Einführung in die Stochastik — Sommersemester 07
Dr. Walter Oevel — 21. 5. 2007

Übungsblatt 7

Mit $*$ und $**$ gekennzeichnete Aufgaben können zum Sammeln von Bonuspunkten verwendet werden. Lösungen von $*$-Aufgaben sind schriftlich abzugeben im Zettelkasten Nr. 5 auf dem D1 bis Mittwoch, 30.5.07, 11:00 Uhr. Lösungen von $**$-Aufgaben sind per Web-Formular unter `http://www.math.upb.de/~walter` ($\longrightarrow$ Lehre SS 07 $\longrightarrow$ Übungen) abzuliefern bis spätestens Mittwoch, 30.5.07, $23^{\underline{59}}$ Uhr.

Aufgabe 39*: (Zufallsvariablen, Verteilungsfunktionen, 20 Punkte)

Sei F eine beliebige monoton steigende Funktion von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$. Beweise formal, dass an jedem Punkt $r \in \mathbb{R}$ der rechts- und linksseitige Grenzwert von F existiert und

$$\lim_{\substack{\epsilon \to 0 \\ \epsilon > 0}} F(r-\epsilon) \leq F(r) \leq \lim_{\substack{\epsilon \to 0 \\ \epsilon > 0}} F(r+\epsilon)$$

gilt.

Musterlösung:
Wir zeigen

$$F_+ := \inf\,\{F(x); x > r\} = \lim_{\substack{\epsilon \to 0 \\ \epsilon > 0}} F(r+\epsilon),$$

wobei das Infimum sicherlich existiert, da die Menge aufgrund der Monotonie von F durch $F(r)$ nach unten beschränkt ist. Als Infimum ist für jedes $\epsilon > 0$ der Wert $F_+ + \epsilon$ keine untere Schranke der Menge mehr, es gibt also ein $r_\epsilon > r$ mit $F(r_\epsilon) < F_+ + \epsilon$. Mit der Monotonie von F gilt damit für alle x mit $r < x < r_\epsilon$:

$$|F(x) - F_+| = F(x) - F_+ \leq F(r_\epsilon) - F_+ < \epsilon.$$

Damit ist F_+ der rechtsseitige Limes von F an der Stelle r, für den $F(r) \leq F_+$ gilt, da $F(r)$ eine untere Schranke der Menge $\{F(x); x > r\}$ ist und F_+ als Infimum die größte untere Schranke ist.

Wir zeigen

$$F_- := \sup\,\{F(x); x < r\} = \lim_{\substack{\epsilon \to 0 \\ \epsilon > 0}} F(r-\epsilon),$$

wobei das Supremum sicherlich existiert, da die Menge aufgrund der Monotonie von F durch $F(r)$ nach oben beschränkt ist. Als Supremum ist für jedes $\epsilon > 0$ der Wert $F_- - \epsilon$ keine obere Schranke der Menge mehr, es gibt also ein $r_\epsilon < r$ mit $F(r_\epsilon) > F_- - \epsilon$. Mit der Monotonie von F gilt damit für alle x mit $r_\epsilon < x < r$:

$$|F_- - F(x)| = F_- - F(x) \leq F_- - F(r_\epsilon) < \epsilon.$$

Damit ist $F_- -$ der linksseitige Limes von F an der Stelle r, für den $F_- \leq F(r)$ gilt, da $F(r)$ eine obere Schranke der Menge $\{F(x); x < r\}$ ist und F_- als Supremum die kleinste obere Schranke ist.

