Übungsblatt 7

Mit $*$ und $**$ gekennzeichnete Aufgaben können zum Sammeln von Bonuspunkten verwendet werden. Lösungen von $*$-Aufgaben sind schriftlich abzugeben im Zettelkasten Nr. 5 auf dem D1 bis Mittwoch, 30.5.07, 11:00 Uhr. Lösungen von $**$-Aufgaben sind per Web-Formular unter `http://www.math.upb.de/~walter` ($\longrightarrow$ Lehre SS 07 $\longrightarrow$ Übungen) abzuliefern bis spätestens Mittwoch, 30.5.07, $23^{\underline{59}}$ Uhr.

Aufgabe 39*: (Zufallsvariablen, Verteilungsfunktionen, 20 Punkte)
Sei F eine beliebige monoton steigende Funktion von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$. Beweise formal, dass an jedem Punkt $r \in \mathbb{R}$ der rechts- und linksseitige Grenzwert von F existiert und

$$\lim_{\substack{\epsilon \to 0 \\ \epsilon > 0}} F(r - \epsilon) \leq F(r) \leq \lim_{\substack{\epsilon \to 0 \\ \epsilon > 0}} F(r + \epsilon)$$

gilt.

Aufgabe 40*: (Zufallsvariablen, Verteilungsfunktionen, 20 Punkte)
Beweise formal Satz 2.9.3) des Skripts: Für jede Zufallsvariable X mit der Verteilungsfunktion F_X gilt

$$\lim_{r \to -\infty} F_X(r) = 0.$$

Aufgabe 41:** (Zufallsvariablen, Verteilungsfunktionen, 10 Punkte)
Dies ist eine Online-Aufgabe, die bis zum 30.5.07, 23^{59} Uhr, abzuliefern ist.
Betrachte die Verteilungsfunktion

$$F_X(r) = \begin{cases} 0 & \text{für } r < 0, \\ r/2 & \text{für } 0 \leq r < 1, \\ 3/5 & \text{für } 1 \leq r < 2, \\ (3 \cdot r + 1)/10 & \text{für } 2 \leq r < 3, \\ 1 & \text{für } 3 \leq r. \end{cases}$$

einer Zufallsvariablen X. Bestimme die Wahrscheinlichkeit $P(X \in [\frac{1}{2}, 1) \cup [\frac{3}{2}, \frac{7}{4}] \cup (\frac{5}{2}, \frac{7}{2})\,)$.
(Die Daten werden vom Aufgabenserver zufällig abgeändert).

Aufgabe 42: (Zufallsvariablen, Verteilungsfunktionen)
Betrachte den 3-fachen Wurf einer fairen Münze. Sei X der Absolutbetrag der Differenz zwischen der Anzahl der geworfenen „Köpfe“ und der Anzahl der geworfenen „Zahlen“. Bestimme die Wahrscheinlichkeiten $P(X = k)$ sowie die Verteilungsfunktion F_X.

Aufgabe 43: (Zufallsvariablen, spezielle Verteilungsfunktionen)
Eine kontinuierliche Zufallsvariable $X : \Omega \to \mathbb{R}$ mit der Verteilungsdichte

$$\rho(r) = \frac{1}{\sigma\,\sqrt{2\,\pi}}\;e^{-\frac{(r-\mu)^2}{2\,\sigma^2}}$$

heißt **normalverteilt** mit den Parametern μ („Erwartungswert") und σ („Streuung").
Eine diskrete Zufallsvariable $Y : \Omega \to \{0, 1, 2, \ldots\}$ mit der durch

$$P(Y = k) = \frac{\lambda^k\,e^{-\lambda}}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

gegebenen Verteilung heißt **Poisson-verteilt** zum Parameter λ („Erwartungswert").

(a) Für welches r nimmt die Dichte $\rho(r)$ ihr Maximum an?

(b) Für welches k nehmen die Wahrscheinlichkeiten $P(Y = k)$ ihr Maximum an?

(c) Vergleiche $\rho(r)$ und $P(Y = \lfloor r \rfloor)$ für $\mu = \lambda$, $\sigma = \sqrt{\lambda}$. Plotte dazu mit einem Graphik-Tool deiner Wahl $\rho(r)$ und $f(r) = P(Y = \lfloor r \rfloor)$ als Funktionen von r in einer gemeinsamen Graphik. Betrachte dabei die Werte $\lambda = 2$, $\lambda = 5$, $\lambda = 100$. Was passiert für $\lambda \to \infty$? Wir werden dieses wichtige Phänomen im Kapitel 4 (Grenzwertsätze) der Vorlesung genauer untersuchen.

Zu (c): ab MuPAD 3.0 kann beispielsweise die Funktion $\rho(r)$ zusammen mit den Punkten $(k, P(Y = k))$ über die folgenden Befehle in einer gemeinsamen Graphik dargestellt werden. Als plot-Bereich für r wird $\lambda \pm 4 \cdot \sqrt{\lambda}$ gewählt, da sich die interessanten Werte im Wesentlichen in diesem Bereich befinden:

```
// Die Wahrscheinlichkeitsdichte/-werte:
lambda:= 5;
rhoX:= r -> 1/sqrt(2*PI*lambda) * exp(-(r - lambda)^2/(2*lambda));
PY:= k -> lambda^k/k!*exp(-lambda);

// Der plot-Bereich
left:= max(0, lambda - 4*sqrt(lambda)):
right:= lambda + 4*sqrt(lambda):

// Erzeuge die plot-Objekte
plotobjectX:=
  plot::PointList2d([[k, PY(k)] $ k = ceil(left) .. trunc(right)],
                    Color = RGB::Black):
plotobjectY:=
  plot::Function2d(rhoX(x), x = left .. right, Color = RGB::Red):

// Die Objekte werden gezeichnet:
plot(plotobjectX, plotobjectY);
```