} \left(D^{[r-1]}_k(2 \cdot j) \;+\; e^{-\mathrm{i} \cdot k \cdot 2 \cdot \pi / 2^r} \; D^{[r-1]}_k(2 \cdot j + 1) \right) \\ D^{[r]}_{2^{r-1}+k}(j) \;&=\; \frac{1}{2} \left(D^{[r-1]}_k(2 \cdot j) \;-\; e^{-\mathrm{i} \cdot k \cdot 2 \cdot \pi / 2^r} \; D^{[r-1]}_k(2 \cdot j + 1) \right) \end{aligned}$$

$$
\begin{tikzcd}
\textbf{Eingabe:}\ F^{[n]} = [f_0, f_1, \ldots, f_{2^n-1}] \arrow[d] & \left(\xrightarrow{\mathrm{DFT}}\right) & \textbf{Ausgabe:}\ D^{[n]} = [d_0, d_1, \ldots, d_{2^n-1}] \\
F^{[n]}(0) \arrow[dl] \arrow[dr] & \left(\xrightarrow{\mathrm{DFT}}\right) & D^{[n]}(0) \arrow[u] \\
F^{[n-1]}(0) \arrow[dl] \arrow[dr] & F^{[n-1]}(1) \arrow[dl] \arrow[dr] & \left(\xrightarrow{\mathrm{DFT}}\right) & D^{[n-1]}(0) \arrow[ur] & D^{[n-1]}(1) \arrow[ul] \\
F^{[n-2]}(0) \arrow[dl] \arrow[dr] & F^{[n-2]}(1) \arrow[dl] \arrow[dr] & F^{[n-2]}(2) \arrow[dl] \arrow[dr] & F^{[n-2]}(3) \arrow[dl] \arrow[dr] & \left(\xrightarrow{\mathrm{DFT}}\right) & D^{[n-2]}(0) \arrow[ur] & D^{[n-2]}(1) \arrow[ul] & D^{[n-2]}(2) \arrow[ur] & D^{[n-2]}(3) \arrow[ul] \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
F^{[0]}(0) \arrow[dl] \arrow[dr] & F^{[0]}(1) \arrow[dl] \arrow[dr] & \cdots & F^{[0]}(2^n-2) \arrow[dl] \arrow[dr] & F^{[0]}(2^n-1) \arrow[dl] \arrow[dr] & \xrightarrow[\text{(trivial)}]{\mathrm{DFT}} & D^{[0]}(0) \arrow[ur] & D^{[0]}(1) \arrow[ul] & \cdots & D^{[0]}(2^n-2) \arrow[ur] & D^{[0]}(2^n-1) \arrow[ul] \\
\| & \| & & \| & \| & & \| & \| & & \| & \| \\
[f_{\sigma_n(0)}] & [f_{\sigma_n(1)}] & \cdots & [f_{\sigma_n(2^n-2)}] & [f_{\sigma_n(2^n-1)}] & & [f_{\sigma_n(0)}] & [f_{\sigma_n(1)}] & \cdots & [f_{\sigma_n(2^n-2)}] & [f_{\sigma_n(2^n-1)}]
\end{tikzcd}
$$

Tafel 1.1: Übersichtsschema zum FFT-Algorithmus

mit $k = 0, \ldots, 2^{r-1} - 1$ und $j = 0, \ldots, 2^{n-r} - 1$. Diese Daten sind alle im Array $D^{[r-1]}$ bzw. $D^{[r]}$ der Länge $N = 2^n$ gespeichert, für das sich mit der Belegung (1.2) die Rekursion $D^{[r-1]} \to D^{[r]}$ ergibt:

$$\begin{aligned} D^{[r]}_{j\cdot 2^r+k} &= \frac{1}{2}\cdot\left(D^{[r-1]}_{j\cdot 2^r+k} \;+\; e^{-\mathrm{i}\cdot k\cdot 2\cdot\pi/2^r}\cdot D^{[r-1]}_{j\cdot 2^r+2^{r-1}+k}\right) \\ D^{[r]}_{j\cdot 2^r+2^{r-1}+k} &= \frac{1}{2}\cdot\left(D^{[r-1]}_{j\cdot 2^r+k} \;-\; e^{-\mathrm{i}\cdot k\cdot 2\cdot\pi/2^r}\cdot D^{[r-1]}_{j\cdot 2^r+2^{r-1}+k}\right) \end{aligned}$$

$$r = 1, \ldots, n\ , \quad k = 0, \ldots, 2^{r-1} - 1\ , \quad j = 0, \ldots, 2^{n-r} - 1\ .$$

Man beachte, dass bei gegebenem r die Speicherplätze $j\cdot 2^r + k$ und $j\cdot 2^r + 2^{r-1} + k$ durch genau ein Indexpaar (j, k) addressiert werden. Damit werden die an diesen Stellen in $D^{[r-1]}$ gespeicherten Werte nur zur Berechnung dieser Stellen in $D^{[r]}$ benötigt, sodass die Komponenten von $D^{[r-1]}$ paarweise überschrieben werden können. Die Rekursion kann damit auf einem einzigen Array ausgeführt werden, und es ergibt sich die in Tafel 1.2 angegebene Implementierung des FFT-Algorithmus. Das Array D wird dabei mit den über den bit-reverse σ_n permutierten Eingangsdaten initialisiert, wobei die n-fache Multiplikation mit dem Faktor $1/2$ in der Rekursion durch die Multiplikation mit $1/2^n$ erledigt wird.

Mit

$$d_k = \frac{1}{N}\cdot\sum_{j=0}^{N-1} f_j\cdot e^{-\mathrm{i}\cdot j\cdot k\cdot 2\cdot\pi/N}\ , \quad f_j = \sum_{k=0}^{N-1} d_k\cdot e^{\mathrm{i}\cdot j\cdot k\cdot 2\cdot\pi/N}$$

ist die **Rücktransformation** von den diskreten Fourier–Koeffizienten auf die Ausgangsdaten mit dem selben Algorithmus durchzuführen, lediglich die Division durch $2^n = N$ in der Initialisierung ist fortzulassen und das Vorzeichen in der e-Funktion ist zu ändern.

Ignoriert man Initialisierung und Indexberechnung, so sind im angegebenen Verfahren $n\cdot 2^{n-1}$ Multiplikationen und $n\cdot 2^n$ Additionen auszuführen. Hinzu kommen die Auswertungen aller N.ten komplexen Einheitswurzeln (Potenzen von $e^{-\mathrm{i}\cdot 2\cdot\pi/N}$). Mit $n = \log_2(N)$ ergibt sich der Rechenaufwand $O(N\cdot\log_2(N))$.

Zusammenfassung 1.61:

Die diskreten Fourier–Koeffizienten zu N Daten lassen sich aus denen kleinerer Datensätze bestimmen, wodurch ihre Berechnung beschleunigt wird. Speziell kann der Rechenaufwand sowohl bei der Bestimmung der Fourier–Daten als auch bei der Rücktransformation für $N = 2^n$ auf $O(N\cdot\log_2(N))$ reduziert werden. Dieser FFT-Algorithmus kann sehr leicht rekursiv oder (besser) iterativ unter Optimierung des benötigten Speicherplatzes implementiert werden.

Fast Fourier Transform für ein Datenfeld der Länge 2^n

Eingabe: $F = [f_0, f_1, \ldots, f_{2^n-1}]$ (reeller oder komplexer Datensatz)
Ausgabe: $D = [d_0, d_1, \ldots, d_{2^n-1}]$ (diskrete Fourier–Koeffizienten)

```
FFT := procedure ( n , F ) ;
begin
  for k := 0 to 2^n − 1 do D[k] := 1/2^n · F[σ_n(k)] ;   (* Initialisierung *)
                                                          (* σ_n = bit-reverse *)
  for r := 1 to n do begin
    for k := 0 to 2^(r−1) − 1 do begin
      for j := 0 to 2^(n−r) − 1 do begin
        t := e^(−i·k·2·π/2^r) · D[j · 2^r + 2^(r−1) + k] ;
        D[j · 2^r + 2^(r−1) + k] := D[j · 2^r + k] − t ;
        D[j · 2^r + k] := D[j · 2^r + k] + t ;
      end ;
    end ;
  end ;
  return(D) ;
end ;
```

Tafel 1.2: Algorithmus „FFT" (Schnelle Fourier–Transformation)

1.3.9 Beliebige Perioden

↓20.11.02

Bislang hatten wir die Fourier–Zerlegung von auf $[-\pi, \pi]$ gegebenen Funktionen betrachtet, die man sich als $2 \cdot \pi$–periodisch fortgesetzt vorstellen sollte. Die Einschränkung auf das Standardintervall $[-\pi, \pi]$ geschah dabei lediglich aus schreibtechnischen Gründen, da alle Formeln hierfür besonders einfach werden.

Wir betrachten nun ein beliebiges Intervall $[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}]$, auf dem eine L–periodische Funktion $f(x) = f(x+L)$ gegeben ist. In Analogie zur Definition 1.25 betrachtet man das Orthogonalsystem

$$\{e^{\mathrm{i}\cdot k\cdot\frac{2\cdot\pi}{L}\cdot x}\}_{k\in\mathbb{Z}},$$

die entsprechenden Fourier–Koeffizienten

$$c_k = \frac{\langle e^{\mathrm{i}\cdot k\cdot\frac{2\cdot\pi}{L}\cdot x}, f\rangle}{\langle e^{\mathrm{i}\cdot k\cdot\frac{2\cdot\pi}{L}\cdot x}, e^{\mathrm{i}\cdot k\frac{2\cdot\pi}{L}\cdot\cdot x}\rangle} = \frac{1}{L}\cdot\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(x)\cdot e^{-\mathrm{i}\cdot k\cdot\frac{2\cdot\pi}{L}\cdot x}\,dx$$

und die entsprechenden Fourier–Approximationen

$$S_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k \cdot e^{\mathrm{i}\cdot k\cdot \frac{2\cdot\pi}{L}\cdot x}.$$

Diese Definitionen lassen sich folgendermassen interpretieren:
Zu $f : [-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}] \to \mathbb{C}$ betrachte die Funktion $g : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$, die durch eine Transformation $x \to \frac{L}{2\cdot\pi} \cdot x$ aus f entsteht:

$$g(x) = f\Big(\frac{L}{2\cdot\pi}\cdot x\Big), \quad f(x) = g\Big(\frac{2\cdot\pi}{L}\cdot x\Big).$$

Diese Funktion ist $2\cdot\pi$–periodisch:

$$g(x+2\cdot\pi) = f\Big(\frac{L}{2\cdot\pi}\cdot(x+2\cdot\pi)\Big) = f\Big(\frac{L}{2\cdot\pi}\cdot x + L\Big) = f\Big(\frac{L}{2\cdot\pi}\cdot x\Big) = g(x).$$

Zerlegt man g den vorangegangenen Kapiteln gemäß in eine Fourier–Reihe über dem Grundintervall $[-\pi, \pi]$, so ergeben sich nach Rücktransformation auf das Intervall $[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}]$ die obigen Darstellungen der Fourier–Koeffizienten und Fourier–Approximationen für f.

Damit ist unmittelbar klar, dass alle Strukturaussagen (Vollständigkeit bzgl. der L_2–Norm, punktweise Konvergenz bei Dirichlet–Bedingungen, Gibbssches Phänomen etc.) auch für allgemeine Perioden gelten.

Die zugeordneten diskreten Fourier–Koeffizienten ergeben sich wiederum durch eine äquidistante Zerlegung des Intervalls $[0, L]$ mittels der Stützstellen $x_j = \frac{j\cdot L}{N}$:

$$d_k = \frac{1}{N}\cdot\sum_{j=0}^{N-1} f(x_j)\cdot e^{-\mathrm{i}\cdot k\cdot\frac{2\cdot\pi}{L}\cdot x_j} = \frac{1}{N}\cdot\sum_{j=0}^{N-1} f(x_j)\cdot e^{-\mathrm{i}\cdot k\cdot j\cdot 2\cdot\pi/N}.$$

Setzt man $f_j = f(x_j)$, so ist die unterliegende Periode L gar nicht mehr sichtbar, d.h., die Theorie der DFT als Transformation eines Datensatzes $(f_0, f_1, \ldots, f_{N-1})$, der in Anwendungen durch äquidistantes „Sampling" über eine Periode einer Funktion entsteht, bleibt unverändert erhalten.

1.3.10 Mehrdimensionale Fourier–Transformation

Die vorgestellte numerische Fourier–Transformation für „eindimensionale" Datensätze ist sehr einfach auf höhere Dimensionen zu verallgemeinern, wobei lediglich mehrere der bereits diskutierten Transformationen hintereinanderzuschalten sind. Dies soll für den Fall einer doppelt periodischen Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ mit

$$f(x_1 + L_1, x_2) \;=\; f(x_1, x_2) \;=\; f(x_1, x_2 + L_2)$$

demonstriert werden. Ihr wird die Fourier–Reihe

$$f(x_1, x_2) \quad \sim \quad \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} c_{k_1 k_2} \cdot e^{\mathrm{i}\cdot k_1 \cdot 2\cdot \pi\, x_1/L_1} \cdot e^{\mathrm{i}\cdot k_2 \cdot 2\cdot \pi\, x_2/L_2}$$

mit den Fourier–Koeffizienten

$$c_{k_1 k_2} \;=\; \frac{1}{L_1 \cdot L_2} \cdot \int_0^{L_1} \int_0^{L_2} f(x_1, x_2) \cdot e^{-\mathrm{i}\cdot k_1 \cdot 2\cdot \pi \cdot x_1/L_1} \cdot e^{-\mathrm{i}\cdot k_2 \cdot 2\cdot \pi \cdot x_2/L_2}\; dx_1\, dx_2$$

zugeordnet. Für hinreichend glattes f kann wiederum gezeigt werden, dass die Funktion punktweise durch diese Reihe dargestellt wird. Approximiert man das Integral durch Riemann–Summen über dem rechteckigen Gitter

$$x_{1j_1} \;=\; j_1 \cdot \frac{L_1}{N_1}\,, \quad j_1 = 0, \ldots, N_1 - 1$$

$$x_{2j_2} \;=\; j_2 \cdot \frac{L_2}{N_2}\,, \quad j_2 = 0, \ldots, N_2 - 1\,,$$

so ergeben sich analog zu Abschnitt 1.3.6 mit $f_{j_1 j_2} = f(x_{1j_1}, x_{2j_2})$ die diskreten Fourier–Koeffizienten

$$d_{k_1 k_2} \;=\; \frac{1}{N_1 \cdot N_2} \cdot \sum_{j_1=0}^{N_1-1} \sum_{j_2=0}^{N_2-1} f_{j_1 j_2} \cdot e^{-\mathrm{i}\cdot j_1 \cdot k_1 \cdot 2\cdot \pi/N_1} \cdot e^{-\mathrm{i}\cdot j_2 \cdot k_2 \cdot 2\cdot \pi/N_2}$$

