

Ü b u n g s b l a t t 6

Mit \* und \*\* gekennzeichnete Aufgaben können zum Sammeln von Bonuspunkten verwendet werden. Lösungen von \*-Aufgaben sind schriftlich abzugeben im Zettelkasten Nr. 5 auf dem D1 bis Mittwoch, 23.5.07, 11:00 Uhr. Lösungen von \*\*-Aufgaben sind per Web-Formular unter <http://www.math.upb.de/~walter> (→ Lehre SS 07 → Übungen) abzuliefern bis spätestens Mittwoch, 23.5.07, 23<sup>59</sup> Uhr.

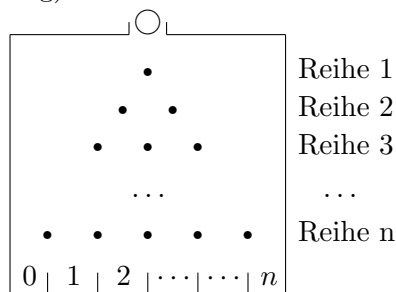
Lerne J.W. kennen, die übelste Schnapsnase von Galton-City:

[www.matheprisma.uni-wuppertal.de](http://www.matheprisma.uni-wuppertal.de)  
 → *Module* → *Diskrete Verteilung*  
 → *Inhaltsverzeichnis* → *Einleitung*

Eine Besuch des *matheprisma* lohnt sich. Diese Seiten sind mit viel Liebe gemacht!

**Aufgabe 32:** (Bernoulli-Experimente, Binomialverteilung)

Betrachte das nebenstehende mechanische Glücksspiel aus der nicht-digitalen Vorzeit. Eine Münze wird oben eingeworfen und trifft unterwegs auf eine Reihe von Nägeln, wobei sie jeweils mit der W'keit 0.5 nach links bzw. nach rechts abgelenkt wird. Nach  $n$  Nagelreihen landet sie in einer der Boxen  $0, \dots, n$ .



- Mit welcher W'keit landet eine Münze in der Box  $k$ ? Anleitung: man drehe das Spiel um  $180^\circ$  und vergleiche mit dem Straßenplan von Galton-City.
- Es werden  $M$  Münzen eingeworfen. Mit welcher W'keit landen genau  $m$  dieser Münzen in der Box  $k$ ? Anleitung: betrachte einen einzelnen Münzwurf als Bernoulli-Experiment mit „Erfolg“ = „die Münze landet in Box  $k$ “.

**Musterlösung:**

a) Betrachte die Bernoulli-Experimente  $\Omega_i = \{+, -\}$

„in der Reihe  $i$  springt die Münze nach rechts oder links (egal, an welchem der  $i$  Nägel in dieser Reihe)“

mit Erfolg  $+$  = „rechts“, Misserfolg  $-$  = „links“. Da  $p = P(+)$  =  $q = P(-)$  =  $\frac{1}{2}$  für alle Nägel in allen Reihen  $i = 1, \dots, n$  vorausgesetzt ist, stimmen die Bernoulli-Experimente überein. Der Weg der Münze ist damit eine  $n$ -fache Wiederholung des selben Bernoulli-Experiments.

Bei 0 Erfolgen landet die Münze offensichtlich in Box 0, bei genau 1 Erfolg in Box 1 usw. Also:

$$p_k = P(\text{„die Münze landet in Box } k\text{“}) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = \binom{n}{k} \frac{1}{2^n}.$$

b) Zu gegebenem  $k \in \{0, \dots, n\}$  betrachte das neue Bernoulli-Experiment eines einzelnen Münzeinwurfs mit „Erfolg“ = „die Münze landet in Box  $k$ “. Die Erfolgsw'keit ist das oben berechnete  $p_k$ . Bei einer  $M$ -fachen Wiederholung ergibt sich sofort die Binomialverteilung

$$P(\text{„genau } m \text{ von } M \text{ M\u00fcnzen landen in Box } k\text{“}) \\ = \binom{M}{m} p_k^m (1 - p_k)^{M-m} \quad \text{mit} \quad p_k = \binom{n}{k} \frac{1}{2^n}.$$

**Aufgabe 33:** (Binomialverteilung)

Betrachte die Binomialverteilung  $k \rightarrow \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$  f\u00fcr  $n$  Wiederholungen eines Bernoulli-Experiments mit Erfolgsw'keit  $p$  und Misserfolgsw'keit  $q = 1 - p$ . F\u00fcr welches  $k \in \{0, 1, \dots, n\}$  ist  $p_k = P(\text{„genau } k \text{ Erfolge“})$  maximal? (**Anleitung:** Betrachte  $p_{k+1}/p_k$ .)