Aufgabe 40*: (Zufallsvariablen, Verteilungsfunktionen, 20 Punkte)

Beweise formal Satz 2.9.3) des Skripts: Für jede Zufallsvariable X mit der Verteilungsfunktion F_X gilt

$$\lim_{r \to -\infty} F_X(r) = 0.$$

Musterlösung:
Sei $X : \Omega \to \mathbb{R}$. Betrachte die disjunkten Ereignisse $E_i = \{\omega \in \Omega; -i-1 < X(\omega) \leq -i\}$ für $i = 1, 2, \ldots$ und $E_0 = \{\omega \in \Omega; -1 < X(\omega) \leq \infty\}$. Es gilt

$$\bigcup_{i=0}^{\infty} E_i = \Omega.$$

Für unendliche abzählbare Vereinigungen disjunkter Ereignisse gilt mit der „σ-Additivität“ in Definition 1.2.iii.2 des Skripts:

$$1 = P(\Omega) = P(\bigcup_{i=0}^{\infty} E_i) = \sum_{i=0}^{\infty} P(E_i).$$

Da die Reihe konvergiert, gilt für die 'Reihenreste' $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{n}^{\infty} P(E_i) = 0$. Andererseits gilt

$$F_X(-n) = P(-\infty < X \leq -n) = P(\bigcup_{i=n}^{\infty} E_i) = \sum_{i=n}^{\infty} P(E_i).$$

Also: $\lim\limits_{n\to\infty} F_X(-n) = 0$. Der gefragte Grenzwert von $F_X(r)$ ist also 0, falls r auf den ganzen Zahlen gegen $-\infty$ strebt. Allgemein: Sei r_n eine beliebige gegen $-\infty$ konvergierende Folge reeller Zahlen. Wegen der Monotonie von F_X gilt mit $\lceil r \rceil$ = kleinste ganze Zahl gößer oder gleich r:

$$0 \leq F_X(r_n) \leq F_X(\lceil r_n \rceil).$$

Mit $\lim\limits_{n\to\infty} F_X(\lceil r_n \rceil) = 0$ folgt die Existenz des Grenzwertes von $F_X(r_n)$, der wegen

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} F_X(r_n) \leq \lim_{n\to\infty} F_X(\lceil r_n \rceil) = 0$$

verschwinden muss.

Aufgabe 41:** (Zufallsvariablen, Verteilungsfunktionen, 10 Punkte)
Dies ist eine Online-Aufgabe, die bis zum 30.5.07, 23^{59} Uhr, abzuliefern ist.
Betrachte die Verteilungsfunktion

$$F_X(r) = \begin{cases} 0 & \text{für } r < 0, \\ r/2 & \text{für } 0 \leq r < 1, \\ 3/5 & \text{für } 1 \leq r < 2, \\ (3 \cdot r + 1)/10 & \text{für } 2 \leq r < 3, \\ 1 & \text{für } 3 \leq r. \end{cases}$$

einer Zufallsvariablen X. Bestimme die Wahrscheinlichkeit $P(X \in [\frac{1}{2}, 1) \cup [\frac{3}{2}, \frac{7}{4}] \cup (\frac{5}{2}, \frac{7}{2})\,)$.
(Die Daten werden vom Aufgabenserver zufällig abgeändert).

Musterlösung:
Es gilt:

$$P\Big(X \in \Big[\frac{1}{2}, 1\Big) \cup \Big[\frac{3}{2}, \frac{7}{4}\Big] \cup \Big(\frac{5}{2}, \frac{7}{2}\Big)\Big) = P\Big(X \in \Big[\frac{1}{2}, 1\Big)\Big) + P\Big(X \in \Big[\frac{3}{2}, \frac{7}{4}\Big]\Big) + P\Big(X \in \Big(\frac{5}{2}, \frac{7}{2}\Big)\Big).$$

Nach Vorlesung gilt

$$\begin{aligned}
P(r_1 < X \leq r_2) &= F_X(r_2) - F_X(r_1), \\
P(r_1 \leq X \leq r_2) &= F_X(r_2 - \epsilon) - \lim_{\substack{\epsilon \to 0 \\ \epsilon > 0}} F_X(r_1 - \epsilon), \\
P(r_1 < X < r_2) &= \lim_{\substack{\epsilon \to 0 \\ \epsilon > 0}} F_X(r_2 - \epsilon) - F_X(r_1), \\
P(r_1 \leq X < r_2) &= \lim_{\substack{\epsilon \to 0 \\ \epsilon > 0}} F_X(r_2 - \epsilon) - \lim_{\substack{\epsilon \to 0 \\ \epsilon > 0}} F_X(r_1 - \epsilon).
\end{aligned}$$