als Approximationen von $c_{k_1 k_2}$. Für sie gilt die Periodizität

$$d_{k_1+N_1, k_2} \;=\; d_{k_1, k_2} \;=\; d_{k_1, k_2+N_2}\,.$$

Die Transformation der Daten

$$\{\; f_{j_1, j_2}\;;\; j_1 = 0, \ldots, N_1 - 1\,,\; j_2 = 0, \ldots, N_2 - 1 \;\}$$

auf die Repräsentanten

$$\{\; d_{k_1, k_2}\;;\; k_1 = 0, \ldots, N_1 - 1\,,\; k_2 = 0, \ldots, N_2 - 1 \;\}$$

wird als **„zweidimensionale diskrete Fourier–Transformation"** $\mathbb{C}^{N_1 \cdot N_2} \to \mathbb{C}^{N_1 \cdot N_2}$ bezeichnet. Es ist leicht zu verifizieren, dass die Rücktransformation durch

$$f_{j_1 j_2} \;=\; \sum_{k_1=0}^{N_1-1} \sum_{k_2=0}^{N_2-1} d_{k_1 k_2} \cdot e^{\mathrm{i}\cdot j_1 \cdot k_1 \cdot 2\cdot \pi/N_1} \cdot e^{\mathrm{i}\cdot j_2 \cdot k_2 \cdot 2\cdot \pi/N_2}$$

gegeben ist. Diese Transformationen sind Hintereinanderschaltungen von „eindimensionalen" Abbildungen. Führt man nämlich zuerst für jedes $j_2 \in \{0, \ldots, N_2 - 1\}$ die diskrete Fourier–Transformation

$$g_{k_1 j_2} \;=\; \frac{1}{N_1} \cdot \sum_{j_1=0}^{N_1-1} f_{j_1 j_2} \cdot e^{-\mathrm{i}\cdot j_1 \cdot k_1 \cdot 2\cdot \pi/N_1}$$

der Länge N_1 bezüglich des ersten Indexes durch, so ergeben sich dann für jedes gegebene $k_1 \in \{0, \ldots, N_1 - 1\}$ die gesuchten Fourier–Koeffizienten durch die Transformation der Länge N_2 bezüglich des zweiten Indexes:

$$d_{k_1 k_2} \;=\; \frac{1}{N_2} \cdot \sum_{j_2=0}^{N_2-1} g_{k_1 j_2} \cdot e^{-\mathrm{i} \cdot j_2 \cdot k_2 \cdot 2 \cdot \pi / N_2} \;.$$

Stellt man sich die Ausgangsdaten in einer $N_1 \times N_2$–Matrix angeordnet vor, so werden zunächst alle Spalten

$$\left(f_{j_1 j_2}\right)_{\substack{j_1=0,\ldots,N_1-1 \\ j_2=0,\ldots,N_2-1}} \;=\; \left(\boxed{\begin{matrix} f_{0,0} \\ f_{1,0} \\ \vdots \\ f_{N_1-1,0} \end{matrix}} \; \boxed{\begin{matrix} f_{0,1} \\ f_{0,1} \\ \vdots \\ f_{N_1-,1} \end{matrix}} \; \cdots \; \boxed{\begin{matrix} f_{0,N_2-1} \\ f_{1,N_2-1} \\ \vdots \\ f_{N_1-1,N_2-1} \end{matrix}} \right)$$

transformiert, die sich so ergebende Zwischenmatrix wird dann zeilenweise

$$\left(g_{k_1 j_2}\right)_{\substack{k_1=0,\ldots,N_1-1 \\ j_2=0,\ldots,N_2-1}} \;=\; \left(\begin{matrix} \boxed{g_{0,0} \quad g_{0,1} \quad \cdots \quad g_{0,N_2-1}} \\ \boxed{g_{1,0} \quad g_{1,1} \quad \cdots \quad g_{1,N_2-1}} \\ \vdots \\ \boxed{g_{N_1-1,0} \quad g_{N_1-1,1} \quad \cdots \quad g_{N_1-1,N_2-1}} \end{matrix} \right)$$

zur Matrix der Fourier–Koeffizienten verarbeitet. Der in Abschnitt 1.3.7 besprochene FFT-Algorithmus ist damit im Fall $N_1 = 2^{n_1}$ und $N_2 = 2^{n_2}$ unmittelbar anwendbar. Der Aufwand der eindimensionalen Rechnung besteht bis auf eine multiplikative Konstante aus jeweils $N_1 \cdot \log_2(N_1)$ bzw. $N_2 \cdot \log_2(N_2)$ Operationen pro Spalte bzw. Zeile. Damit ergeben sich insgesamt

$$N_2 \cdot N_1 \cdot \log_2(N_1) + N_1 \cdot N_2 \cdot \log_2(N_2) \;=\; N_1 \cdot N_2 \cdot \log_2(N_1 \cdot N_2)$$

Operationen für die gesamte Rechnung, sodass der Aufwand wieder $O(N \cdot \log_2(N))$ ist, wo $N = N_1 \cdot N_2$ die Gesamtzahl aller zu transformierenden Daten ist.

Diese Überlegungen lassen sich offensichtlich unmittelbar auf die numerische Behandlung der p-dimensionalen Fourier–Transformation einer Funktion $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{C}$ verallgemeinern.

1.3.11 Einige Anwendungen

Einige einfache Anwendungen der Fourier–Technik sollen kurz vorgestellt werden, aus denen der praktische Nutzen der schnellen Fourier–Transformation klar hervorgeht.

Digitales Filtern

Ein in der Datenübertragung häufig auftretendes Problem ist das Vermischen unterschiedlicher Signale (z.B. zur gemeinsamen Verschickung auf einem einzelnen Übertragungskanal), welche dann wieder zu trennen sind. Eine typische Vorgehensweise ist dabei, die einzelnen Signale verschiedenen Frequenzbereichen zuzuordnen und sie dadurch im Fourier–Raum zu trennen. Dies bedeutet, dass die Fourier–Daten jeweils um unterschiedliche Grundfrequenzen lokalisiert sind, sodass sich die Signale durch einen sogenannten Filterprozess trennen lassen. Hierbei werden von der Fourier–Transformierten nur Frequenzen in einem gewissen Bereich berücksichtigt, alle anderen Frequenzen werden abgeschwächt oder ganz abgeschnitten. Dieser durch geeignete elektronische Schaltungen leicht analog durchführbare Prozess ist in moderner Technologie im wesentlichen auf digitale Daten anzuwenden.

Als Beispiel zur Trennung zweier verschiedenartiger Signale sei das Problem gegeben, ein durch eine Störung (Rauschen) verschmutztes Nutzsignal aufzubessern. Dieses liegt im in Bild 1.2 dargestellten Beispiel als diskreter zweidimensionaler Datensatz vor, der z.B. als Grau- oder Farbwertverteilung eines Bildes mit $2^5 \times 2^5$ Rasterpunkten vorstellbar ist. Der Betrag der diskreten Fourier–Koeffizienten ist in diesem Beispiel über dem Frequenzbereich $k_1, k_2 = -16, \ldots, 15$ aufgetragen, sodass niedrige Frequenzen in der Mitte des Diagramms zu finden sind. Die wesentliche Charakterisierung des Nutzsignals im Fourier–Raum besteht offensichtlich darin, dass das Bild von nur wenigen niederfrequenten Anteilen bestimmt wird. In den darunter stehenden Bildern ist eine Störung überlagert, welche hier durch zufällig zum Nutzsignal hinzuaddierte Werte erzeugt wurde. Im Fourier–Raum ist die Energie dieses Rauschens über einen wesentlich größeren Frequenzbereich verteilt. Die hier gewählte Rauschamplitude ist doppelt so groß wie die des eigentlichen Nutzsignals, welches dementsprechend nach der Störung kaum noch erkennbar ist. In den Fourier–Daten treten jedoch noch deutlich die niederfrequenten Spitzen des ungestörten Bildes in Erscheinung. Es wird ein einfacher Filterprozess angewendet: für niedrige Frequenzen k_1, k_2 werden die diskreten Fourier–Koeffizienten beibehalten, oberhalb einer Grenzfrequenz K werden sie nach dem Kriterium $\max(|k_1|, |k_2|) > K$ auf Null gesetzt (Tiefpaßfilterung). Aus dem so abgeänderten Datensatz wird durch Fourier–Rücktransformation eine geglättete Version des gestörten Ausgangssignals berechnet. Der Filterprozess ist durch die Grenzfrequenz K charakterisiert. Für zwei Werte von K sind die sich ergebenden Glättungen eingezeichnet.

In ähnlicher Weise lassen sich Feinstrukturen innerhalb eines Datensatzes/Bildes hervorheben, welche im wesentlichen den hochfrequenten Fourier–Anteilen

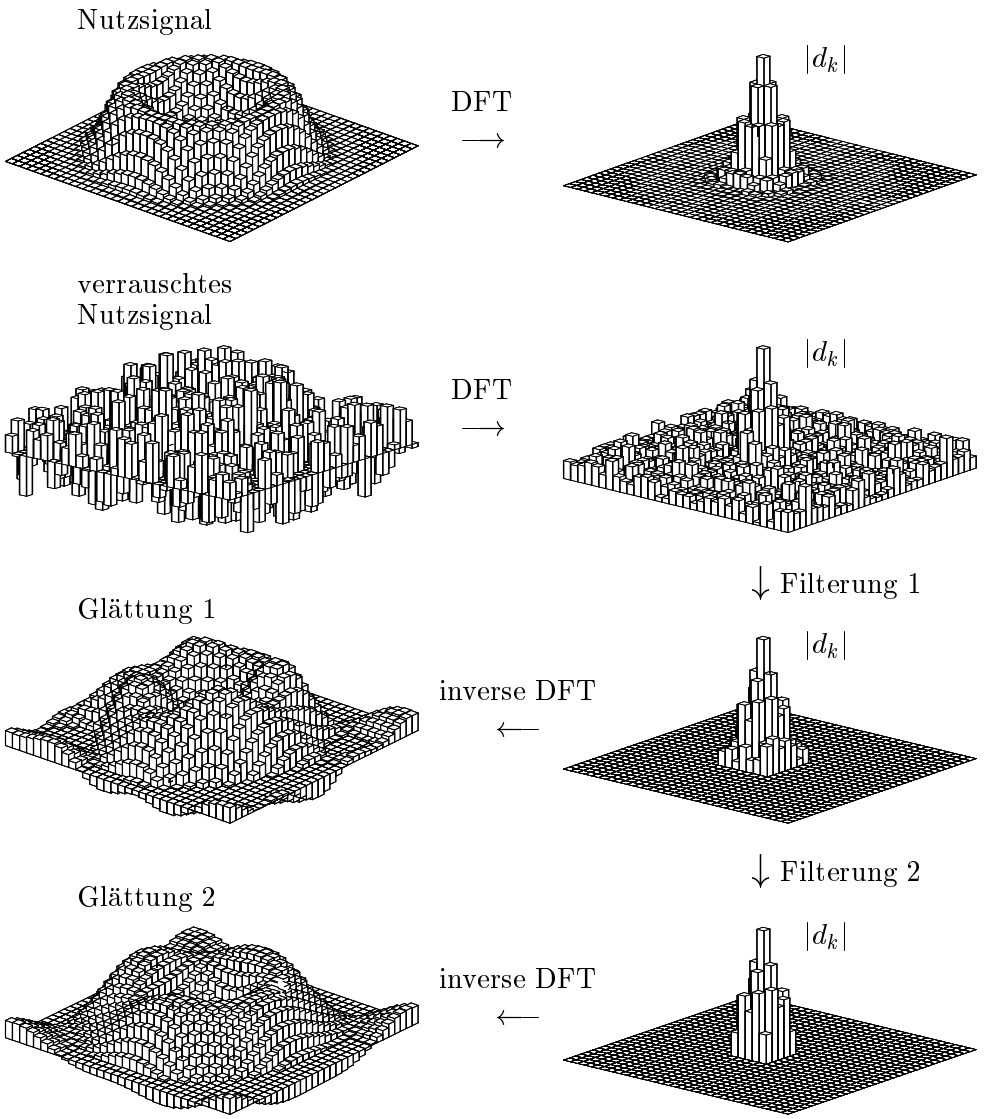


Bild 1.2: Tiefpaßfilterung eines Bildes.

entsprechen. Durch Hochpaßfilterung (d.h., dem Abschwächen oder Abschneiden niederfrequenter Fourier–Koeffizienten) lassen sich im ursprünglichen Bild schwer erkennbare Details verstärken.

Im Zusammenhang der Bildverarbeitung wird der Rechenzeitgewinn durch die Anwendung des FFT-Algorithmus sehr deutlich. Zerlegt man ein Bild in etwa 1000×1000 Rasterpunkte, was in Anwendungen realistisch sein dürfte, so ergeben sich $N = 10^6$ zu transformierende Daten. Mit $N \cdot \log_2(N) \approx 20 \times 10^6$ braucht eine FFT–Berechnung nur Sekundenbruchteile, während eine Auswertung der Fourier–Koeffizienten durch naives Aufsummieren mit $N^2 = 10^{12}$ Operationen nicht in akzeptabler Zeit ausführbar wäre.

Datenkompression

Ein notorisches Problem bei der Bearbeitung von Bilddaten ist der enorme Speicherbedarf, wenn die Farb- oder Grauwerte eines jeden Rasterpunktes abgespeichert werden. Da die Rasterdaten im Fourier–Raum über alle Frequenzen verteilt sind, können einige der Fourier–Koeffizienten vernachlässigt werden, ohne dass es im ursprünglichen Bildraum zu störenden lokalen Effekten kommt. Dies bietet die Möglichkeit, statt der ursprünglichen Bilddaten die Fourier–Transformierte abzuspeichern, wobei nur ein Teil der Fourier–Koeffizienten benötigt wird. Bild 1.3 zeigt das schon in Bild 1.2 als Nutzsignal betrachtete Datenfeld, das in diesem Zusammenhang als Farb- oder Grauwertverteilung eines Bildes anzusehen ist. Von den diskreten Fourier–Koeffizienten wurden alle bis auf die betragsmäßig größten 2% vernachlässigt, die durch inverse DFT aus den verbleibenden Daten berechnete Approximation des Bildes ist unter dem Original abgebildet. In diesem Fall wurde bei geringem Verlust der Bildqualität 98% des Speicherplatzes eingespart.