**Musterl\u00f6sung:**

$$\frac{p_{k+1}}{p_k} = \frac{\binom{n}{k+1} p^{k+1} q^{n-k-1}}{\binom{n}{k} p^k q^{n-k}} = \frac{\frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} p}{\frac{n!}{k!(n-k)!} q} \\ = \frac{k! \cdot (n-k)! \cdot p}{(k+1)! \cdot (n-k-1)! \cdot q} = \frac{(n-k) \cdot p}{(k+1) \cdot q}.$$

F\u00fcr kleine Werte von  $k \in \{0, 1, \dots, n\}$  ist dieser Wert gro\u00df (d.h., die W'keiten  $p_{k+1} \gg p_k$  sind monoton steigend in  $k$ ), f\u00fcr gro\u00dfe Werte  $k \approx n$  sind die Quotienten klein (d.h., die W'keiten  $p_{k+1} \ll p_k$  sind monoton fallend in  $k$ ). Die W'keiten beginnen zu fallen, sobald gilt:

$$\frac{p_{k+1}}{p_k} < 1 \Leftrightarrow \frac{(n-k) \cdot p}{(k+1) \cdot q} < 1 \Leftrightarrow (n-k) \cdot p < (k+1) \cdot q \Leftrightarrow n \cdot p < k \cdot (p+q) + q = k + q.$$

Die W'keit ist maximal beim ersten  $k$ , das diese Ungleichung erf\u00fcllt, also  $k = \lceil n \cdot p - q \rceil$ .

**Aufgabe 34:** (wiederholte Bernoulli-Experimente)

Betrachte unabh\u00e4ngige Wiederholungen eines Bernoulli-Experiments. Mit welcher W'keit tritt der erste Erfolg in der  $k$ -ten Wiederholung auf?

**Musterl\u00f6sung:**

Betrachte den Stichprobenraum

$$\Omega = \{+, -+, --+, ---+, \dots\}$$

des Experiments „wiederhole solange, bis der erste Erfolg (+)“ eintritt. Wegen Unabh\u00e4ngigkeit gilt

$$P(\underbrace{\{- \dots -\}}_{k-1} +) = q^{k-1} p.$$

Dies ist die gesuchte W'keit, dass der erste Erfolg im  $k$ -ten Versuch auftritt.

**Aufgabe 35:** (Binomialverteilung)

Ein Spiel besteht darin, dass 3 faire Münzen geworfen werden. Man gewinnt, wenn entweder mehr „Köpfe“ als „Zahlen“ geworfen werden oder falls genau 3 Mal „Zahl“ geworfen wird. Mit welcher W'keit gewinnt man mindestens 3 von 4 Spielen?

**Musterlösung:**

Der dreifache Münzwurf wird als Bernoulli-Experiment angesehen, die Erfolgsw'keit ist:

$$p = \frac{|\{KKK, KKZ, KZK, ZKK, ZZZ\}|}{8} = \frac{5}{8}.$$

Mit  $q = 1 - p = 3/8$  folgt:

$$P(\text{„genau 3 Erfolge bei 4 Spielen“}) = \binom{4}{3} p^3 q^1 = 4 \cdot \frac{5^3}{8^3} \frac{3}{8} = \frac{125 \cdot 3}{2 \cdot 8^3} = \frac{375}{1024} \approx 0.3662,$$

$$P(\text{„genau 4 Erfolge bei 4 Spielen“}) = \binom{4}{4} p^4 q^0 = \frac{5^4}{8^4} = \frac{625}{4096} \approx 0.1526.$$

