Einführung in die Stochastik Sommersemester 07
Dr. Walter Oevel 28. 5. 2007

Übungsblatt 8

Mit $*$ und $**$ gekennzeichnete Aufgaben können zum Sammeln von Bonuspunkten verwendet werden. Lösungen von $*$-Aufgaben sind schriftlich abzugeben im Zettelkasten Nr. 5 auf dem D1 bis Mittwoch, 6.6.07, 11:00 Uhr. Lösungen von $**$-Aufgaben sind per Web-Formular unter `http://www.math.upb.de/~walter` ($\longrightarrow$ Lehre SS 07 $\longrightarrow$ Übungen) abzuliefern bis spätestens Mittwoch, 6.6.07, $23^{\underline{59}}$ Uhr.

Aufgabe 44: (Verteilungen von Zufallsvariablen, Erwartungswerte)

Bei dreimaligem Wurf mit einem fairen Würfel sei X die Anzahl der Würfe, bei denen die Augenzahl mindestens 5 beträgt. Bestimme die Verteilungsfunktion F_X und den Erwartungswert $\mathrm{E}(X)$.

Musterlösung:
Der umständliche Weg: Der Stichprobenraum sei $\Omega = \{(1,1,1), \ldots, (6,6,6)\}$. Betrachte die Variable X = „Anzahl der Würfe mit mindestens 5 Augen“: $\Omega \mapsto \{0,1,2,3\}$. Mit explizitem Abzählen folgt:

$$
\begin{aligned}
P(X=0) &= P(\{(1,1,1),\ldots,(4,4,4)\}) = \tfrac{4\cdot 4\cdot 4}{6\cdot 6\cdot 6} = \tfrac{8}{27}\ , \\
P(X=1) &= P(\{(5,1,1),\ldots,(5,4,4),(1,5,1),\ldots,(4,5,4),(1,1,5),\ldots,(4,4,5), \\
&\qquad (6,1,1),\ldots,(6,4,4),(1,6,1),\ldots,(4,6,4),(1,1,6),\ldots,(4,4,6)\}) \\
&= \tfrac{6\cdot 4\cdot 4}{6\cdot 6\cdot 6} = \tfrac{4}{9}\ , \\
P(X=2) &= \ldots \text{abzählen} \ldots = \tfrac{3\cdot 4\cdot 4}{6\cdot 6\cdot 6} = \tfrac{2}{9}\ , \\
P(X=3) &= P(\{(5,5,5),(6,5,5),(5,6,5),(5,5,6), \\
&\qquad (5,6,6),(6,5,6),(6,6,5),(6,6,6)\}) \ = \ \tfrac{8}{6\cdot 6\cdot 6} = \tfrac{1}{27}\ .
\end{aligned}
$$

Der einfache Weg: Das kann man auch wesentlich einfacher haben. Betrachte den 3-fachen Wurf als 3-fache Wiederholung des Bernoulli-Experiments „einfacher Wurf“ mit „Erfolg“ = „das Ergebnis ist ≥ 5“, also $p = P(\text{Erfolg}) = P(\{5,6\}) = 2/6 = 1/3$. Für die Anzahl der Erfolge X bei $n = 3$-facher Wiederholung gilt

$$
P(X=k) = \binom{n}{k}\, p^k (1-p)^{n-k} = \binom{3}{k} \left(\frac{1}{3}\right)^k \left(\frac{2}{3}\right)^{3-k} = \binom{3}{k} \frac{2^{3-k}}{27}\ , \quad k = 0,1,2,3\ ,
$$

also

$$
P(X=0) = \frac{8}{27}\ ,\ P(X=1) = \frac{3\cdot 4}{27} = \frac{4}{9}\ ,\ P(X=2) = \frac{3\cdot 2}{27} = \frac{2}{9}\ ,\ P(X=3) = \frac{1}{27}\ .
$$

Durch Aufsummieren dieser Wahrscheinlichkeiten ergibt sich die Verteilungsfunktion:

$$
F_X(r) = \begin{cases}
0 \text{ für } r < 0\ , \\
\frac{8}{27} \text{ für } 0 \leq r < 1\ , \\
\frac{8+12}{27} = \frac{20}{27} \text{ für } 1 \leq r < 2\ , \\
\frac{8+12+6}{27} = \frac{26}{27} \text{ für } 2 \leq r < 3\ , \\
\frac{8+12+6+1}{27} = 1 \text{ für } 3 \leq r\ ,
\end{cases}
$$