Schnelle Faltung

Zahlreiche Anwendungen der Fourier–Transformation beruhen auf der Tatsache, dass sich die sogenannte Faltung von Funktionen im Fourier–Raum wesentlich schneller durchführen läßt. Für diskrete Daten werden dazu die Produkte $\odot$ und $\otimes : \mathbb{C}^N \times \mathbb{C}^N \to \mathbb{C}^N$ eingeführt:

Definition 1.62:

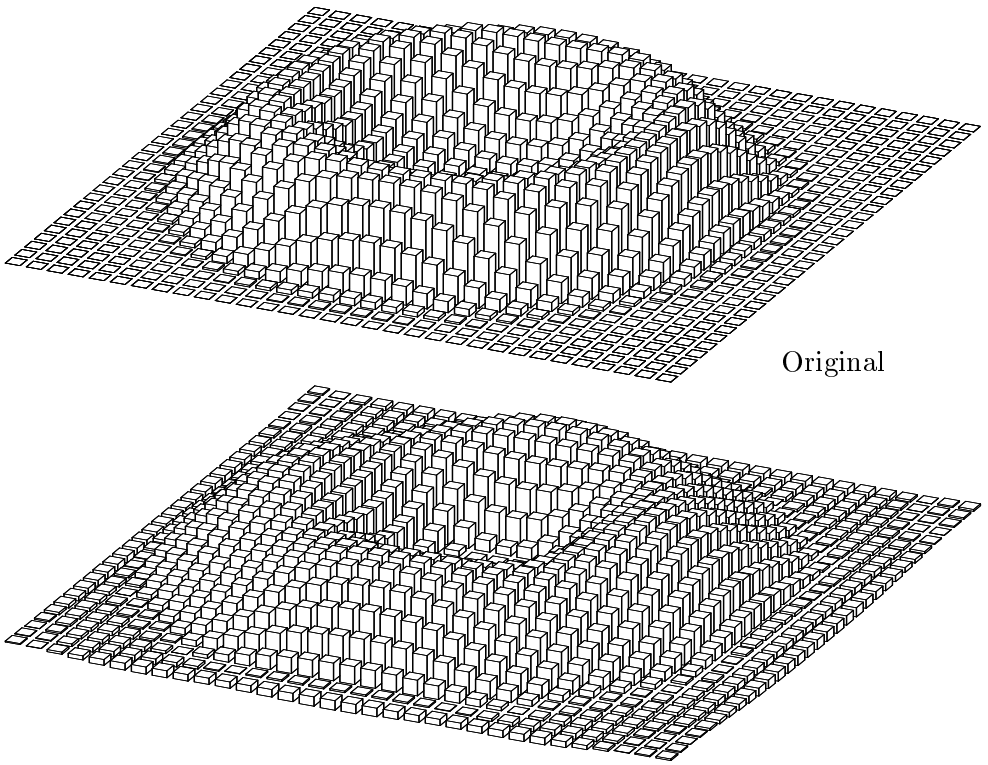


Bild 1.3: Rekonstruktion eines komprimierten Bildes.

Für $\vec{f} = (f_0, f_1, \ldots, f_{N-1})^T$, $\vec{g} = (g_0, g_1, \ldots, g_{N-1})^T \in \mathbb{C}^N$ *werden die Multiplikationen*

$$(\vec{f} \odot \vec{g})_j = f_j \cdot g_j \quad (\textbf{„punktweises Produkt"})$$

$$(\vec{f} \otimes \vec{g})_j = \sum_{k=0}^{N-1} f_{(j-k) \bmod N} \cdot g_k \quad (\textbf{„Faltung"})$$

definiert.

In der Faltung werden die Indizes modulo N betrachtet und dadurch auf den Wertebereich $0, \ldots, N-1$ eingeschränkt. Dies simuliert die periodische Fortsetzung der Daten zu Folgen der Form $\ldots, f_{N-1}, f_0, \ldots, f_{N-1}, f_0, \ldots$, wie sie in natürlicher Weise bei der Auswertung periodischer Funktionen entstehen. Beide Produkte sind kommutativ (d.h., $\vec{f} \odot \vec{g} = \vec{g} \odot \vec{f}$ und $\vec{f} \otimes \vec{g} = \vec{g} \otimes \vec{f}$), was für das punktweise Produkt offensichtlich ist und für die Faltung aus einer einfachen Umsummierung folgt.

Faltungsoperationen tauchen z.B. bei der Multiplikation von Polynomen auf. Für zwei Polynome

$$f \;=\; \sum_{j=0}^{n} f_j \cdot E^j \;, \quad g \;=\; \sum_{j=0}^{m} g_j \cdot E^j$$

in der Unbestimmten E ergibt sich das Produkt

$$f \cdot g \;=\; \sum_{j=0}^{n+m} \left(\sum_{k=0}^{j} f_{j-k} \cdot g_k \right) \cdot E^j \;.$$

Die Polynome werden über ihre Koeffizienten dargestellt, die mit

$$f_{n+1} \;=\; \ldots \;=\; f_{N-1} \;=\; g_{m+1} \;=\; \ldots \;=\; g_{N-1} \;=\; 0$$

als Vektoren $\vec{f} = (f_0, \ldots, f_{N-1})^T$, $\vec{g} = (g_0, \ldots, g_{N-1})^T \in \mathbb{C}^N$ interpretiert werden. Hierbei wird ein beliebiges $N > n + m$ gewählt, um auch die Koeffizienten des Produkts $f \cdot g$ durch solch einen Vektor darstellen zu können. In diesem Fall gilt

$$(\vec{f} \otimes \vec{g})_j \;=\; \sum_{k=0}^{N-1} f_{(j-k) \bmod N} \cdot g_k \;=\; \sum_{k=0}^{j} f_{j-k} \cdot g_k \;+\; \sum_{k=j+1}^{N-1} f_{N+j-k} \cdot g_k \;,$$

wobei die zweite Summe für alle $j = 0, \ldots, N-1$ verschwindet. Durch Einbettung in einen hinreichend hochdimensionalen Raum $\mathbb{C}^N$ ergeben sich die Koeffizienten des Produktpolynoms also als Faltungsprodukt der Koeffizienten.

Offensichtlich benötigt eine Faltung N^2 Multiplikationen und Additionen, während das punktweise Produkt mit nur N Multiplikationen wesentlich schneller auszuführen ist. Mittels der diskreten Fourier–Transformation $\mathrm{DFT} : \mathbb{C}^N \to \mathbb{C}^N$ aus Definition 1.52 kann die Faltung jedoch auf ein punktweises Produkt im Fourier–Raum zurückgeführt werden:

Satz 1.63: (Faltungssatz)
Für $\vec{f} = (f_0, \ldots, f_{N-1})^T$, $\vec{g} = (g_0, \ldots, g_{N-1})^T \in \mathbb{C}^N$ *gilt*

$$\mathrm{DFT}(\vec{f} \otimes \vec{g}) \;=\; N \cdot \mathrm{DFT}(\vec{f}) \odot \mathrm{DFT}(\vec{g})$$

und

$$\mathrm{DFT}(\vec{f} \odot \vec{g}) \;=\; \mathrm{DFT}(\vec{f}) \otimes \mathrm{DFT}(\vec{g}) \;.$$

Beweis: Die Komponenten von $\vec{f}$ seien durch $f_{N+j} = f_j$ periodisch fortgesetzt. Durch Umsummierung $j_1 \to j = j_1 + j_2$ folgt unmittelbar

$$\begin{aligned} N\,\Big(\mathrm{DFT}(\vec{f}\,) \odot \mathrm{DFT}(\vec{g}\,)\Big)_k &= \frac{1}{N} \cdot \sum_{j_1=0}^{N-1} \sum_{j_2=0}^{N-1} f_{j_1} \cdot g_{j_2} \cdot e^{-\mathrm{i}\cdot(j_1+j_2)\cdot k\cdot 2\cdot\pi/N} \\ &= \frac{1}{N} \cdot \sum_{j=0}^{N-1} \left(\sum_{j_2=0}^{N-1} f_{j-j_2} \cdot g_{j_2} \right) \cdot e^{-\mathrm{i}\cdot j\cdot k\cdot 2\cdot\pi/N} \;, \end{aligned}$$

wobei der letzte Ausdruck die diskreten Fourier–Koeffizienten von $\vec{f} \otimes \vec{g}$ darstellt. Mit

$$\sum_{k'=0}^{N-1} e^{\mathrm{i}\cdot(j-j')\cdot k'\cdot 2\cdot\pi/N} = \begin{cases} N & \text{für } \; j = j' \bmod N \\ 0 & \text{für } \; j \neq j' \bmod N \end{cases}$$

folgt weiterhin

$$\begin{aligned} &\Big(\,\mathrm{DFT}(\vec{f}\,) \otimes \mathrm{DFT}(\vec{g}\,)\,\Big)_k \\ &= \frac{1}{N^2} \cdot \sum_{k'=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} f_j \cdot e^{-\mathrm{i}\cdot j\cdot(k-k')\cdot 2\cdot\pi/N} \cdot \sum_{j'=0}^{N-1} g_{j'} \cdot e^{-\mathrm{i}\cdot j'\cdot k'\cdot 2\cdot\pi/N} \\ &= \frac{1}{N^2} \cdot \sum_{j,j'=0}^{N-1} f_j \cdot g_{j'} \cdot e^{-\mathrm{i}\cdot j\cdot k\cdot 2\cdot\pi/N} \cdot \underbrace{\left(\sum_{k'=0}^{N-1} e^{\mathrm{i}\cdot(j-j')\cdot k'\cdot 2\cdot\pi/N} \right)}_{\delta_{jj'}} \\ &= \frac{1}{N} \cdot \sum_{j=0}^{N-1} f_j \cdot g_j \cdot e^{-\mathrm{i}\, j\cdot k\cdot 2\cdot\pi/N} \quad = \Big(\,\mathrm{DFT}(\vec{f} \odot \vec{g}\,)\,\Big)_k \;. \end{aligned}$$

Q.E.D.

Eine schnelle Faltung läßt sich damit über

$$\vec{f} \otimes \vec{g} \;=\; N \cdot \mathrm{DFT}^{-1}\Big(\,\mathrm{DFT}(\vec{f}\,) \odot \mathrm{DFT}(\vec{g}\,)\,\Big)$$

oder auch in der Form

$$\vec{f} \otimes \vec{g} \;=\; \mathrm{DFT}\Big(\,\mathrm{DFT}^{-1}(\vec{f}\,) \odot \mathrm{DFT}^{-1}(\vec{g}\,)\,\Big)$$

mit dem Aufwand $O(N \cdot \log_2(N))$ durchführen, wobei die diskrete Fourier–Transformation und ihre Inverse über den FFT-Algorithmus berechnet werden.

Selbst einfache Zahlenmultiplikationen sind Faltungen, denn in einer Darstellung bezüglich der Basis E läßt sich eine (ganze) Zahl als Polynom $f = \sum f_j \cdot E^j$ mit Ziffern $f_j \in \{0, 1, \ldots, E-1\}$ auffassen. In einer nicht auf Hardware zurückgreifenden Langzahlarithmetik wird eine Zahl als Liste ihrer Ziffern gespeichert, ein Produkt läßt sich damit als Faltung von Listen schnell berechnen. Dabei werden in der Regel „Ziffern" $\sum f_{j-k} \cdot g_k$ erzeugt, die nicht mehr im zulässigen Bereich $\{0, \ldots, E-1\}$ liegen. Solche Übertrage können jedoch leicht in der Laufzeit $O(N)$ abgearbeitet werden, wo N die Ziffernlänge darstellt. Auf diese Art kann eine Softwaremultiplikation extrem langer Zahlen per FFT stark beschleunigt werden. Leider sind in der Fourier–Transformation Gleitpunktzahlen zu verwenden, deren Handhabung einen gegenüber ganzen Zahlen höheren Zeitaufwand braucht. Außerdem schleichen sich Darstellungsfehler ein, sodass die zuletzt berechneten Ziffern des Produktes wegen der Rundungsfehler nur approximativ ganze Zahlen sind. Die wirklichen Ziffern ergeben sich problemlos durch Rundung der Gleitpunktzahlen, solange diese Approximationen bis auf einen absoluten Fehler $\ll 1$ berechnet werden.

1.4 Die Fourier–Integraltransformation

1.4.1 Motivation

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine glatte Funktion, die außerhalb eines Intervalls $[-\frac{L_0}{2}, \frac{L_0}{2}]$ identisch 0 ist. Wir betrachten $L \geq L_0$ und wollen den Grenzübergang $L \to \infty$ der im Abschnitt 1.3.9 diskutierten Fourier–Entwicklungen über dem Intervall $[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}]$ mit den Fourier–Koeffizienten

$$c_{L,k} = \frac{1}{L} \cdot \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(x) \cdot e^{-\mathrm{i} \cdot k \cdot \frac{2 \cdot \pi}{L} \cdot x} \, dx = \frac{1}{L} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot e^{-\mathrm{i} \cdot k \cdot \frac{2 \cdot \pi}{L} \cdot x} \, dx$$

und den entsprechenden Fourier–Reihen

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{L,k} \cdot e^{\mathrm{i} \cdot k \cdot \frac{2 \cdot \pi}{L} \cdot x}$$

betrachten. Wir definieren dazu

$$\boxed{\widehat{f}(\kappa) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot e^{-\mathrm{i} \cdot \kappa \cdot x} \, dx.}$$

Bei gegebenem L hängt die Funktion $\widehat{f}(\kappa)$ an den diskreten Werten $\kappa_{L,k} = k \cdot \frac{2 \cdot \pi}{L}$ mit den Fourier–Koeffizienten über $[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}]$ zusammen:

$$\widehat{f}\Big(k \cdot \frac{2 \cdot \pi}{L}\Big) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot e^{-\mathrm{i} \cdot k \cdot \frac{2 \cdot \pi}{L} \cdot x} \, dx = \frac{L}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot c_{L,k}.$$

Für ein gegebenes $x \in \mathbb{R}$ gilt bei hinreichend glattem f für jedes $L \geq \max(L_0, 2 \cdot |x|)$ (also $x \in [-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}]$), dass $f(x)$ durch die Fourier–Reihe über $[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}]$ dargestellt wird, also

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{L,k} \cdot e^{\mathrm{i} \cdot k \cdot \frac{2 \cdot \pi}{L} \cdot x} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{2 \cdot \pi}}{L} \cdot \widehat{f}\Big(k \cdot \frac{2 \cdot \pi}{L}\Big) \cdot e^{\mathrm{i} \cdot k \cdot \frac{2 \cdot \pi}{L} \cdot x}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\kappa_{L,k}) \cdot e^{\mathrm{i} \cdot \kappa_{L,k} \cdot x} \cdot \underbrace{\frac{2 \cdot \pi}{L}}_{\Delta\kappa}.$$

Obige Gleichung gilt für jedes $L \geq L_0$ und bleibt damit im Grenzwert $L \to \infty$ bestehen. In diesem Grenzwert wird aus der obigen Summe ein Integral. Für alle glatten Funktionen, die außerhalb eines Intervalls $[-\frac{L_0}{2}, \frac{L_0}{2}]$ verschwinden, gilt damit für alle $x \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\kappa) \cdot e^{\mathrm{i} \cdot \kappa \cdot x} \, d\kappa}$$

mit der oben definierten Funktion $\widehat{f}(k)$.