Hiermit ergibt sich:

$$\begin{aligned}
P(\tfrac{1}{2} \leq X < 1) &= \lim_{\substack{\epsilon \to 0 \\ \epsilon > 0}} F_X(1 - \epsilon)\Big) - \lim_{\substack{\epsilon \to 0 \\ \epsilon > 0}} F_X\Big(\frac{1}{2} - \epsilon\Big)\Big) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}, \\
P(\tfrac{3}{2} \leq X \leq \tfrac{7}{4}) &= F_X\Big(\frac{7}{4}\Big) - \lim_{\substack{\epsilon \to 0 \\ \epsilon > 0}} F_X\Big(\frac{3}{2} - \epsilon\Big) = \frac{3}{5} - \frac{3}{5} = 0, \\
P(\tfrac{5}{2} < X < \tfrac{7}{2}) &= \lim_{\substack{\epsilon \to 0 \\ \epsilon > 0}} F_X\Big(\frac{7}{2} - \epsilon\Big) - F_X\Big(\frac{5}{2}\Big) = 1 - \frac{17}{20} = \frac{3}{20},
\end{aligned}$$

also

$$P\Big(X \in \Big[\frac{1}{2}, 1\Big) \cup \Big[\frac{3}{2}, \frac{7}{4}\Big] \cup \Big(\frac{5}{2}, \frac{7}{2}\Big)\Big) = \frac{1}{4} + \frac{3}{20} = \frac{2}{5}.$$

Aufgabe 42: (Zufallsvariablen, Verteilungsfunktionen)
Betrachte den 3-fachen Wurf einer fairen Münze. Sei X der Absolutbetrag der Differenz zwischen der Anzahl der geworfenen „Köpfe“ und der Anzahl der geworfenen „Zahlen“. Bestimme die Wahrscheinlichkeiten $P(X = k)$ sowie die Verteilungsfunktion F_X.

Musterlösung:
Das unterliegende kombinatorische Modell des 3-fachen Münzwurfs sei

$$\Omega = \{(\omega_1, \omega_2, \omega_3);\ \omega_1, \omega_2, \omega_3 \in \{K, Z\}\}.$$

Die Zufallsvariable X kann nur die Werte $k = 1$ oder $k = 3$ annehmen:

$$P(X = 1) = P(\{(K,K,Z), (K,Z,K), (Z,K,K), (K,Z,Z), (Z,K,Z), (Z,Z,K)\} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4},$$

$$P(X = 3) = P(\{(K,K,K), (Z,Z,Z)\} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}.$$

Die Verteilungsfunktion $F_X(r) = \sum_{k \leq r} P(X = k)$ ist damit die Treppenfunktion

$$F_X(r) = \begin{cases} 0 & \text{für } r < 1, \\ \frac{3}{4} & \text{für } 1 \leq r < 3, \\ \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1 & \text{für } 3 \leq r. \end{cases}$$

Aufgabe 43: (Zufallsvariablen, spezielle Verteilungsfunktionen)
Eine kontinuierliche Zufallsvariable $X : \Omega \to \mathbb{R}$ mit der Verteilungsdichte

$$\rho(r) = \frac{1}{\sigma\,\sqrt{2\,\pi}}\; e^{-\frac{(r-\mu)^2}{2\,\sigma^2}}$$

heißt **normalverteilt** mit den Parametern μ („Erwartungswert") und σ („Streuung").
Eine diskrete Zufallsvariable $Y : \Omega \to \{0, 1, 2, \ldots\}$ mit der durch

$$P(Y = k) = \frac{\lambda^k\, e^{-\lambda}}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

gegebenen Verteilung heißt **Poisson-verteilt** zum Parameter λ („Erwartungswert").