Hiermit folgt:

$$\begin{aligned} P(\text{„mindestens 3 Erfolge bei 4 Spielen“}) &= P(\text{„genau 3 Erfolge bei 4 Spielen“}) + P(\text{„genau 4 Erfolge bei 4 Spielen“}) \\ &= \frac{375}{1024} + \frac{625}{4096} = \frac{2125}{4096} \approx 0.5188. \end{aligned}$$

**Aufgabe 36\*:** (Binomialverteilung, 10 Punkte)

Ich spiele gegen einen stärkeren Gegner, meine Gewinnchance ist  $1/4$ . Der Gegner stiftet mir einen Preis, wenn ich entweder mindestens eines von drei Spielen oder mindestens zwei von sechs Spielen gewinne. Worauf sollte ich mich einlassen?

**Musterlösung:**

Betrachte das Einzelspiel als Bernoulli-Experiment mit Erfolgsw'keit  $p = 1/4$  und Misserfolgsw'keit  $q = 1 - p = 3/4$ . Die Anzahl der gewonnenen Spiele ist binomialverteilt, also:

$$\begin{aligned} P(\text{mehr als 1 Gewinn bei 3 Spielen}) &= 1 - P(\text{kein Gewinn bei 3 Spielen}) \\ &= 1 - q^3 = 1 - (3/4)^3 = 1 - 27/64 = 37/64 \approx 0.578. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(\text{mehr als 2 Gewinne bei 6 Spielen}) &= 1 - P(\text{kein Gewinn bei 6 Spielen}) - P(\text{genau ein Gewinn bei 6 Spielen}) \\ &= 1 - q^6 - 6 p q^5 = 1 - q^6 - 6(1 - q) q^5 = 1 - 6 q^5 + 5 q^6 \\ &= 1 - 6(3/4)^5 + 5(3/4)^6 = (64 \cdot 64 - 6 \cdot 27 \cdot 9 \cdot 4 + 5 \cdot 27 \cdot 27) / (64 \cdot 64) \\ &= (4096 - 2187) / 4096 = 1909 / 4096 \approx 0.466. \end{aligned}$$

Mein Chancen sind also in der ersten Variante besser.

**Aufgabe 37\*\*:** (Totale W'keit, Binomialverteilung, 20 Punkte)

Dies ist eine Online-Aufgabe, die bis zum 23.5.07, 23<sup>59</sup> Uhr, abzuliefern ist.

Ein Glücksspiel besteht darin, zunächst einen unfairen Würfel mit den W'keiten  $p_1, \dots, p_6$  für die Augenzahl  $k \in \{1, \dots, 6\}$  zu werfen. Bei der Augenzahl  $k$  wird dann  $k$  mal eine faire Münze geworfen. Man gewinnt, wenn man genauso oft „Kopf“ wie „Zahl“ wirft. Mit welcher W'keit gewinnt man  $n$  von  $N$  Spielen? Der Aufgabenserver wählt dabei zufällige Werte für die  $p_k$  sowie  $n$  und  $N$ .

**Musterlösung:**

Es geht um genau  $n$  Erfolge bei  $N$ -facher Wiederholung, also

$$P(\text{„genau } n \text{ Erfolge“}) = \binom{N}{n} p^n (1-p)^{N-n},$$

wobei  $p$  die Gewinnchance eines einzelnen Spiels ist. Es verbleibt also, dieses  $p$  zu bestimmen. Da das Spiel aus den Telexperimenten „Würfeln“ und „ $k$ -facher Münzwurf“ besteht, bietet sich die Formel der totalen W'keit an. Unter der „Ursache“  $U_k = \text{„das Würfelergebnis ist } k\text{“}$ , wird das Bernoulli-Experiment „ $k$ -facher Münzwurf“ mit  $p = P(K) = q = P(Z) = 1/2$  durchgeführt, also

$$\begin{aligned} P(\text{„genauso oft } K \text{ wie } Z \text{“} \mid U_k) &= P(\text{„genauso oft } k/2 \text{ Erfolge“} \mid U_k) \\ &= \begin{cases} 0 & \text{für ungerades } k, \\ \binom{k}{k/2} \frac{1}{2^k} & \text{für gerades } k. \end{cases} \end{aligned}$$