1.4.2 L_1–Theorie

Die Überlegungen des letzten Abschnitts motivieren die folgenden Definitionen, die für „betragsintegrable Funktionen" sinnvoll sind, d.h., für Funktion im Raum

$$L_1(\mathbb{R}) = \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}; \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| \, dx < \infty \right\}.$$

Vergleiche auch mit der Definition 1.35 von $L_1([a, b])$. Im Fall eines endlichen Intervalls ist eine Funktion in L_1, wenn sie keine „zu starken" Singularitäten hat. Im Fall des unendlichen Intervalls $[a, b] = \mathbb{R}$ kommt als zusätzliche Einschränkung hinzu, dass die Funktion hinreichend schnell im Unendlichen abfallen muss (speziell schneller als $O(1/|x|)$ für $x \to \pm\infty$), um integrierbar zu sein.

Definition 1.64: (Fourier–Integraltransformation)

a) Für $f \in L_1(\mathbb{R})$ heißt

$$\widehat{f}(k) = \mathcal{F}[f](k) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot e^{-\mathrm{i} \cdot k \cdot x} \, dx$$

die **„Fourier–Transformierte"** *(***„das Spektrum", „die Spektraldichte"***) von $f(x)$.*

b) Für $\widehat{f} \in L_1(\mathbb{R})$ heißt

$$f(x) = \mathcal{F}^{-1}[\widehat{f}\,](x) = \frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k) \cdot e^{\mathrm{i}\cdot k\cdot x}\, dk$$

die **„Fourier–Rücktransformierte"** *von $\widehat{f}(k)$.*

Beispiel 1.65: Einige Beispiele:

a) Betrachte

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } |x| \le L, \\ 0 & \text{für } |x| > L \end{cases}$$

mit $L \in (0,\infty)$:

$$\mathcal{F}[f](k) = \frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}} \cdot \int_{-L}^{L} e^{-i\cdot k\cdot x}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}} \cdot \left[\frac{e^{-i\cdot k\cdot x}}{-i\cdot k}\right]_{x=-L}^{x=L} = \frac{2}{\sqrt{2\cdot\pi}} \cdot \frac{\sin(k\cdot L)}{k}.$$

b)

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{|x|}{L} & \text{für } |x| \le L, \\ 0 & \text{für } |x| > L \end{cases}$$

mit $L \in (0,\infty)$:

$$\mathcal{F}[f](k) = \frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}} \cdot \int_{-L}^{L} \left(1 - \frac{|x|}{L}\right) \cdot e^{-i\cdot k\cdot x}\, dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}} \cdot \frac{2\cdot(1-\cos(L\cdot k))}{L\cdot k^2} = \frac{4}{\sqrt{2\cdot\pi}} \cdot \frac{\sin^2\left(\frac{L\cdot k}{2}\right)}{L\cdot k^2}.$$

c) Betrachte

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0, \\ e^{(k_0+i\cdot k_1)\cdot x} & \text{für } x \ge 0 \end{cases}$$

mit $k_0 \in (-\infty, 0)$, $k_1 \in \mathbb{R}$:

$$\mathcal{F}[f](k) = \frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}} \cdot \int_{0}^{\infty} e^{(k_0+i\cdot k_1)\cdot x} \cdot e^{-i\cdot k\cdot x}\, dx$$

$$= \left[\frac{e^{(k_0+i\cdot(k_1-k))\cdot x}}{k_0 + i\cdot(k_1-k)}\right]_{x=0}^{x=\infty} = \frac{-1}{k_0 + i\cdot(k_1-k)} = \frac{1}{i\cdot k - (k_0 + i\cdot k_1)}.$$

d) Betrachte $f(x) = e^{-k_0\cdot|x|}$ mit $k_0 \in (0,\infty)$:

$$\mathcal{F}[f](k) = \frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{0} e^{k_0\cdot x} \cdot e^{-i\cdot k\cdot x}\, dx + \frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}} \cdot \int_{0}^{\infty} e^{-k_0\cdot x} \cdot e^{-i\cdot k\cdot x}\, dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}} \cdot \left(\left[\frac{e^{(k_0-i\cdot k)\cdot x}}{k_0 - i\cdot k}\right]_{x=-\infty}^{x=0} + \left[\frac{e^{(-k_0-i\cdot k)\cdot x}}{-k_0 - i\cdot k}\right]_{x=0}^{x=\infty}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}} \cdot \frac{2\cdot k_0}{k_0^2 + k^2}.$$

e) Betrachte $f(x) = e^{-c\cdot x^2}$ mit $c \in (0,\infty)$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[f](k) &= \frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}}\cdot\int_{-\infty}^{\infty} e^{-c\cdot x^2}\cdot e^{-i\cdot k\cdot x}\,dx \\
&\overset{(y=\sqrt{c}\cdot x)}{=} \frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}}\cdot\frac{1}{\sqrt{c}}\cdot\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\cdot e^{-i\cdot k\cdot y/\sqrt{c}}\,dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}}\cdot\frac{1}{\sqrt{c}}\cdot\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(y+i\cdot k/(2\cdot\sqrt{c}))^2}\cdot e^{-k^2/(4\cdot c)}\,dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}}\cdot\frac{1}{\sqrt{c}}\cdot e^{-k^2/(4\cdot c)}\cdot\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(y+i\cdot k/(2\cdot\sqrt{c}))^2}\,dy}_{=\sqrt{\pi}} \\
&\overset{(*)}{=} \frac{e^{-k^2/(4\cdot c)}}{\sqrt{2\cdot c}}.
\end{aligned}$$

Hierbei benutzen wir in $(*)$ den angegebenen Wert des Integrals ohne Beweis. Für $c = 1/2$ folgt die bemerkenswerte Eigenschaft

$$\mathcal{F}[f](k) = f(k) \quad \text{für} \quad f(x) = e^{-x^2/2}.$$

Bemerkung 1.66: *Fourier–Transformation ist eine „glättende" Operation: die Transformation der unstetigen Funktionen a), c) und der an einigen Stellen nicht differenzierbaren Funktionen b), d) des letzten Beispiels sind jeweils glatte Funktionen.*

Bemerkung 1.67: *Für $f \in L_1(\mathbb{R})$ gilt*

$$\mathcal{F}[f](\kappa) = \frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}}\cdot\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\cdot e^{-\mathrm{i}\cdot\kappa\cdot\xi}\,d\xi = \mathcal{F}^{-1}[f](-\kappa),$$

d.h., Fourier–Transformation und Fourier–Rücktransformation sind bis auf Spiegelung des Arguments das selbe. Die folgenden Aussagen sind für die Fourier–Transformierte $\widehat{f} = \mathcal{F}[f]$ einer L_1–Funktion f formuliert, gelten mit dieser Beobachtung aber analog auch für die Rücktransformierte $\mathcal{F}^{-1}[\widehat{f}\,]$ einer L_1–Funktion $\widehat{f}$.

Satz 1.68: (Eigenschaften von Fourier–Transformierten)

Sei $f \in L_1(\mathbb{R})$.

a) $\mathcal{F}[f]$ ist eine stetige Funktion.

b) $\mathcal{F}[f]$ ist beschränkt: $|\mathcal{F}[f](k)| \le \frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|\,dx$.

c) Riemann–Lebesgue–Lemma: $\lim\limits_{k\to\pm\infty}\mathcal{F}[f](k) = 0$.

d) Skalierungssatz: $\mathcal{F}[f(\lambda\cdot x)](k) = \frac{1}{|\lambda|}\cdot\mathcal{F}[f(x)](k/\lambda)$ für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$.

e) Die Fourier–Transformierte bestimmt eindeutig die Ausgangsfunktion: Ist $\mathcal{F}[f] \equiv 0$, so gilt fast überall $f(x) = 0$.

Beweis: Mit $\widehat{f} = \mathcal{F}[f]$:
a)

$$\begin{aligned}
|\widehat{f}(k) - \widehat{f}(k-\epsilon)| &= \frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}} \cdot \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot \left(e^{-\mathrm{i}\cdot k\cdot x} - e^{-\mathrm{i}\cdot(k-\epsilon)\cdot x} \right) dx \right| \\
&\leq \frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| \cdot |e^{-\mathrm{i}\cdot k\cdot x}| \cdot |1 - e^{\mathrm{i}\cdot\epsilon\cdot x}| \, dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| \cdot |1 - e^{\mathrm{i}\cdot\epsilon\cdot x}| \, dx.
\end{aligned}$$

Mit

$$\lim_{\epsilon\to 0} |1 - e^{\mathrm{i}\cdot\epsilon\cdot x}| = 0$$

folgt die Stetigkeit von $\widehat{f}$ aus dem „Satz über die dominierte Konvergenz" der Lebesgueschen Integrationstheorie.

b) Ist leicht einzusehen:

$$|\widehat{f}(k)| = \frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}} \cdot \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot e^{-\mathrm{i}\cdot k\cdot x} \, dx \right| \leq \frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| \cdot \underbrace{|e^{-\mathrm{i}\cdot k\cdot x}|}_{=1} \, dx.$$

c) Analog zum Riemann–Lebesgue–Lemma 1.37.

d) Ist leicht einzusehen:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[f(\lambda\cdot x))](k) &= \frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda\cdot x) \cdot e^{-\mathrm{i}\cdot k\cdot x} \, dx \\
&\overset{(y=\lambda\cdot x)}{=} \frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}} \cdot \int_{-\mathrm{sign}(\lambda)\cdot\infty}^{\mathrm{sign}(\lambda)\cdot\infty} f(y) \cdot e^{-\mathrm{i}\cdot k\cdot y/\lambda} \, dy \\
&= \frac{\mathrm{sign}(\lambda)}{\lambda} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \cdot e^{-\mathrm{i}\cdot(k/\lambda)\cdot y} \, dy \\
&= \frac{1}{|\lambda|} \cdot \mathcal{F}[f]\left(\frac{k}{\lambda}\right).
\end{aligned}$$

e) Sehr technisch. Siehe z.B. Theorem 7 in K. Chandrasekharan, *Classical Fourier Transforms*, Springer (1989).

Q.E.D.

Der Name „Rücktransformation" für $\mathcal{F}^{-1}$ wurde nicht versehentlich gewählt: $\boxed{\downarrow 27.11.02}$

Satz 1.69: (Die Fourier–Rücktransformation)

Für $f \in L_1(\mathbb{R})$ sei $\widehat{f} = \mathcal{F}[f]$ wieder eine L_1–Funktion. Dann gilt fast überall $f(x) = \mathcal{F}^{-1}[\widehat{f}\,](x)$. Ist f zusätzlich stetig, so gilt überall $f(x) = \mathcal{F}^{-1}[\widehat{f}\,](x)$.

Beweis: Sehr technisch. Siehe z.B. die Theoreme 11 und 11' in K. Chandrasekharan, *Classical Fourier Transforms*, Springer (1989).

Q.E.D.

Bemerkung 1.70: *Die Rekonstruierbarkeit von f aus der Fourier–Transformierten $\widehat{f}$ wird in Satz 1.69 nicht nur auf die absolute Integrierbarkeit von f, sondern auch noch zusätzlich auf die von $\widehat{f}$ zurückgeführt. Da nach Satz 1.68.a) zusammen mit Bemerkung 1.67 die Ausgangsfunktion f als Bild unter einer Fourier–Rücktransformation stetig sein muss, wenn $\widehat{f}$ absolut integrabel ist, folgt indirekt, dass die Fourier–Transformierte $\widehat{f}$ eines $f \in L_1(\mathbb{R})$ nicht wieder in L_1 liegen kann, wenn f nicht fast überall mit einer stetigen Funktion übereinstimmt.*

(Achtung: ein fast überall stetiges f braucht nicht fast überall mit einer stetigen Funktion übereinzustimmen: eine Funktion mit einer einzelnen Sprungunstetigkeit ist zwar fast überall stetig, aber es gibt keine Möglichkeit, f an dieser einzelnen Stelle so umzudefinieren, dass eine stetige Funktion entsteht. In diesem Fall gibt es also keine stetige Funktion, mit der f fast überall übereinstimmt.)

In der Tat haben die unstetigen Beispiele a) und c) in Beispiel 1.65 Fourier–Transformierte $\widehat{f}$, die nicht in $L_1(\mathbb{R})$ liegen, weil sie für $k \to \pm\infty$ nur wie $O(1/|k|)$ abfallen. Andererseits sollte sich jedes $f \in L_1(\mathbb{R})$ wegen der Eindeutigkeit 1.68.e) aus $\widehat{f}$ rekonstruieren lassen, auch wenn $\widehat{f}$ nicht in L_1 liegt und damit $\mathcal{F}^{-1}[\widehat{f}\,]$ nicht definiert ist. Dazu beobachten wir, dass für eine L_1-Funktion $\widehat{f}$ die Limites

$$\lim_{R_1 \to -\infty} \lim_{R_2 \to \infty} \int_{R_1}^{R_2} |\widehat{f}(k) \cdot \cancel{e^{\mathrm{i}\cdot k\cdot x}}|\, dk$$

in R_1 und R_2 getrennt existieren müssen, wobei wegen der Betragszeichen der oszillierende Charakter von $e^{\mathrm{i}\cdot k\cdot x}$ gar nicht eingeht und die Existenz der Fourier–Rücktransformation nur durch das Abklingverhalten von $|\widehat{f}(k)|$ für $k \to \pm\infty$ bestimmt wird.

Es gibt jedoch viele Fälle von Fourier–Transformierten $\widehat{f}(k)$, die zwar nicht in

L_1 liegen, für die aber der spezielle Grenzwert

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \widehat{f}(k) \cdot e^{\mathrm{i}\cdot k\cdot x}\, dk \qquad (\#)$$

existiert (man beachte, dass hier keine Betragszeichen um den Integranden stehen). Der Unterschied zwischen der Existenz von $\int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(k)|\, dk$ und der Existenz des Grenzwertes (#) entspricht dem Unterschied zwischen der absoluten Konvergenz von Reihen (mit Beträgen unter der Summe) und der (üblichen) Konvergenz von Reihen (ohne Beträgen unter der Summe). In der Praxis hat man es sehr oft mit unstetigen Funktionen zu tun, deren Fourier–Transformierte typischerweise nur wie $O(1/|k|)$ für $k \to \pm\infty$ abfallen und damit keine L_1-Funktionen sind. Trotzdem existiert in der Regel die Umkehrtransformation im Sinne von (#), wobei die Konvergenz für Funktionen mit dem Abklingverhalten $O(1/|k|)$ durch den oszillierenden Charakter von $e^{\mathrm{i}\cdot k\cdot x}$ bedingt wird.

Wir verallgemeinern daher den Begriff der Fourier–(Rück–)Transformation auf

$$\mathcal{F}[f](k) = \lim_{R\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}} \cdot \int_{-R}^{R} f(x) \cdot e^{-\mathrm{i}\cdot k\cdot x}\, dx,$$

$$\mathcal{F}^{-1}[\widehat{f}\,](x) = \lim_{R\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}} \cdot \int_{-R}^{R} \widehat{f}(k) \cdot e^{\mathrm{i}\cdot k\cdot x}\, dk,$$

die auch für Funktionen f, $\widehat{f}$ existieren können, die nicht in $L_1(\mathbb{R})$ gelten.