Der Erwartungswert ist

$$
\mathrm{E}(X) = \sum_{k \in X(\Omega)} k\ P(X=k) \ = \ 0\cdot\frac{8}{27} + 1\cdot\frac{4}{9} + 2\cdot\frac{2}{9} + 3\cdot\frac{1}{27} \ = \ 1\ .
$$

In der Interpretation als X = „Anzahl der Erfolge bei n-facher Wiederholung eines Bernoulli-Experiments" erhält man Erwartungswert auch direkt als $\mathrm{E}(X) = n\,p = 3 \cdot (1/3) = 1$.

Aufgabe 45: (Erwartungswerte über diskreten Modellen)

Sei $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$ ein diskretes Modell, $X : \Omega \mapsto \{r_1, r_2, \ldots\} \subset \mathbb{R}$ eine beliebige Zufallsvariable. Zeige formal, dass aus der Definition 2.22 bzw. 2.24.a) des Skripts die alternative Formel

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)\ P(\{\omega\})$$

aus Bemerkung 2.25 des Skripts folgt.

Musterlösung:

Seien $E_i = X^{-1}(r_i) = \{\omega \in \Omega;\ X(\omega) = r_i\} \subset \Omega$ die Urbilder der diskreten Werte, die X annehmen kann. Über dem diskreten Modell Ω gilt

$$P(X = r_i) = P(E_i) = \sum_{\omega \in E_i} P(\{\omega\}).$$

Nach Definition 2.22/2.24.a) ist $\mathrm{E}(X) = \sum\limits_{r_i \in X(\Omega)} r_i\ P(X = r_i)$. Es folgt

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X) &= \sum_{r_i \in X(\Omega)} r_i\ P(E_i) = \sum_{r_i \in X(\Omega)} r_i \sum_{\omega \in E_i} P(\{\omega\}) \\ &= \sum_{r_i \in X(\Omega)} \sum_{\omega \in E_i} r_i\ P(\{\omega\}) = \sum_{r_i \in X(\Omega)} \sum_{\omega \in E_i} X(\omega)\ P(\{\omega\}).\end{aligned}$$

Diese Doppelsumme entspricht einer Summe über alle ω in Ω, denn jedes ω gehört in genau ein E_i:

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{r_i \in X(\Omega)} \sum_{\omega \in E_i} X(\omega)\ P(\{\omega\}) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)\ P(\{\omega\}).$$

Aufgabe 46*: (Erwartungswerte. 10 + 10 Punkte)

In einem Gebiet wird Öl vermutet. Es werden nacheinander unabhängige Versuchsbohrungen durchgeführt, die jeweils mit Wahrscheinlichkeit p zum Erfolg führen. Jede Einzelbohrung verursacht die Kosten K. Welche Gesamtkosten muss man im Mittel aufwenden, bis man zum ersten Mal auf Öl stößt,

(a) wenn man bereit ist, den Versuch beliebig oft zu wiederholen,

(b) wenn man zu höchstens 5 Versuchen bereit ist?

Musterlösung:

a) Die Möglichkeiten sind: eine beliebige Anzahl von Mißerfolgen „$-$" mit $P(-) = 1 - p =: q$, gefolgt von einem Erfolg „$+$" mit $P(+) = p$, also:

$$\Omega = \{+, -+, --+, \ldots\}\ , \quad P(\underbrace{-\ldots-}_{k}+) = (1-p)^k\, p = q^k\, p\ .$$

Sei X die Kosten, also $X(+) = K$, $X(-+) = 2K$, $X(--+) = 3K$ usw. Der Erwartungswert ist