Die Formel der totalen W'keit ergibt

$$\begin{aligned} p &= P(\text{„genauso oft } K \text{ wie } Z\text{“}) \\ &= \sum_{k=1}^6 P(\text{„genauso oft } K \text{ wie } Z \text{“} \mid U_k) \underbrace{P(U_k)}_{=p_k} \\ &= \binom{2}{1} \cdot \frac{1}{2^2} \cdot p_2 + \binom{4}{2} \cdot \frac{1}{2^4} \cdot p_4 + \binom{6}{3} \cdot \frac{1}{2^6} \cdot p_6 \\ &= \frac{2}{4} \cdot p_2 + \frac{6}{16} \cdot p_4 + \frac{20}{64} \cdot p_6 \\ &= \frac{1}{2} \cdot p_2 + \frac{3}{8} \cdot p_4 + \frac{5}{16} \cdot p_6. \end{aligned}$$

Bei einem fairen Würfel mit  $p_1 = \dots = p_6 = 1/6$  ergibt sich beispielsweise

$$p = \frac{19}{96} \approx 0.198$$

und damit das entsprechende

$$P(\text{„genau } n \text{ Gewinne bei } N \text{ Spielen“}) = \binom{N}{n} p^n (1-p)^{N-n}.$$

---

**Aufgabe 38\*:** (Binomialverteilung, 10 + 10 + 10 Punkte)

Die W'keit für „Es ist ein Mädchen!“ sei  $1/2$ .

- In einer Stadt werden in einem Monat 60 Mädchen und 40 Jungen geboren. Wie wahrscheinlich ist dieses Ereignis?
- Berechne für drei Orte mit jeweils 10, 100, 1000 Geburten pro Monat die W'keit dafür, dass in einem Monat mindestens 60% der Neugeborenen Mädchen sind. (Zur Auswertung der Summen bietet sich z.B. MuPAD an.)
- Ist das Ereignis in (a) außergewöhnlich? Schlage dazu ein „vernünftiges“ Kriterium für „außergewöhnlich“ vor!

**Musterlösung:**

Interpretiere eine Geburt als Bernoulli-Experiment mit „Erfolg“ = „Mädchen“ und „Misserfolg“ = „Junge“, wobei  $p = P(M) = q = P(J) = 1/2$  (in der Wirklichkeit gilt  $P(M) \approx 0.486$ ).

(a) Betrachte die  $n = 60 + 40 = 100$ -fache Wiederholung des Bernoulli-Experiments „Geburt“:

$$P(k) \equiv P(\text{„genau } k \text{ Mädchen“}) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = \binom{n}{k} \frac{1}{2^n}.$$

Für die gegebenen Werte ergibt sich

$$P(60 \text{ Mädchen}) = \binom{100}{60} \frac{1}{2^{100}} \approx 0.0108.$$

(b) Sei  $n$  die Anzahl der Geburten. Gefragt ist nach

$$P(\#\text{Mädchen} \geq 0.6 \cdot n) = \sum_{k=\lceil 0.6 \cdot n \rceil}^n \binom{n}{k} \frac{1}{2^n}.$$

$$\text{Für } n = 10 \text{ ergibt sich: } P(\#\text{Mädchen} \geq 6) = \frac{1}{2^{10}} \sum_{k=6}^{10} \binom{10}{k} = \frac{193}{512} \approx 0.377.$$

$$\text{Für } n = 100 \text{ ergibt sich: } P(\#\text{Mädchen} \geq 60) = \frac{1}{2^{100}} \sum_{k=60}^{100} \binom{100}{k} \approx 0.0284.$$

$$\text{Für } n = 1000 \text{ ergibt sich: } P(\#\text{Mädchen} \geq 600) = \frac{1}{2^{1000}} \sum_{k=600}^{1000} \binom{1000}{k} \approx 1.36 \cdot 10^{-10}.$$