Der folgende Satz ist das Analogon des Satzes 1.39 und garantiert lokale Rücktransformierbarkeit für nicht allzu „wilde" Funktionen:

Satz 1.71: (Das Dirichlet–Kriterium für Fourier–Integrale)

Sei $f \in L_1(\mathbb{R})$, sei $\widehat{f} = \mathcal{F}[f]$ (wobei nicht notwendigerweise $\widehat{f} \in L_1(\mathbb{R})$ zu gelten braucht). Gilt an einer Stelle $x_0 \in \mathbb{R}$, dass sowohl der links- als auch der rechtsseitige Grenzwert

$$f(x_0 - 0) := \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} f(x_0 - h) \qquad f(x_0 + 0) := \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} f(x_0 + h)$$

existiert und ebenfalls die links- und rechtsseitigen Ableitungen

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{f(x_0 - 0) - f(x_0 - h)}{h}, \qquad \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 + 0)}{h},$$

so konvergiert die Fourier–Rücktransformation gegen den Mittelwert des links- und rechtsseitigen Grenzwerts:

$$\lim_{R\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}} \cdot \int_{-R}^{R} \widehat{f}(k) \cdot e^{\mathrm{i}\cdot k\cdot x_0}\, dk = \frac{f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)}{2}.$$

Beweis: Wir etablieren zunächst das Analagon zu Satz 1.38, d.h., wir stellen die Rückkehrtransformation als Integral mit dem Analogon D_R des Dirichlet–Kerns D_N dar:

$$\frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}}\cdot\int_{-R}^{R}\widehat{f}(k)\cdot e^{\mathrm{i}\cdot k\cdot x}\,dk=\frac{1}{2\cdot\pi}\cdot\int_{-R}^{R}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cdot e^{-\mathrm{i}\cdot k\cdot t}\,dt\cdot e^{\mathrm{i}\cdot k\cdot x}\,dk$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\Big(\frac{1}{2\cdot\pi}\cdot\int_{-R}^{R}e^{\mathrm{i}\cdot k\cdot(x-t)}\,dk\Big)\cdot f(t)\,dt=\int_{-\infty}^{\infty}D_R(x-t)\cdot f(t)\,dt,$$

wobei

$$D_R(y)=\frac{1}{2\cdot\pi}\cdot\int_{-R}^{R}e^{\mathrm{i}\cdot k\cdot y}\,dk=\begin{cases}\dfrac{\sin(R\cdot y)}{\pi\cdot y} & \text{für } y\neq 0,\\[2ex] \dfrac{R}{\pi} & \text{für } y=0.\end{cases}$$

Es gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty}D_R(y)\,dy=1.$$

Nun kann man genauso wie im Beweis von Satz 1.39 verfahren.

Q.E.D.

Es gilt das Analogon des Satzes 1.45:

Satz 1.72:

Für eine differenzierbare L_1-Funktion f mit absolut integrierbarer Ableitung $f'\in L_1(\mathbb{R})$ gilt:

$$\mathcal{F}[f'](k)=i\cdot k\cdot\mathcal{F}[f](k).$$

Beweis: Da differenzierbare (und damit stetige) L_1-Funktionen im Unendlichen verschwinden müssen, folgt durch partielle Integration:

$$\mathcal{F}[f'](k)=\frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}f'(x)\cdot e^{-i\cdot k\cdot x}\,dx$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}}\cdot\Big[f(x)\cdot e^{-i\cdot k\cdot x}\Big]_{x=-\infty}^{x=\infty}-\frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\cdot(-i\cdot k)\cdot e^{-i\cdot k\cdot x}\,dx$$

$$=\frac{i\cdot k}{\sqrt{2\cdot\pi}}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\cdot e^{-i\cdot k\cdot x}\,dx=i\cdot k\cdot\mathcal{F}[f](k).$$

Q.E.D.

Diese Aussage ist leicht zu merken: stellt man sich die Funktion als Fourier–Rücktransformierte vor, so kann man die Differentiation unter dem Integral vornehmen und erhält die Ableitung als Fourier–Rücktransformierte von $i \cdot k \cdot \mathcal{F}[f](k)$:

$$\frac{d}{dx} f(x) = \frac{d}{dx} \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k) \cdot e^{i \cdot k \cdot x} \, dk$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k) \cdot \frac{d}{dx} e^{i \cdot k \cdot x} \, dk = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\widehat{f}(k) \cdot (i \cdot k)}_{\mathcal{F}^{-1}[f'](k)} \cdot e^{i \cdot k \cdot x} \, dk.$$

Da eine Fourier–Rücktransformation bis auf Spiegelung der Argumente identisch zu einer Fourier–Transformation ist, gilt eine analoge Aussage für die Ableitung einer Fourier–Transformierten:

Satz 1.73:

Ist f in $L_1(\mathbb{R})$ und ist die Funktion $x \cdot f : x \to x \cdot f(x)$ ebenfalls in $L_1(\mathbb{R})$, so ist $\mathcal{F}[f]$ differenzierbar, und es gilt

$$\frac{d}{dk} \mathcal{F}[f](k) = -i \cdot \mathcal{F}[x \cdot f](k).$$

Beweis: Für den Beweis der Differenzierbarkeit braucht man wieder Lebesguesche Integrationstheorie. Siehe z.B. Theorem 3 in K. Chandrasekharan, *Classical Fourier Transforms*, Springer (1989).
Setzt man die Differenzierbarkeit von $\mathcal{F}[f]$ voraus, ergibt sich die Ableitung elementar durch

$$\frac{d}{dk} \mathcal{F}[f](k) = \frac{d}{dk} \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot e^{-i \cdot k \cdot x} \, dx = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot \frac{d}{dk} e^{-i \cdot k \cdot x} \, dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} (-i \cdot x) \cdot f(x) \cdot e^{-i \cdot k \cdot x} \, dx = -i \cdot \mathcal{F}[x \cdot f](k).$$

Q.E.D.

Es gilt das Analogon des Satzes 1.47: ↓29.11.02

Satz 1.74: (Abklingverhalten der Fourier–Transformierten)

Sind die Ableitungen einer p-fach differenzierbaren L_1–Funktion f jeweils in $L_1(\mathbb{R})$, so gilt für die Fourier–Transformierte

$$\mathcal{F}[f](k) = o\Big(\frac{1}{|k|^p}\Big).$$

Beweis: Genauso wie der Beweis des Satzes 1.47.

Q.E.D.

1.4.3 L_2–Theorie

Für die Physik (genauer, für die Quantenmechanik) sind die Funktionen im Raum

$$L_2(\mathbb{R}) = \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}; \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 \, dx < \infty \right\}$$

von größtem Interesse. Über endlichen Intervallen gilt $L_2([a,b]) \subset L_1([a,b])$, was mit $g \equiv f/|f|$ aus der Cauchy–Schwarzschen Ungleichung

$$\|f\|_1^2 \;=\; |\langle f, g\rangle|^2 \;\leq\; \|f\|_2^2 \cdot \|g\|_2^2 \;=\; \|f\|_2^2 \cdot (b-a)$$

folgt ($\|f\|_2 < \infty \Rightarrow \|f\|_1 < \infty$). Damit sind auf <u>endlichen Intervallen</u> die L_2–Funktionen ein Spezialfall der L_1–Funktionen. Über der gesamten reellen Achse gilt dies leider nicht mehr. Dies liegt daran, daß in $L_1(\mathbb{R})$ das Abklingverhalten $o(1/|x|)$ für $x \to \pm\infty$ als zusätzliche Bedingung an L_1–Funktionen hinzukommt. Beispielsweise fallen die Funktionen

$$f_\epsilon(x) = \frac{1}{1 + |x|^{\frac{1}{2}+\epsilon}}$$

für $0 < \epsilon \leq \frac{1}{2}$ im Unendlichen hinreichend schnell ab, um in $L_2(\mathbb{R})$ zu liegen, aber nicht schnell genug, um in $L_1(\mathbb{R})$ zu liegen.

Für Funktionen, die nicht in $L_1(\mathbb{R})$ liegen, hat man zunächst das Problem, dass das Integral

$$\widehat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot e^{-\mathrm{i} \cdot k \cdot x} \, dx$$

im Lebesgue–Sinne gar nicht existiert. Aus diesem Dilemma kann man sich retten, indem man stattdessen (wie beim Riemann–Integral) den Grenzwert

$$\widehat{f}(k) = \lim_{R \to \infty} \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \int_{-R}^{R} f(x) \cdot e^{-\mathrm{i} \cdot k \cdot x} \, dx$$

betrachtet. Dieser Zugang wurde von dem schweizer Mathematiker Michel Plancherel (1885–1967) benutzt, eine Fourier–Theorie über dem $L_2(\mathbb{R})$ aufzubauen. Wir wählen hier einen vereinfachten Zugang, indem wir $L_2(\mathbb{R})$ als Vervollständigung eines speziellen Raums glatter Funktionen bezüglich der L_2–Norm auffassen. Die betrachteten glatten Funktionen bilden den sogenannten „Schwarz–Raum”:

Definition 1.75:

Der **„Schwarz–Raum"**

$$\mathcal{S} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C};\ f \text{ ist } \infty\text{-oft differenzierbar und } \lim_{x\to\pm\infty} x^p \cdot f^{(q)}(x) = 0 \quad \forall p, q \in \mathbb{N}_0\}$$

besteht aus den glatten Funktionen, deren Ableitungen im Unendlichen stärker als jede rationale Funktion verschwinden. Die Schwarz–Funktionen $f \in \mathcal{S}$ werden auch als **„Testfunktionen"** *bezeichnet.*

Bemerkung 1.76: *Bei der Frage, ob die glatten Schwarz–Funktionen $f \in \mathcal{S}$ integrierbar sind, geht es nur um das Abklingverhalten im Unendlichen. Speziell fallen sie schneller ab als $1/|x|$ oder auch als $1/|x|^2$. Damit sind sie absolut integrabel und auch absolut quadratintegrabel:*

$$\mathcal{S} \subset L_1(\mathbb{R}), \quad \mathcal{S} \subset L_2(\mathbb{R}).$$

Ebenso liegen alle Ableitungen einer Schwarz–Funktion sowohl in $L_1(\mathbb{R})$ als auch in $L_2(\mathbb{R})$, da sie im Unendlichen schnell abfallen. Wir können damit Satz 1.74 anwenden: die Fourier–Transformierten $\widehat{f}(k)$ von Schwarz–Funktionen $f(x)$ fallen im Unendlichen schneller ab als jede rationale Funktion der Frequenz k.
Die Ableitung $\frac{d}{dk}\widehat{f}(k)$ der Fourier–Transformierten einer Schwarz–Funktion $f(x)$ ist nach Satz 1.73 i.W. (bis auf die multiplikative Konstante $-i$) die Transformierte von $x \cdot f(x)$. Da $x \cdot f(x)$ aber wiederum eine Schwarz–Funktion ist, gilt auch für $\frac{d}{dk}\widehat{f}(k)$, dass sie im Unendlichen schneller als jede rationale Funktion der Frequenz k abfällt.
Usw. Per Induktion erhält man, dass jede beliebige Ableitung $\frac{d^q}{dk^q}\widehat{f}(k)$ die Eigenschaft hat, im Unendlichen schneller als jede rationale Funktion der Frequenz k abzufallen. Ergebnis:

Die Fourier–Transformierte einer Schwarz–Funktion ist wieder eine Schwarz–Funktion.

Der Schwarz–Raum S wird durch Fourier–Transformation also auf sich selbst abgebildet. Dasselbe gilt natürlich für die Fourier–Rücktransformation, die ja bis auf Spiegelung des Funktionsarguments eine Fourier–Transformation ist.

Hilfssatz 1.77: (Invertierbarkeit der Fourier–Transformation auf $\mathcal{S}$)
Für jede Schwarz–Funktion $f \in S$ gilt $f = \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[f]] = \mathcal{F}[\mathcal{F}^{-1}[f]]$.

Beweis: Als Schwarz–Funktion ist f eine stetige L_1-Funktion und läßt sich nach Satz 1.69 punktweise als Rücktransformierte ihrer Fourier–Transformierten schreiben.

Q.E.D.

Hilfssatz 1.78: (Das Plancherel–Theorem für $\mathcal{S}$)

Für zwei Schwarz–Funktionen $f, g \in \mathcal{S}$ mit den Fourier–Transformierten $\widehat{f} = \mathcal{F}[f]$, $\widehat{g} = \mathcal{F}[g]$ gilt

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(x)} \cdot g(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\widehat{f}(k)} \cdot \widehat{g}(k)\, dk = \langle \widehat{f}, \widehat{g} \rangle.$$

Für $g = f$ folgt: $\|f\|_2 = \|\widehat{f}\|_2$.

Beweis: Nach dem vorigen Hilfssatz 1.77 läßt sich f als Rücktransformierte ihrer Fourier–Transformierten schreiben:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(x)} \cdot g(x)\, dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\Big(\frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k) \cdot e^{\mathrm{i} \cdot k \cdot x}\, dk \Big)} \cdot g(x)\, dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \overline{\widehat{f}(k)} \cdot e^{-\mathrm{i} \cdot k \cdot x} \cdot g(x)\, dk\, dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\widehat{f}(k)} \cdot \Big(\frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mathrm{i} \cdot k \cdot x} \cdot g(x)\, dx \Big)\, dk \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\widehat{f}(k)} \cdot \widehat{g}(k)\, dk.
\end{aligned}$$

Q.E.D.

Als ein wesentliches technisches Zwischenresultat zitieren wir die Tatsache, dass sich die Funktionen in $L_2(\mathbb{R})$ nicht nur durch (allgemeine) stetige Funktionen über $\mathbb{R}$ bezüglich der L_2–Norm approximieren lassen, sondern auch durch die speziellen Schwarz–Funktionen:

Lemma 1.79:

Der Schwarz–Raum S liegt „dicht" in $L_2(\mathbb{R})$, d.h., zu $f \in L_2(\mathbb{R})$ gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ eine Funktion $g \in \mathcal{S}$ mit $\|f - g\|_2 \leq \epsilon$. Anders ausgedrückt: zu jedem $f \in L_2(\mathbb{R})$ existiert eine Folge (f_n) von Schwarz–Funktionen mit

$$\lim_{n \to \infty} f_n = f \text{ (im } L_2\text{-Sinn), d.h.,} \quad \lim_{n \to \infty} \|f_n - f\|_2 = 0.$$

Beweis: Lebesguesche Integrationstheorie.

Nun können wir endlich die Fourier–Transformation auf $L_2(\mathbb{R})$ definieren:

Satz und Definition 1.80:

Sei $f \in L_2(\mathbb{R})$. Wähle eine gegen f konvergierende Folge (f_n) von Schwarz–Funktionen. Die Fourier–Transformierten $\widehat{f_n} = \mathcal{F}[f_n]$ konvergieren gegen ein $\widehat{f} \in L_2(\mathbb{R})$. Dieser Grenzwert $\widehat{f}$ ist unabhängig von der Wahl der gegen f konvergierenden Folge (f_n). Wir definieren die Fourier–Transformierte von f als dieses $\widehat{f}$.

