Einführung in die Stochastik | Sommersemester 07
Dr. Walter Oevel | 14. 5. 2007

Ü b u n g s b l a t t 6

Mit $*$ und $**$ gekennzeichnete Aufgaben können zum Sammeln von Bonuspunkten verwendet werden. Lösungen von $*$-Aufgaben sind schriftlich abzugeben im Zettelkasten Nr. 5 auf dem D1 bis Mittwoch, 23.5.07, 11:00 Uhr. Lösungen von $**$-Aufgaben sind per Web-Formular unter `http://www.math.upb.de/~walter` ($\longrightarrow$ Lehre SS 07 $\longrightarrow$ Übungen) abzuliefern bis spätestens Mittwoch, 23.5.07, $23^{\underline{59}}$ Uhr.

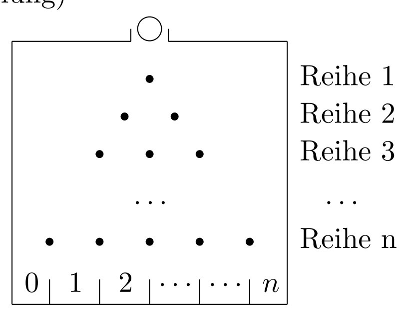
Lerne J.W. kennen, die übelste Schnapsnase von Galton-City:

`www.matheprisma.uni-wuppertal.de`
$\longrightarrow$ *Module* $\longrightarrow$ *Diskrete Verteilung*
$\longrightarrow$ *Inhaltsverzeichnis* $\longrightarrow$ *Einleitung*

Eine Besuch des `matheprisma` lohnt sich. Diese Seiten sind mit viel Liebe gemacht!

Aufgabe 32: (Bernoulli-Experimente, Binomialverteilung)

Betrachte das nebenstehende mechanische Glücksspiel aus der nicht-digitalen Vorzeit. Eine Münze wird oben eingeworfen und trifft unterwegs auf eine Reihe von Nägeln, wobei sie jeweils mit der W'keit 0.5 nach links bzw. nach rechts abgelenkt wird. Nach n Nagelreihen landet sie in einer der Boxen $0, \ldots, n$.



a) Mit welcher W'keit landet eine Münze in der Box k? Anleitung: man drehe das Spiel um 180^0 und vergleiche mit dem Straßenplan von Galton-City.

b) Es werden M Münzen eingeworfen. Mit welcher W'keit landen genau m dieser Münzen in der Box k? Anleitung: betrachte einen einzelnen Münzwurf als Bernoulli-Experiment mit „Erfolg“ = „die Münze landet in Box k“.

Aufgabe 33: (Binomialverteilung)

Betrachte die Binomalverteilung $k \to \binom{n}{k}\, p^k\, q^{n-k}$ für n Wiederholungen eines Bernoulli-Experiments mit Erfolgsw'keit p und Misserfolgsw'keit $q = 1-p$. Für welches $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$ ist $p_k = P($„genau k Erfolge“$)$ maximal? (**Anleitung:** Betrachte p_{k+1}/p_k.)

Aufgabe 34: (wiederholte Bernoulli-Experimente)

Betrachte unabhängige Wiederholungen eines Bernoulli-Experiments. Mit welcher W'keit tritt der erste Erfolg in der k-ten Wiederholung auf?

Aufgabe 35: (Binomialverteilung)
Ein Spiel besteht darin, dass 3 faire Münzen geworfen werden. Man gewinnt, wenn entweder mehr „Köpfe“ als „Zahlen“ geworfen werden oder falls genau 3 Mal „Zahl“ geworfen wird. Mit welcher W'keit gewinnt man mindestens 3 von 4 Spielen?

Aufgabe 36*: (Binomialverteilung, 10 Punkte)

Ich spiele gegen einen stärkeren Gegner, meine Gewinnchance ist 1/4. Der Gegner stiftet mir einen Preis, wenn ich entweder mindestens eines von drei Spielen oder mindestens zwei von sechs Spielen gewinne. Worauf sollte ich mich einlassen?

Aufgabe 37:** (Totale W'keit, Binomialverteilung, 20 Punkte)

Dies ist eine Online-Aufgabe, die bis zum 23.5.07, 23^{59} Uhr, abzuliefern ist.

Ein Glücksspiel besteht darin, zunächst einen unfairen Würfel mit den W'keiten $p_1, \ldots, p_6$ für die Augenzahl $k \in \{1, \ldots, 6\}$ zu werfen. Bei der Augenzahl k wird dann k mal eine faire Münze geworfen. Man gewinnt, wenn man genauso oft „Kopf“ wie „Zahl“ wirft. Mit welcher W'keit gewinnt man n von N Spielen? Der Aufgabenserver wählt dabei zufällige Werte für die p_k sowie n und N.

Aufgabe 38*: (Binomialverteilung, 10 + 10 + 10 Punkte)

Die W'keit für „Es ist ein Mädchen!“ sei 1/2.

(a) In einer Stadt werden in einem Monat 60 Mädchen und 40 Jungen geboren. Wie wahrscheinlich ist dieses Ereignis?

(b) Berechne für drei Orte mit jeweils 10, 100, 1000 Geburten pro Monat die W'keit dafür, dass in einem Monat mindestens 60% der Neugeborenen Mädchen sind. (Zur Auswertung der Summen bietet sich z.B. MuPAD an.)

(c) Ist das Ereignis in (a) außergewöhnlich? Schlage dazu ein „vernünftiges“ Kriterium für „außergewöhnlich“ vor!

Aufgabe 39: (Bayes, Binomialverteilung)
In einer Urne befinden sich 80 faire Münzen (mit $P(\text{„Kopf“}) = 1/2$) und 20 unfaire Münzen (mit $P(\text{„Kopf“}) = 2/3$). Eine Münze wird gezogen und 100 Mal geworfen, wobei 60 Mal „Kopf“ erscheint. Mit welcher W'keit handelt es sich um eine faire Münze?