(c) Die in (a) berechnete W'keit sagt wenig aus: auch die Frage nach der W'keit für genau 50 Mädchen bei 100 Geburten liefert beispielsweise einen recht kleinen Wert:

$$P(50 \text{ Mädchen}) = \binom{100}{50} \frac{1}{2^{100}} \approx 0.079.$$

Es macht wesentlich mehr Sinn, die in (b) berechnete W'keit zu erfragen, ob die Anzahl der Mädchen in einem gewissen Bereich liegt. Die W'keit, dass von 100 Geburten mindestens 60 der Neugeborenen Mädchen sind, ist nach (b) geringer als 3%. Das in (a) betrachtete Ereignis ist damit in der Tat außergewöhnlich. Ein „Mädchenüberschuss“ von mindestens 60% sollte in der fraglichen Stadt in der Regel nur alle  $1/0.0284 \approx 35$  Monate, also etwa einmal in 3 Jahren auftreten.

---

**Aufgabe 39:** (Bayes, Binomialverteilung)

In einer Urne befinden sich 80 faire Münzen (mit  $P(\text{„Kopf“}) = 1/2$ ) und 20 unfaire Münzen (mit  $P(\text{„Kopf“}) = 2/3$ ). Eine Münze wird gezogen und 100 Mal geworfen, wobei 60 Mal „Kopf“ erscheint. Mit welcher W'keit handelt es sich um eine faire Münze?

**Musterlösung:**

Nach Bayes gilt

$$P(\text{FAIR} \mid 60 \text{ Köpfe bei 100 Würfeln}) = \frac{P(60 \text{ Köpfe bei 100 Würfeln} \mid \text{FAIR}) P(\text{FAIR})}{P(60 \text{ Köpfe bei 100 Würfeln})}.$$

Hierbei gilt (Binomialverteilung):

$$P(60 \text{ Köpfe bei 100 Würfeln} \mid \text{FAIR}) = \binom{100}{60} \left(\frac{1}{2}\right)^{60} \left(\frac{1}{2}\right)^{40} = \binom{100}{60} \frac{1}{2^{100}},$$

$$P(60 \text{ Köpfe bei 100 Würfeln} \mid \text{UNFAIR}) = \binom{100}{60} \left(\frac{2}{3}\right)^{60} \left(\frac{1}{3}\right)^{40} = \binom{100}{60} \frac{2^{60}}{3^{100}}.$$

$$P(\text{FAIR}) = \frac{80}{100} = \frac{4}{5}, \quad P(\text{UNFAIR}) = \frac{20}{100} = \frac{1}{5},$$

$$\begin{aligned} &P(60 \text{ Köpfe bei 100 Würfeln}) \\ &= P(60 \text{ Köpfe bei 100 Würfeln} \mid \text{FAIR}) P(\text{FAIR}) \\ &\quad + P(60 \text{ Köpfe bei 100 Würfeln} \mid \text{UNFAIR}) P(\text{UNFAIR}) \\ &= \binom{100}{60} \frac{1}{2^{100}} \frac{4}{5} + \binom{100}{60} \frac{2^{60}}{3^{100}} \frac{1}{5}. \end{aligned}$$

Es folgt:

$$\begin{aligned} &P(\text{FAIR} \mid 60 \text{ Köpfe bei 100 Würfeln}) \\ &= \frac{P(60 \text{ Köpfe bei 100 Würfeln} \mid \text{FAIR}) P(\text{FAIR})}{P(60 \text{ Köpfe bei 100 Würfeln})} \\ &= \frac{\binom{100}{60} \frac{1}{2^{100}} \frac{4}{5}}{\binom{100}{60} \frac{1}{2^{100}} \frac{4}{5} + \binom{100}{60} \frac{2^{60}}{3^{100}} \frac{1}{5}} = \frac{1}{1 + \frac{2^{160}}{3^{100}} \frac{1}{4}} = \frac{1}{1 + \frac{2^{158}}{3^{100}}} = \frac{1}{1 + 0.70895} \approx 0.5852. \end{aligned}$$

---