Für $f \in L_2(\mathbb{R}) \cap L_1(\mathbb{R})$ stimmt diese Fourier–Transformierte mit der aus Definition 1.64 überein.

Die Fourier–Rücktransformation einer Funktion $f \in L_2(\mathbb{R})$ wird analog als L_2–Grenzwert der Rücktransformierten von Schwarz–Approximationen von f definiert.

Beweis: Sei (f_n) eine beliebige gegen f konvergierende Folge von Schwarz–Funktionen. Wegen der Konvergenz ist (f_n) eine Cauchy–Folge. Mit Hilfssatz 1.78 bilden die Fourier–Transformierten $\widehat{f_n}$ wieder eine Cauchy–Folge, denn

$$\|\widehat{f_n} - \widehat{f_m}\|_2 = \|\widehat{(f_n - f_m)}\|_2 = \|f_n - f_m\|_2.$$

Da $L_2(\mathbb{R})$ vollständig ist, hat die Cauchy–Folge $\widehat{f_n}$ einen Grenzwert $\widehat{f}$. Dieser ist unabhängig von der Wahl der Folge (f_n). Betrachte dazu eine weitere gegen f konvergierende Folge von Schwarz–Funktionen (g_n). Wegen des gemeinsamen Grenzwerts ist $\|f_n - g_n\|_2$ eine Nullfolge. Mit Hilfssatz 1.78 ist damit auch $\|\widehat{f_n} - \widehat{g_n}\|_2$ eine Nullfolge, d.h., $\widehat{f_n}$ und $\widehat{g_n}$ konvergieren gegen den selben L_2–Grenzwert $\widehat{f}$.

Betrachte $f_R \in L_2(\mathbb{R}) \cap L_1(\mathbb{R})$ mit der Eigenschaft, dass $f_R(x) = 0$ für alle $|x| > R$ gilt. Die L_1–Definition der Fourier–Transformierten ist:

$$\widehat{f_R}(k) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f_R(x) \cdot e^{-\mathrm{i} \cdot k \cdot x}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \int_{-R}^{R} f_R(x) \cdot e^{-\mathrm{i} \cdot k \cdot x}\, dx. \quad (\#)$$

Wir vergleichen dies mit der L_2–Definition. Sei dazu (f_{Rn}) eine Folge von im L_2–Sinne gegen f_R konvergierende Schwarz–Funktionen, die alle ausserhalb des Intervalls $[-R, R]$ verschwinden. Für ihre Fourier–Transformierten $\widehat{f_{Rn}}$ gilt mit

der Cauchy–Schwarzschen Ungleichung (siehe Bemerkung 1.36):

$$\begin{aligned}
|\widehat{f}_R(k) - \widehat{f_{Rn}}(k)| &\overset{(1.68.b)}{\leq} \frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |f_R(x) - f_{Rn}(x)|\, dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}} \cdot \int_{-R}^{R} |f_R(x) - f_{Rn}(x)|\, dx \\
&\overset{(1.36)}{\leq} \frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}} \cdot \sqrt{2\cdot R \cdot \int_{-R}^{R} |f_R(x) - f_{Rn}(x)|^2\, dx} \\
&\leq \frac{\sqrt{R}}{\sqrt{\pi}} \cdot \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |f_R(x) - f_{Rn}(x)|^2\, dx} \\
&= \frac{\sqrt{R}}{\sqrt{\pi}} \cdot \|f_R - f_{Rn}\|_2,
\end{aligned}$$

also $\lim\limits_{n\to\infty} |\widehat{f}_R(k) - \widehat{f_{Rn}}(k)| = 0$ („gleichmäßig" in k) und damit

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \|\widehat{f_R} - \widehat{f_{Rn}}\|_2 &= \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f_R}(k) - \widehat{f_{Rn}}(k)|^2\, dk \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{n\to\infty} |\widehat{f_R}(k) - \widehat{f_{Rn}}(k)|^2\, dk = 0.
\end{aligned}$$

Damit konvergieren die $\widehat{f_{Rn}}$ im L_2–Sinne gegen die Fourier–Transformierte $\widehat{f_R}$, d.h., wir haben für $f_R \in L_1(\mathbb{R}) \cap L_2(R)$ gezeigt, dass die L_1–Definition (#) der Fourier–Transformierten mit der L_2–Definition übereinstimmt.

Sei nun ein beliebiges $f \in L_2(\mathbb{R}) \cap L_1(\mathbb{R})$ gegeben. Wähle ein $R > 0$ und betrachte

$$f_R(x) = \begin{cases} f(x) & \text{für } x \leq R, \\ 0 & \text{für } x > R. \end{cases}$$

Wie oben gezeigt wurde, ist die Fourier–Transformierte von f_R sowohl im L_1– als auch im L_2–Sinne durch die punktweise Definition

$$\mathcal{F}[f_R](k) = \frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f_R(x) \cdot e^{-\mathrm{i}\cdot k\cdot x}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}} \cdot \int_{-R}^{R} f(x) \cdot e^{-\mathrm{i}\cdot k\cdot x}\, dx$$

gegeben. Da im L_2–Sinne $f_R \to f$ für $R \to \infty$, gilt gemäß der L_2–Definition der Fourier–Transformation:

$$\mathcal{F}[f] = \lim_{R\to\infty} \mathcal{F}[f_R].$$

Dieser L_2–Limes bedeutet punktweise, dass für fast alle $k \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\mathcal{F}[f](k) = \lim_{R\to\infty} \mathcal{F}[f_R](k) = \lim_{R\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}} \cdot \int_{-R}^{R} f(x) \cdot e^{-\mathrm{i}\cdot k\cdot x}\, dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot e^{-\mathrm{i} \cdot k \cdot x} \, dx,$$

wobei das letzte Integral wegen $f \in L_1(\mathbb{R})$ für alle $k \in \mathbb{R}$ existiert.

Q.E.D.

Bemerkung 1.81: *Die obige Definition der Fourier–Transformation in $L_2(\mathbb{R})$ ist wenig konstruktiv. Grob gesprochen läuft die Transformation darauf hinaus, dass*

$$\mathcal{F}[f](k) = \lim_{R \to \infty} \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \int_{-R}^{R} f(x) \cdot e^{-\mathrm{i} \cdot k \cdot x} \, dx$$

bzw.

$$\mathcal{F}^{-1}[\widehat{f}](x) = \lim_{R \to \infty} \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \int_{-R}^{R} \widehat{f}(k) \cdot e^{\mathrm{i} \cdot k \cdot x} \, dk$$

für L_2–Funktionen f bzw. $\widehat{f}$ zwar nicht für jedes k bzw. x existieren muss, aber zumindestens „fast überall", d.h., für „fast alle" k bzw. x. Dies liefert die explizite Konstruktion der Fourier–(Rück–)Transformierten.

Satz 1.82: (Invertierbarkeit der Fourier–Transformation auf $L_2(\mathbb{R})$)

Für jedes $f \in L_2(\mathbb{R})$ liegen $\mathcal{F}[f]$ und $\mathcal{F}^{-1}[f]$ wieder in $L_2(\mathbb{R})$, und es gilt

$$f = \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[f]] \quad \text{bzw.} \quad f = \mathcal{F}[\mathcal{F}^{-1}[f]].$$

Beweis: Nach Konstruktion von $\mathcal{F}$ bzw. $\mathcal{F}^{-1}$ gilt

$$\lim_{n \to \infty} \mathcal{F}[f_n] = \mathcal{F}[\lim_{n \to \infty} f_n], \quad \lim_{n \to \infty} \mathcal{F}^{-1}[f_n] = \mathcal{F}^{-1}[\lim_{n \to \infty} f_n]$$

für jede in $L_2(\mathbb{R})$ konvergente Folge von Schwarz–Funktionen (f_n). Da Schwarz–Funktionen als glatte L_1–Funktionen durch die Rücktransformation punktweise dargestellt werden, also $f_n = \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[f_n]]$ gilt, folgt

$$f = \lim_{n \to \infty} f_n = \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[\lim_{n \to \infty} f_n]] = \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[f]]$$

mittels einer beliebigen gegen f konvergierenden Schwarz–Folge (f_n). Die Aussage $f = \mathcal{F}[\mathcal{F}^{-1}[f]]$ folgt analog.

Q.E.D.

Die folgende Beziehung $\|f\|_2 = \|\widehat{f}\,\|_2$ ist das Analogon der Parsevalschen Gleichung 1.23 für Fourier–Reihen:

Satz 1.83: (Das Plancherel–Theorem für $L_2(\mathbb{R})$)

Für jedes $f, g \in L_2(\mathbb{R})$ mit den Fourier–Transformierten $\widehat{f} = \mathcal{F}[f] \in L_2(\mathbb{R})$ und $\widehat{g} = \mathcal{F}[g] \in L_2(\mathbb{R})$ gilt

$$\langle f, g \rangle \;=\; \langle \widehat{f}, \widehat{g}\,\rangle.$$

Mit $g = f$ folgt $\|f\|_2 = \|\widehat{f}\,\|_2$.

Beweis: Seien (f_n) bzw. (g_n) gegen f bzw. g konvergierende Schwarz–Folgen, so dass nach Definition 1.80 ihre Fourier–Transformierten $(\widehat{f}_n)$ bzw. $(\widehat{g}_n)$ gegen $\widehat{f}$ bzw. $\widehat{g}$ konvergieren. Mit der Schwarzschen Ungleichung folgt

$$\begin{aligned} |\langle f,g\rangle - \langle f_n,g_n\rangle| &= |\langle f-f_n,g\rangle + \langle f_n,g-g_n\rangle| \\ &\leq |\langle f-f_n,g\rangle| \ + \ |\langle f_n,g-g_n\rangle| \\ &\leq \|f-f_n\|_2 \cdot \|g\|_2 + \|f_n\|_2 \cdot \|g-g_n\|_2 \ \to 0 \end{aligned}$$

für $n \to \infty$. Also

$$\lim_{n\to\infty} \langle f_n, g_n\rangle = \langle f,g\rangle$$

und analog mit den selben Argumenten

$$\lim_{n\to\infty} \langle \widehat{f}_n, \widehat{g}_n\rangle = \langle \widehat{f}, \widehat{g}\,\rangle.$$

Nach Hilfssatz 1.78 gilt für die Schwarz–Funktionen aber $\langle f_n, g_n\rangle = \langle \widehat{f}_n, \widehat{g}_n\,\rangle$, so dass die obigen Grenzwerte $\langle f,g\rangle$ und $\langle \widehat{f}, \widehat{g}\,\rangle$ übereinstimmen müssen.

Q.E.D.

1.4.4 Distributionen und ihre Fourier–Transformation

Wir definieren die Fourier–Transformationen für eine noch grössere Klasse von Funktionen, den „verallgemeinerten Funktionen", auch „Distributionen" genannt.

Definition 1.84: (Testfunktionen und Distributionen über $\mathcal{S}$)

Eine **„Distribution"** *ist eine lineare Abbildung $T : S \to \mathbb{C}$ über dem Raum S der Testfunktion aus Definition 1.75.*

Bemerkung 1.85: *Man beachte $\mathcal{S} \subset L_2(\mathbb{R})$. Damit definiert jede Funktion $f \in L_2(\mathbb{R})$ eine Distribution T_f, denn das Skalarprodukt*

$$T_f : \psi \in D \to \langle f, \psi\rangle$$

existiert für jedes $\psi \in \mathcal{S} \subset L_2(\mathbb{R})$. Statt T_f benutzt man auch direkt das Symbol f für die Distribution, d.h., man interpretiert ein Element f des Hilbert–Raums als lineare Abbildung $\psi \to \langle f, \psi\rangle$.

Es gibt aber auch Distributionen, die nicht von Funktionen in $L_2(\mathbb{R})$ erzeugt werden:

Beispiel 1.86: a) Die Funktion $f(x) = 1\ \forall x \in \mathbb{R}$ erzeugt die Distribution

$$T_f : \psi \in \mathcal{S} \to \langle 1, \psi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x)\, dx.$$

Beachte: $f \notin L_2(\mathbb{R})$.

---

b) Die Sprungfunktion

$$H(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0, \\ 1 & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$$

liegt ebenfalls nicht in $L_2(\mathbb{R})$, definiert aber die Distribution

$$T_H : \psi \in \mathcal{S} \to \langle H, \psi \rangle = \int_{0}^{\infty} \psi(x)\, dx.$$

Die Funktion

$$\operatorname{sign}(x) = 2 \cdot H(x) - 1 = \begin{cases} -1 & \text{für } x < 0, \\ 1 & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$$

definiert die Distribution

$$T_{\text{sign}} : \psi \in \mathcal{S} \to \langle \text{sign}, \psi \rangle = -\int_{-\infty}^{0} \psi(x)\, dx + \int_{0}^{\infty} \psi(x)\, dx.$$

---

c) Die sogenannte **„Diracsche Delta–Distribution"** $\boxed{\downarrow 4.12.02}$

$$\delta_{x_0} : \psi \in \mathcal{S} \to \psi(x_0)$$

wird von keiner Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mittels

$$\langle f, \psi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(x)} \cdot \psi(x)\, dx = \psi(x_0) \quad \forall \psi \in \mathcal{S}$$

erzeugt. (Es müsste $f(x) = 0$ gelten für alle $x \neq x_0$. Für solch ein f würde aber $\langle f, \psi \rangle = 0$ für alle $\psi \in \mathcal{S}$ gelten). Man stellt sich δ_{x_0} trotzdem als („verallgemeinerte") Funktion vor, die sogenannte **„Diracsche Delta–Funktion"**

$$\delta(x - x_0) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \neq x_0, \\ \infty & \text{für } x = x_0, \end{cases}$$

die nur unter dem Integral

$$\delta_{x_0}(\psi) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0) \cdot \psi(x)\ dx = \psi(x_0)$$

sinnvoll zu interpretieren ist, mit der man aber formal wie mit einer Funktion rechnen kann.

Definition 1.87: (Die Fourier–Transformierte einer Distribution)

Als Fourier–Transformierte $\widehat{T} = \mathcal{F}[T]$ einer Distribution T wird die Distribution

$$\widehat{T} : \widehat{\psi} \in \mathcal{S} \to T(\mathcal{F}^{-1}[\widehat{\psi}])$$

bezeichnet. Kurz: für $\widehat{\psi} = \mathcal{F}[\psi]$ gilt $\widehat{T}(\widehat{\psi}) = T(\psi)$.