(a) Für welches r nimmt die Dichte $\rho(r)$ ihr Maximum an?

(b) Für welches k nehmen die Wahrscheinlichkeiten $P(Y = k)$ ihr Maximum an?

(c) Vergleiche $\rho(r)$ und $P(Y = \lfloor r \rfloor)$ für $\mu = \lambda$, $\sigma = \sqrt{\lambda}$. Plotte dazu mit einem Graphik-Tool deiner Wahl $\rho(r)$ und $f(r) = P(Y = \lfloor r \rfloor)$ als Funktionen von r in einer gemeinsamen Graphik. Betrachte dabei die Werte $\lambda = 2$, $\lambda = 5$, $\lambda = 100$. Was passiert für $\lambda \to \infty$? Wir werden dieses wichtige Phänomen im Kapitel 4 (Grenzwertsätze) der Vorlesung genauer untersuchen.

Zu (c): ab MuPAD 3.0 kann beispielsweise die Funktion $\rho(r)$ zusammen mit den Punkten $(k, P(Y = k))$ über die folgenden Befehle in einer gemeinsamen Graphik dargestellt werden. Als plot-Bereich für r wird $\lambda \pm 4 \cdot \sqrt{\lambda}$ gewählt, da sich die interessanten Werte im Wesentlichen in diesem Bereich befinden:

```
// Die Wahrscheinlichkeitsdichte/-werte:
lambda:= 5;
rhoX:= r -> 1/sqrt(2*PI*lambda) * exp(-(r - lambda)^2/(2*lambda));
PY:= k -> lambda^k/k!*exp(-lambda);

// Der plot-Bereich
left:= max(0, lambda - 4*sqrt(lambda)):
right:= lambda + 4*sqrt(lambda):

// Erzeuge die plot-Objekte
plotobjectX:=
  plot::PointList2d([[k, PY(k)] $ k = ceil(left) .. trunc(right)],
                    Color = RGB::Black):
plotobjectY:=
  plot::Function2d(rhoX(x), x = left .. right, Color = RGB::Red):

// Die Objekte werden gezeichnet:
plot(plotobjectX, plotobjectY);
```

Musterlösung:
a) Sei $\rho(r) = c_1\, e^{c_2\,(r-\mu)^2}$ mit den Abkürzungen c_1, c_2 für die entsprechenden Parameterkombinationen:

$$\frac{d}{dr}\,\rho(r) = 2\,c_2\,(r-\mu)\,c_1\,e^{c_2\,(r-\mu)^2} = 0 \quad\Rightarrow\quad r = \mu.$$

Das Maximum der Dichte liegt also beim Erwartungswert μ.

b) Betrachte

$$\frac{P(Y=k+1)}{P(Y=k)} = \frac{\lambda^{k+1}\cdot e^{-\lambda}}{(k+1)!}\,\frac{k!}{\lambda^k\cdot e^{-\lambda}} = \frac{\lambda\cdot k!}{(k+1)!} = \frac{\lambda}{k+1}.$$

Die Wahrscheinlichkeiten steigen mit wachsendem k, solange dieser Quotient > 1 ist. Sobald $k+1 \geq \lambda$ gilt, ist der Quotient ≤ 1, und die Wahrscheinlichkeiten fallen ab. Dies passiert zum ersten Mal bei $k+1 = \lceil\lambda\rceil$, d.h., das Maximum wird angenommen für $k = \lceil\lambda\rceil - 1$ ($= \lfloor\lambda\rfloor$, falls λ nicht ganzzahlig ist).

c) Man beobachtet graphisch, dass für grosse Werte von λ alle Punkte $(k, P(Y=k))$ approximativ auf dem Graphen $(r, \rho(r))$ liegen, d.h., die Poisson-Verteilung konvergiert gegen die Normalverteilung.