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(X) &= K\,P(+) \;+\; 2\,K\,P(-+) \;+\; 3\,K\,P(--+) \;+\; \cdots \\
&= K\,p\,(1 + 2\,q + 3\,q^2 + 4\,q^3 + \cdots) \;=\; K\,p\,\frac{d}{dq}\,(1 + q + q^2 + q^3 + \cdots) \\
&= K\,p\,\frac{d}{dq}\frac{1}{1-q} \;=\; \frac{K\,p}{(1-q)^2} \;=\; \frac{K}{p}\;.
\end{aligned}$$

b) Bei maximal n Versuchen (gefragt ist $n = 5$) sind die Möglichkeiten:

$$\Omega = \{+, -+, --+, \ldots, \underbrace{-\cdots-}_{n-1}+, \underbrace{-\ldots-}_{n}\}\;.$$

Für die Kosten X folgt:

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(X) &= K\,P(+) \;+\; 2\,K\,P(-+) \;+\; \cdots \;+\; n\,K\,P(\underbrace{-\ldots-}_{n-1}+) \;+\; n\,K\,P(\underbrace{-\ldots-}_{n}) \\
&= K\sum_{k=1}^{n} k\,q^{k-1}\,p \;+\; n\,Kq^n \;=\; Kp\,\frac{d}{dq}\sum_{k=1}^{n} q^k \;+\; n\,Kq^n \\
&= Kp\,\frac{d}{dq}\frac{1-q^{n+1}}{1-q} \;+\; n\,Kq^n \;=\; Kp\,\frac{1-q^{n+1}}{(1-q)^2} - Kp\,\frac{(n+1)\,q^n}{1-q} \;+\; n\,Kq^n \\
&= K\frac{1-q^{n+1}}{p} - K\,(n+1)\,q^n \;+\; n\,Kq^n \;=\; \frac{K}{p}\,\Big(1 - q^{n+1} - p\,q^n\Big) \\
&= \frac{K}{p}\,\Big(1 - (q+p)\,q^n\Big) \;=\; \frac{K}{p}\,\Big(1 - q^n\Big)\;.
\end{aligned}$$

Aufgabe 47*: (Erwartungswerte, wiederholte Bernoulli-Experimente. 10 + 10 Punkte)

(a) Ein Bernoulli-Experiment wird solange wiederholt, bis zum ersten Mal Erfolg eintritt. Wieviele Versuche wird man benötigen? (Also zum Beispiel: wann stellen sich beim Lotto zum ersten Mal sechs Richtige ein?) Beachte auch Aufgabe 46.

(b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit reichen maximal n Versuche zum Erfolg?

Musterlösung:
Betrachte zur Beschreibung der Wiederholungen den Stichprobenraum

$$\Omega = \{+, -+, --+, ---+, \ldots\}$$

mit $+$ = „Erfolg“, $-$ = „Mißerfolg“.

a) Die Anzahl der Versuche X bis zum ersten Erfolg

$$X(+) = 1\;,\; X(-+) = 2\;,\; X(--+) = 3\;,\; \ldots$$

hat offensichtlich die Verteilung

$$P(X = k) = P(\underbrace{-\ldots-}_{k-1}+) = \underbrace{P(-)\cdot\ldots\cdot P(-)}_{k-1}\,P(+) = q^{k-1}\,p\;, \quad k = 1, 2, \ldots\;.$$

Probe:

$$\sum_{k=1}^{\infty} P(X = k) \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1}\,p \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} q^k\,p \;=\; \frac{p}{1-q} \;=\; 1 \text{ (ok).}$$

Der Erwartungswert ist:

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{k=1}^{\infty} k\, P(X=k) = \sum_{k=1}^{\infty} k\, q^{k-1}\, p = p \frac{d}{dq} \sum_{k=0}^{\infty} q^k = p \frac{d}{dq} \frac{1}{1-q} = \frac{p}{(1-q)^2} = \frac{1}{p} \;.$$

Zusatz: zur Berechnung der Streuung erhält man zunächst:

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(X^2) &= \sum_{k=1}^{\infty} k^2\, P(X=k) \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} k^2\, p\, q^{k-1} \\
&= p\, q \sum_{k=1}^{\infty} k(k-1) q^{k-2} + \underbrace{p \sum_{k=1}^{\infty} k q^{k-1}}_{\mathrm{E(X)}} \;=\; p\, q\, \frac{d^2}{dq^2} \sum_{k=0}^{\infty} q^k \;+\; \frac{1}{p} \\
&= p\, q\, \frac{d^2}{dq^2} \frac{1}{1-q} \;+\; \frac{1}{p} \;=\; p\, q\, \frac{2}{(1-q)^3} \;+\; \frac{1}{p} \;=\; \frac{2\, q}{p^2} \;+\; \frac{1}{p} \;=\; \frac{1+q}{p^2} \;.
\end{aligned}$$