Bemerkung 1.88: *Für $f \in L_2(\mathbb{R})$, interpretiert als Distribution, ist mit dem Plancherel–Theorem 1.83 $\langle \widehat{f}, \widehat{\psi} \rangle = \langle f, \psi \rangle$ die Fourier–Transformierte der Distribution nichts anderes als die Fourier–Transformierte der Funktion f, interpretiert als Distribution: $\widehat{T_f} = T_{\widehat{f}}$.*

Beispiel 1.89: a) Die Fourier–Transformierte der Funktion $f(x) = 1$, nach Beispiel 1.86.a) als die Distribution

$$\psi \in \mathcal{S} \to \langle 1, \psi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x)\, dx$$

zu interpretieren, ist die Delta–Distribution $\sqrt{2 \cdot \pi} \cdot \delta_0$:

$$\sqrt{2 \cdot \pi} \cdot \delta_0(\mathcal{F}[\psi]) = \frac{\sqrt{2 \cdot \pi}}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) \cdot e^{-\mathrm{i} \cdot k \cdot x}\, dx_{|k=0} = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x)\, dx = \langle 1, \psi \rangle.$$

Formal:

$$\mathcal{F}[1](k) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} 1 \cdot e^{-\mathrm{i} \cdot k \cdot x}\, dx = \sqrt{2 \cdot \pi} \cdot \delta(k).$$

Merke:

$$\boxed{\frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mathrm{i} \cdot k \cdot x}\, dx = \delta(k).}$$

---

b) Die Fourier–Transformierte der sign-Funktion

$$T_{\text{sign}} : \ \psi \in \mathcal{S} \to \langle \text{sign}, \psi \rangle = -\int_{-\infty}^{0} \psi(x)\, dx + \int_{0}^{\infty} \psi(x)\, dx$$

aus Beispiel 1.86.b) wird gesucht. Um die Wirkung von $\widehat{T_{\text{sign}}}$ auf $\widehat{\psi}$ zu ermitteln, starten wir mit der Wirkung von T_{sign} auf ψ und drücken die (glatte) Funktion ψ als Fourier–

Rücktransformierte von $\widehat{\psi}$ aus:

$$\begin{aligned}
\langle \mathrm{sign}, \psi\rangle &= -\int_{-\infty}^{0} \psi(x)\,dx + \int_{0}^{\infty} \psi(x)\,dx = \int_{0}^{\infty} (\psi(x) - \psi(-x))\,dx \\
&= \int_{0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}} \cdot \Big(\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\psi}(k)\cdot e^{\mathrm{i}\cdot k\cdot x}\,dk - \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\psi}(k)\cdot e^{\mathrm{i}\cdot k\cdot(-x)}\,dk \Big)\,dx \\
&= \lim_{R\to\infty} \int_{0}^{R}\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\psi}(k)\cdot \frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}} \cdot \Big(e^{\mathrm{i}\cdot k\cdot x} - e^{-\mathrm{i}\cdot k\cdot x}\Big)\,dk\,dx \\
&= \lim_{R\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\psi}(k)\cdot \underbrace{\Big(\int_{0}^{R} \frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}} \cdot \Big(e^{\mathrm{i}\cdot k\cdot x} - e^{-\mathrm{i}\cdot k\cdot x}\Big)\,dx \Big)}\,dk \\
&= \lim_{R\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\psi}(k)\cdot \frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}} \cdot \Big[\frac{e^{\mathrm{i}\cdot k\cdot x} + e^{-\mathrm{i}\cdot k\cdot x}}{i\cdot k} \Big]_{x=0}^{x=R}\,dk \\
&= \lim_{R\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\psi}(k)\cdot \frac{2}{\sqrt{2\cdot\pi}} \cdot \Big(\frac{\cos(R\cdot k)}{i\cdot k} - \frac{1}{i\cdot k}\Big)\,dk \\
&= \lim_{R\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\widehat{\psi}(k) - \widehat{\psi}(-k)}{\sqrt{2\cdot\pi}} \cdot \Big(\frac{\cos(R\cdot k)}{i\cdot k} - \frac{1}{i\cdot k}\Big)\,dk \\
&= \lim_{R\to\infty} \int_{\infty}^{\infty} \frac{\widehat{\psi}(k) - \widehat{\psi}(-k)}{\sqrt{2\cdot\pi}\cdot i\cdot k} \cdot \cos(R\cdot k)\,dk + \frac{i}{\sqrt{2\cdot\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\widehat{\psi}(k) - \widehat{\psi}(-k)}{k}\,dk.
\end{aligned}$$

Man beachte, dass für die glatte Funktion $\widehat{\psi}$ am Nullpunkt $\widehat{\psi}(k) - \widehat{\psi}(-k) \approx 2\cdot\widehat{\psi}'(0)\cdot k$ gilt, also $(\widehat{\psi}(k) - \widehat{\psi}(-k))/k$ am Punkt $k = 0$ keine Singularität hat. Über das Riemann–Lebesgue–Lemma 1.68.c) verschwindet der Grenzwert des ersten Integrals und es verbleibt die Distribution

$$\widehat{T_{\mathrm{sign}}}:\ \widehat{\psi} \in \mathcal{S} \to \frac{i}{\sqrt{2\cdot\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\widehat{\psi}(k) - \widehat{\psi}(-k)}{k}\,dk$$

als Fourier–Transformation von T_{sign}. Zuletzt wollen wir diesen Ausdruck noch in der Form $\int_{-\infty}^{\infty} \overline{T_{\mathrm{sign}}(k)}\cdot\widehat{\psi}(k)\,dk$ schreiben, um T_{sign} als (verallgemeinerte) Funktion in k interpretieren zu können. Dabei müssen wir an der Stelle $k = 0$ etwas vorsichtig sein, da $\widehat{\psi}(k)/k$ für Funktionen mit $\widehat{\psi}(0) \neq 0$ eine nicht integrierbare Singularität hat:

$$\begin{aligned}
\widehat{T_{\mathrm{sign}}}(\widehat{\psi}) &= \lim_{\epsilon\to 0} \frac{i}{\sqrt{2\cdot\pi}} \cdot \Big(\int_{-\infty}^{-\epsilon} \frac{\widehat{\psi}(k) - \widehat{\psi}(-k)}{k}\,dk + \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{\widehat{\psi}(k) - \widehat{\psi}(-k)}{k}\,dk \Big) \\
&= \lim_{\epsilon\to 0} \frac{2\cdot i}{\sqrt{2\cdot\pi}} \cdot \Big(\int_{-\infty}^{-\epsilon} \frac{\widehat{\psi}(k)}{k}\,dk + \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{\widehat{\psi}(k)}{k}\,dk \Big) = \frac{2}{\sqrt{2\cdot\pi}} \cdot \fint_{-\infty}^{\infty} \overline{\Big(\frac{-i}{k}\Big)} \cdot \widehat{\psi}(k)\,dk.
\end{aligned}$$

Ergebnis: als Funktion ist die Distribution gegeben durch:

$$\widehat{T_{\mathrm{sign}}}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}} \cdot \frac{2}{i\cdot k}.$$

Rechnet man mit dieser Funktion, muss man darauf achten, dass Integrale um die Singularität bei $k = 0$ als sogenannter „Cauchy–Hauptwert" zu nehmen sind (damit ist der obige Limes $\epsilon \to \infty$ gemeint, der durch das Symbol $⨍_{-\infty}^{\infty}$ angedeutet wird).

---

c) Die Fourier–Transformierte $\widehat{\delta_{x_0}}$ der Delta–Distribution $\delta_{x_0} : \psi \in \mathcal{S} \to \psi(x_0)$ wird gesucht. Um die Wirkung von $\widehat{\delta_{x_0}}$ auf $\widehat{\psi}$ zu ermitteln, starten wir mit der Wirkung von δ_{x_0} auf ψ und drücken die (glatte) Funktion ψ als Fourier–Rücktransformierte von $\widehat{\psi}$ aus:

$$\delta_{x_0}(\psi) = \psi(x_0) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\psi}(k) \cdot e^{\mathrm{i} \cdot k \cdot x}\, dk\Big|_{x=x_0} = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\psi}(k) \cdot e^{\mathrm{i} \cdot k \cdot x_0}\, dk$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \Big(\frac{e^{\mathrm{i} \cdot k \cdot x_0}}{\sqrt{2 \cdot \pi}}\Big) \cdot \widehat{\psi}(k)\, dk = \int_{-\infty}^{\infty} \Big(\overline{\frac{e^{-\mathrm{i} \cdot k \cdot x_0}}{\sqrt{2 \cdot \pi}}}\Big) \cdot \widehat{\psi}(k)\, dk = \Big\langle \frac{e^{-\mathrm{i} \cdot k \cdot x_0}}{\sqrt{2 \cdot \pi}}\ ,\ \widehat{\psi} \Big\rangle.$$

Ergebnis: Die Fourier–Transformierte der Delta–Distribution δ_{x_0} ist die Funktion $\widehat{\delta_{x_0}}(k) = e^{-\mathrm{i} \cdot k \cdot x_0}/\sqrt{2 \cdot \pi}$. Dies ist sehr leicht zu merken, indem man die Delta–Distribution δ_{x_0} wie eine Funktion $\delta(x - x_0)$ behandelt und formal rechnet:

$$\widehat{\delta_{x_0}}(k) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0) \cdot e^{-\mathrm{i} \cdot k \cdot x_0}\, dx = \frac{e^{-\mathrm{i} \cdot k \cdot x_0}}{\sqrt{2 \cdot \pi}}.$$

6.12.02↓

1.4.5 Die Unschärferelation

Der quantenmechanische Zustand eines physikalischen Systems wird durch eine L_2–Funktion ψ beschrieben. Die physikalischen Observablen entsprechen selbstadjungierten Operatoren $A : L_2 \to L_2$:

Definition 1.90: (Selbstadjungierte Operatoren auf $L_2(\mathbb{R})$)

Der **„adjungierte" („transponierte")** *Operator A^* eines linearen Operators $A : L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R})$ ist definiert durch*

$$\langle A^* \phi, \psi \rangle = \langle \phi, A\psi \rangle$$

für alle $\phi, \psi \in L_2(\mathbb{R})$. Ein Operator mit $A = A^*$ heißt **„selbstadjungiert"**.

Beispiel 1.91: a) Der „Ortsoperator" $x : \psi(x) \to x \cdot \psi(x)$ ist definiert auf einem dichten Teilraum von $L_2(\mathbb{R})$ (nämlich für diejenigen $\psi \in L_2(\mathbb{R})$, die so schnell im Unendlichen abfallen, dass $x \cdot \psi$ wieder in $L_2(\mathbb{R})$ liegt). Der Ortsoperator ist selbstadjungiert:

$$\langle \phi, x \cdot \psi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\phi(x)} \cdot x \cdot \psi(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{x \cdot \phi(x)} \cdot \psi(x)\, dx = \langle x \cdot \phi, \psi \rangle.$$

b) Der „Impulsoperator"[2] $-i \cdot \frac{d}{dx} : \psi(x) \to -i \cdot \psi'(x)$ ist definiert auf einem dichten Teilraum von $L_2(\mathbb{R})$ (nämlich für diejenigen $\psi \in L_2(\mathbb{R})$, deren Ableitung existiert und wieder in $L_2(\mathbb{R})$ liegt). Der Impulsoperator ist selbstadjungiert. Partielle Integration liefert nämlich:

$$\begin{aligned}
\langle \phi, (-i) \cdot \frac{d}{dx}\, \psi \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\phi(x)} \cdot (-i) \cdot \psi'(x)\, dx \\
&= \underbrace{\Big[\overline{\phi(x)} \cdot (-i) \cdot \psi(x)\Big]_{x=-\infty}^{x=\infty}}_{=0} - \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\phi'(x)} \cdot (-i) \cdot \psi(x)\, dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \overline{(-i) \cdot \phi'(x)} \cdot \psi(x)\, dx = \left\langle (-i) \cdot \frac{d}{dx}\phi, \psi \right\rangle .
\end{aligned}$$

Definition 1.92: (Die Streuung von Observablen)

Ein physikalischer Messwert einer dem Operator A entsprechenden Observablen eines Systems im Zustand $\psi \in L_2(\mathbb{R})$ hat den **„Erwartungswert"**

$$\langle A \rangle = \frac{\langle \psi, A\psi \rangle}{\langle \psi, \psi \rangle}$$

und die **„Streuung"** *(***„Unschärfe"***) $\Delta A \geq 0$ definiert durch*

$$(\Delta A)^2 = \langle (A - \langle A \rangle)^2 \rangle = \frac{\langle \psi, (A - \langle A \rangle)^2 \psi \rangle}{\langle \psi, \psi \rangle}.$$

Satz 1.93: (Die Heisenbergsche Unschärferelation)

Für selbstadjungierte Operatoren A, B gilt für jedes $\psi \in L_2(\mathbb{R})$, $\psi \neq 0$:

$$\Delta A \cdot \Delta B \geq \frac{1}{2} \cdot \frac{|\langle \psi, (AB - BA)\psi \rangle|}{\langle \psi, \psi \rangle}.$$

Beweis: Setze $X = A - \langle A \rangle$, $Y = B - \langle B \rangle$. Diese Operatoren sind wieder selbstadjungiert. Mit der Cauchy–Schwarzschen Ungleichung 1.5 ergibt sich

$$\begin{aligned}
(\Delta A)^2 \cdot (\Delta B)^2 &= \frac{\langle \psi, X^2\psi \rangle}{\langle \psi, \psi \rangle} \cdot \frac{\langle \psi, Y^2\psi \rangle}{\langle \psi, \psi \rangle} = \frac{\langle X\psi, X\psi \rangle}{\langle \psi, \psi \rangle} \cdot \frac{\langle Y\psi, Y\psi \rangle}{\langle \psi, \psi \rangle} \\
&\geq \frac{|\langle X\psi, Y\psi \rangle|^2}{\langle \psi, \psi \rangle^2} = \frac{|\langle \psi, XY\psi \rangle|^2}{\langle \psi, \psi \rangle^2}.
\end{aligned}$$

[2] Eigentlich ist der Impulsoperator $-i \cdot \hbar \cdot \frac{d}{dx}$. Wir setzen hier das Planksche Wirkungsquantum $\hbar$ auf 1.

Wir wollen $\langle\psi, XY\psi\rangle$ in Real– und Imaginärteil zerlegen und beobachten zunächst, dass mit der Selbstadjungiertheit der Operatoren X, Y gilt:

$$\begin{aligned}\langle\psi,(XY\pm YX)\psi\rangle &= \langle\psi,XY\psi\rangle \pm \langle\psi,YX\psi\rangle = \langle Y^*X^*\psi,\psi\rangle \pm \langle X^*Y^*\psi,\psi\rangle\\ &= \langle YX\psi,\psi\rangle \pm \langle XY\psi,\psi\rangle = \langle (YX\pm XY)\psi,\psi\rangle = \overline{\langle\psi,(YX\pm XY)\psi\rangle},\end{aligned}$$

also

$$\langle\psi,(XY\pm YX)\psi\rangle = \pm\overline{\langle\psi,(XY\pm XY)\psi\rangle}.$$

Damit ist

$$\langle\psi,(XY+YX)\psi\rangle = \overline{\langle\psi,(XY+YX)\psi\rangle}$$

reell und

$$\langle\psi,(XY-YX)\psi\rangle = -\overline{\langle\psi,(XY-YX)\psi\rangle}$$

imaginär. Es folgt die Zerlegung von $\langle\psi, XY\psi\rangle$ in Real– und Imaginärteil:

$$\begin{aligned}\langle\psi,XY\psi\rangle &= \langle\psi,\Big(\frac{XY+YX}{2}+\frac{XY-YX}{2}\Big)\psi\rangle\\ &= \underbrace{\langle\psi,\frac{XY+YX}{2}\psi\rangle}_{\Re(\langle\psi,XY\psi\rangle)} + \underbrace{\langle\psi,\frac{XY-YX}{2}\psi\rangle}_{i\cdot\Im(\langle\psi,XY\psi\rangle)},\end{aligned}$$

also

$$|\langle\psi,XY\psi\rangle|^2 = |\langle\psi,\frac{XY+YX}{2}\psi\rangle|^2 + |\langle\psi,\frac{XY-YX}{2}\psi\rangle|^2 \geq |\langle\psi,\frac{XY-YX}{2}\psi\rangle|^2.$$

Letztlich folgt mit $XY-YX = (A-\langle A\rangle)(B-\langle B\rangle)-(B-\langle B\rangle)(A-\langle A\rangle) = AB-BA$:

$$\Delta A\cdot\Delta B \geq \frac{|\langle\psi,XY\psi\rangle|}{\langle\psi,\psi\rangle} \geq \frac{|\langle\psi,\frac{XY-YX}{2}\psi\rangle|}{\langle\psi,\psi\rangle} = \frac{1}{2}\cdot\frac{|\langle\psi,(AB-BA)\psi\rangle|}{\langle\psi,\psi\rangle|}.$$

Q.E.D.

Für A = Ortsoperator = x und B = Impulsoperator = $p = -i\cdot\frac{d}{dx}$ folgt mit

$$(AB-BA)\psi = x\cdot(-i)\cdot\frac{d}{dx}\,\psi(x) + i\cdot\frac{d}{dx}\,\Big(x\cdot\psi(x)\Big) = i\cdot\psi(x)$$

die Unschärferelation für das Paar Ort/Impuls:

$$\boxed{\Delta x\cdot\Delta p \geq \frac{1}{2}\cdot\frac{|\langle\psi,i\cdot\psi\rangle|}{\langle\psi,\psi\rangle} = \frac{1}{2}.}$$

Der Zusammenhang mit der Fourier–Transformation ergibt sich durch die Beobachtung aus Satz 1.72:

$$\mathcal{F}[-i\cdot f'](k) = k\cdot\mathcal{F}[f](k),$$

d.h., der Impulsoperator im Ortsraum (i.W. die Ableitung) wird zum „Ortsoperator" (Multiplikation mit der Frequenz k) im Fourier–Raum.

Satz 1.94: (Die Unschärferelation für Fourier–Paare)
Seien $f, x \cdot f, x^2 \cdot f \in L_2(\mathbb{R})$. Für $\widehat{f}(k) = \mathcal{F}[f](k)$ gelte $\widehat{f},\ k \cdot \widehat{f},\ k^2 \cdot \widehat{f} \in L_2(\mathbb{R})$. Definiere $\Delta x \geq 0$, $\Delta k \geq 0$ über

$$(\Delta x)^2 = \frac{\langle f, (x - \langle x \rangle)^2 \cdot f \rangle}{\langle f, f \rangle}, \quad (\Delta k)^2 = \frac{\langle \widehat{f}, (k - \langle k \rangle)^2 \cdot \widehat{f} \rangle}{\langle \widehat{f}, \widehat{f} \rangle}$$

mit $\langle x \rangle = \dfrac{\langle f, x \cdot f \rangle}{\langle f, f \rangle}$, $\langle k \rangle = \dfrac{\langle \widehat{f}, k \cdot \widehat{f} \rangle}{\langle \widehat{f}, \widehat{f} \rangle}$. *Es gilt:* $\boxed{\Delta x \cdot \Delta k \geq \frac{1}{2}.}$

Beweis: Wir setzen $B = -i \cdot \dfrac{d}{dx}$. Mit dem Plancherel–Theorem 1.83 gilt

$$\langle B \rangle = \frac{\langle f, Bf \rangle}{\langle f, f \rangle} = \frac{\langle f, -if' \rangle}{\langle f, f \rangle} = \frac{\langle \widehat{f}, \widehat{(-if')} \rangle}{\langle \widehat{f}, \widehat{f} \rangle} \overset{(*)}{=} \frac{\langle \widehat{f}, k \cdot \widehat{f} \rangle}{\langle \widehat{f}, \widehat{f} \rangle} = \langle k \rangle,$$

wobei in $(*)$ Satz 1.72 benutzt wurde: $\mathcal{F}[-i \cdot f'](k) = k \cdot \widehat{f}(k)$. Mit $(k - \langle k \rangle) \cdot \widehat{f}(k) = \mathcal{F}[(B - \langle B \rangle) f](k)$ ergibt sich

$$\frac{\langle \widehat{f}, (k - \langle k \rangle)^2 \cdot \widehat{f} \rangle}{\langle \widehat{f}, \widehat{f} \rangle} = \frac{\langle (k - \langle k \rangle) \cdot \widehat{f}, (k - \langle k \rangle) \cdot \widehat{f} \rangle}{\langle \widehat{f}, \widehat{f} \rangle}$$

$$= \frac{\langle \mathcal{F}[(B - \langle B \rangle) f], \mathcal{F}[(B - \langle B \rangle) f] \rangle}{\langle \widehat{f}, \widehat{f} \rangle} = \frac{\langle (B - \langle B \rangle) f, (B - \langle B \rangle) f \rangle}{\langle f, f \rangle}$$

$$= \frac{\langle f, (B - \langle B \rangle)^2 f \rangle}{\langle f, f \rangle}.$$

Also: $(\Delta k)^2 = (\Delta B)^2$. Mit $A : f(x) \to x \cdot f(x)$ gilt $(\Delta x)^2 = (\Delta A)^2$. Mit

$$(AB - BA) f(x) = x \cdot (-i) \frac{d}{dx} f(x) + i \cdot \frac{d}{dx} (x \cdot f(x)) = i \cdot f(x)$$

liefert die Heisenbergsche Unschärferelation 1.93: $\Delta x \cdot \Delta k = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{|\langle f, i \cdot f \rangle|}{\langle f, f \rangle} = \dfrac{1}{2}$.

Q.E.D.

Bemerkung 1.95: *Das Gleichheitszeichen in der obigen Unschärferelation gilt nur für Funktionen der Form*

$$f(x) = const \cdot e^{i \cdot k_0 \cdot x} \cdot e^{-\lambda \cdot (x - x_0)^2 / 2}$$

(d.h., $|f|$ ist eine Gauss–Glocke) mit den Fourier–Transformierten

$$\widehat{f}(k) = \frac{const}{\sqrt{|\lambda|}} \cdot e^{-i \cdot (k - k_0) \cdot x_0} \cdot e^{-(k - k_0)^2 / (2 \cdot \lambda)}.$$

Hierbei sind x_0, k_0, λ beliebige reelle Werte; es gilt

$$\langle x\rangle = x_0, \quad \langle k\rangle = k_0, \quad \Delta x = \frac{1}{\sqrt{2\cdot|\lambda|}}, \quad \Delta k = \frac{\sqrt{|\lambda|}}{\sqrt{2}}.$$

Begründung: Der Beweis der Unschärferelation 1.93 benutzt die Cauchy–Schwarze Ungleichung für $\langle (A-\langle A\rangle)f, (B-\langle B\rangle)f\rangle$, die genau dann zur Gleichheit wird, wenn $(B-\langle B\rangle)f$ und $(A-\langle A\rangle)f$ proportional sind. Der Proportionalitätsfaktor $i\cdot\lambda$ wird mit $\lambda\in\mathbb{R}$ als imaginär angesetzt, sonst gibt es keine L_2–Lösungen. Die Funktionen mit minimalem Unschärfeprodukt sind also durch die DGL

$$(B-\langle B\rangle)f = i\cdot\lambda\cdot(A-\langle A\rangle)f$$

bestimmt, also

$$-i\cdot f'(x) - k_0\cdot f(x) = i\cdot\lambda\cdot(x-x_0)\cdot f(x),$$

wobei $k_0 = \langle B\rangle = \langle k\rangle$, $x_0 = \langle A\rangle = \langle x\rangle$. Die Lösungen der DGL

$$f'(x) - i\cdot k_0\cdot f(x) = -\lambda\cdot(x-x_0)\cdot f(x)$$

sind die Funktionen

$$f(x) = const\cdot e^{\mathrm{i}\cdot k_0\cdot x}\cdot e^{-\lambda\cdot(x-x_0)^2/2},$$

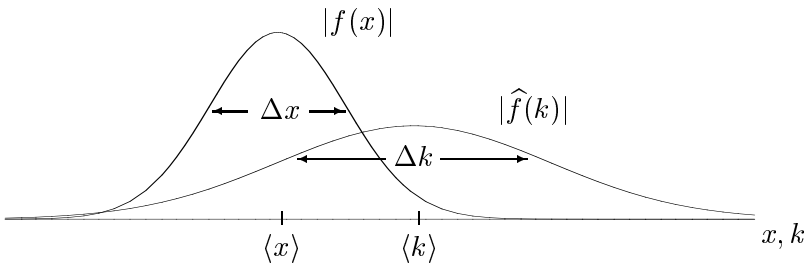
für die sich in der Tat

$$\langle x\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x\cdot|f(x)|^2\,dx = x_0, \quad \langle k\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} k\cdot|\widehat{f}(k)|^2\,dk = k_0$$

und die angegebenen Werte für Δx, Δk ergeben.

Interpretation 1.96:

Der Wert $\langle x\rangle$ ist der „Schwerpunkt“ des Signals $f(x)$ längs der x-Achse, der Wert Δx die „Breite” des Signals. Analog sind $\langle k\rangle$ und Δk der Schwerpunkt bzw. die Breite der Fourier–Transformierten $\widehat{f}(k)$ längs der k-Achse.



Die Unschärferelation besagt, dass die Breite nicht gleichzeitig sowohl im Urbildbereich als auch im Bildbereich der Fourier–Transformation klein sein kann. Ist ein Signal „örtlich" (bzgl. x) lokalisiert (Δx klein), so ist es im Frequenzbereich notwendigerweise gestreut (Δk gross) und umgekehrt. Die Unschärferelation quantifiziert das Grundprinzip, das wir schon im Skalierungssatz 1.68.d) kennengelernt hatten: wird das Signal $f(x)$ durch eine geeignete Wahl des Skalierungsparameters im Ortsraum schmal gemacht, verbreitert sich automatisch die Fourier–Transformierte $\widehat{f}(k)$.

1.4.6 Zusammenfassung

Wir tragen die wesentlichen Eigenschaften/Rechenregeln für die Fourier–(Rück–)Transformation

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f](k) &= \frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}}\cdot\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cdot e^{-\mathrm{i}\cdot k\cdot x}\,dx,\\ \mathcal{F}^{-1}[\widehat{f}](k) &= \frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}}\cdot\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k)\cdot e^{\mathrm{i}\cdot k\cdot x}\,dk\end{aligned}$$

zusammen. Mit

$$\mathcal{F}^{-1}[f](\kappa) = \mathcal{F}[f](-\kappa)$$

können wir uns dabei auf die Eigenschaften der Fourier–Transformation beschränken. Die folgenden Regeln wurden in den früheren Abschnitten oder in Übungsaufgaben bewiesen:

Verschiebung im Ortsraum:

$$\mathcal{F}[f(x-x_0)](k) = e^{-i\cdot k\cdot x_0}\cdot\mathcal{F}[f(x)](k).$$

Modulation einer Trägerfrequenz k_0:

$$\mathcal{F}[e^{\mathrm{i}\cdot k_0\cdot x}\cdot f(x)](k) = \mathcal{F}[f(x)](k-k_0).$$

Skalierung:

$$\mathcal{F}[f(\lambda\cdot x)](k) = \frac{1}{|\lambda|}\cdot\mathcal{F}[f(x)]\Big(\frac{k}{\lambda}\Big).$$

Ableitung im Ortsraum:

$$\mathcal{F}[f^{(n)}(x)](k) = (i\cdot k)^n\cdot\mathcal{F}[f(x)](k).$$

Ableitung im Fourier–Raum:

$$\mathcal{F}[x^n\cdot f(x)](k) = i^n\cdot\frac{d^n}{dk^n}\,\mathcal{F}[f(x)](k).$$

Integration im Ortsraum:

$$\mathcal{F}\Big[\int_{-\infty}^{x} f(\xi)\,d\xi\Big](k) = \frac{1}{i\cdot k}\cdot\mathcal{F}[f(x)](k) + \pi\cdot\mathcal{F}[f(x)](0)\cdot\delta(k).$$

Glättung im Ortsraum:

$$\mathcal{F}\Big[\tfrac{1}{2\cdot L}\int_{x-L}^{x+L} f(\xi)\,d\xi\Big](k) = \frac{\sin(k\cdot L)}{k\cdot L}\cdot\mathcal{F}[f(x)](k).$$

Produkt im Ortsraum = Faltung im Frequenzraum:

$$\mathcal{F}[f(x)\cdot g(x)](k) \overset{(*)}{=} \frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}}\cdot\Big(\mathcal{F}[f]*\mathcal{F}[g]\Big)(k).$$

Faltung im Ortsraum = Produkt im Frequenzraum:

$$\mathcal{F}[(f*g)(x)](k) \overset{(*)}{=} \sqrt{2\cdot\pi}\cdot\mathcal{F}[f](k)\cdot\mathcal{F}[g](k).$$

Hierbei steht in $(*)$ das Symbol $f*g$ für die Faltung

$$(f*g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)\cdot g(y)\,dy$$

zweier Funktionen (vergleiche Aufgabe 33), während $f(x)\cdot g(x)$ die durch punktweise Multiplikation entstehende Funktion ist.

Eine sehr wichtige Formel: $\boxed{\frac{1}{2\cdot\pi}\cdot\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mathrm{i}\cdot(k-k_0)\cdot x}\,dx = \delta(k-k_0).}$

Einige wichtige Fourier–Transformationen:

$$\mathcal{F}[\delta(x-x_0)](k) = e^{-\mathrm{i}\cdot k\cdot x_0}.$$

$$\mathcal{F}[1](k) = \sqrt{2\cdot\pi}\cdot\delta(k).$$

$$\mathcal{F}[e^{\mathrm{i}\cdot k_0\cdot x}](k) = \sqrt{2\cdot\pi}\cdot\delta(k-k_0).$$

$$\mathcal{F}[\sin(k_0\cdot x)](k) = i\cdot\sqrt{\frac{\pi}{2}}\cdot\Big(\delta(k+k_0)-\delta(k-k_0)\Big).$$

$$\mathcal{F}[\cos(k_0\cdot x)](k) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\cdot\Big(\delta(k+k_0)+\delta(k-k_0)\Big).$$

$$\mathcal{F}[H(x)](k) = \frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}}\cdot\frac{1}{i\cdot k} + \sqrt{\frac{\pi}{2}}\cdot\delta(k).$$

Hierbei ist H die Sprungfunktion $H(x)=0$ für $x<0$, $H(x)=1$ für $x\geq 0$.