Mit $\mathrm{E}(X) = 1/p$ ergibt sich die Streuung

$$\sigma^2(X) = \mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}(X)^2 = \frac{1+q}{p^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{q}{p^2} \;.$$

b) Betrachte das Ereignis E = „es reichen maximal n Versuche zum Erolg“:

$$E = \{+, -+, --+, \ldots, \underbrace{-\ldots-}_{n-1}+\} \subset \Omega \;.$$

Es folgt

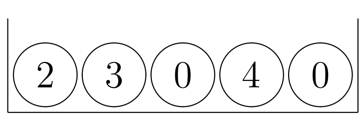
$$P(E) = P(+) \;+\; P(-+) \;+\; \cdots \;+\; P(-\ldots-+) \;=$$

$$\sum_{k=1}^{n} p\, q^{k-1} = p \sum_{k=0}^{n-1} q^k \overset{\text{(geometrische Reihe)}}{=} p\, \frac{1-q^n}{1-q} = 1 - q^n \;.$$

Aufgabe 48:** (Erwartungswerte, wiederholte Bernoulli-Experimente. 20 Punkte)

Dies ist eine Online-Aufgabe, die bis zum 6.6.07, 23^{59} Uhr, abzuliefern ist.

Aus der folgenden Urne (die vom Aufgabenserver zufällig abgeändert wird) darf eine beliebige Anzahl von Kugeln ohne Zurücklegen gezogen werden. Am Ende erhält man das Produkt der gezogenen Werte in Euro. Wieviele Kugeln sollte man ziehen, um den erwarteten Gewinn zu maximieren?



Musterlösung:

Seien X_1,X_2, X_3 die Gewinne, die man erhält, wenn man eine, zwei bzw. drei Kugeln zieht (bei allen weiteren Zügen zieht man notwendigerweise mindestens eine Null und erhält kein Geld). Es sind die

Erwartungswerte von X_1, X_2, X_3 zu bestimmen:

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(X_1) &= 0 \cdot \underbrace{P(X_1 = 0)}_{egal} \;+\; 2 \cdot \underbrace{P(X_1 = 2)}_{1/5} \;+\; 3 \cdot \underbrace{P(X_1 = 3)}_{1/5} \;+\; 4 \cdot \underbrace{P(X_1 = 4)}_{1/5} \\
&= 2 \cdot \frac{1}{5} \;+\; 3 \cdot \frac{1}{5} \;+\; 4 \cdot \frac{1}{5} = \frac{9}{5} = 1.8, \\
\mathrm{E}(X_2) &= 0 \cdot \underbrace{P(X_2 = 0)}_{egal} \;+\; 6 \cdot \underbrace{P(X_2 = 6)}_{2\cdot(1/5)\cdot(1/4)} \;+\; 8 \cdot \underbrace{P(X_2 = 8)}_{2\cdot(1/5)\cdot(1/4)} \;+\; 12 \cdot \underbrace{P(X_2 = 12)}_{2\cdot(1/5)\cdot(1/4)} \\
&= 0 \cdot P(X_2 = 0) \;+\; 6 \cdot \left(2 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4}\right) \;+\; 8 \cdot \left(2 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4}\right) \;+\; 12 \cdot \left(2 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4}\right) \\
&= (6 + 8 + 12) \cdot \frac{1}{10} = \frac{26}{10} = 2.6, \\
\mathrm{E}(X_3) &= 0 \cdot \underbrace{P(X_2 = 0)}_{egal} \;+\; 24 \cdot \underbrace{P(X_2 = 6)}_{6\cdot(1/5)\cdot(1/4)\cdot(1/3)} \;=\; 24 \cdot \left(6 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3}\right) \;=\; \frac{24}{10} \;=\; 2.4.
\end{aligned}$$

Damit ist das zweimalige Ziehen pro Spiel die günstigste Variante.
